数学入門公開講座

平成5年8月3日（火）から8月6日（金）まで

京都大学数理解析研究所

講師及び内容

1．論理とコンピュータ（6時間）

京都大学数理解析研究所・助手　服 部 隆 志

コンピュータのプログラムは多くの場合、コンピュータの動作を順序正しく指定するような形になっています。それに対して、論理プログラミングと呼ばれる方法は、数学的な論理式をそのままプログラムとして使います。ここでは、論理プログラミングがどのように働くのか、その数学的基礎はどうなっているのかを考えていきます。また、論理プログラミングに関係する話題もいくつか紹介します。

2．組紐群について（6時間）

京都大学数理解析研究所・助教授　織 田 孝 幸

組紐は太古からある日本の伝統工芸であるが、数学として組紐群（braid group）の研究は1930年ごろから、トポロジーの問題である結び目（knot）や絡み輪（link）の研究の助けとするため、E.Artin によって系統的に調べ始められた。

ここ10数年これが数学の他のいろいろな分野（物理数学、共形場の理論、C^*環、整数論 etc.）とも関連することが分かってきて、多くの研究がなされている。

組紐群について基本的な事実について簡単な入門的話しをする。

3．渦運動と乱流（6時間）

京都大学数理解析研究所・助手　大木谷 耕 司

流体力学に現われる基礎方程式の解の振舞いについては、数学的には未知な点が多い。ここでは、渦運動を中心に基礎方程式の解説からはじめ、現在までに知られている厳密解を紹介する。さらに、数値解析的に得られた解を通して、乱流について話しをする。乱流の‘大きな’カオスとしての側面にも触れる予定である。

時　間　割

時間＼日	8月3日(火)	4日(水)	5日(木)	6日(金)
11：00～12：30	服部	服部	服部	服部
12：30～13：45	休憩			
13：45～15：15	織田	織田	織田	織田
15：15～15：30	休憩			
15：30～17：00	大木谷	大木谷	大木谷	大木谷

組紐群について

京都大学数理解析研究所・助教授　織田孝幸

1993, AUGUST 3,4,5,6,　13:45 ~ 15:15

組紐群について

京都大学数理解析研究所　　織田孝幸

§0．まず組紐について。

縄文土器にみられるように、組紐の歴史は織物以前にも遡ると言われ、文明の発生と同じくらいその起源は古い。平安・鎌倉時代に既にかなり高度の技術水準に達した日本の伝統工芸としての組紐は中世に大鎧の紐としても多量に用いられ、江戸時代に一般にも普及した。

これが数学の研究対象となったのは意外に新しい。一般に数学の概念はしばしばより始源的で普遍性のあるものほど、より新しい時代にとりあげられ、しかもそういうものは人間の世界で意識にものぼらないくらいありふれていることがある。例えば、ベクトル空間の現代的定義が今世紀始めにはじめてみいだされ、位相空間の定義も今世紀に入ってからである。

組紐群は、ドイツの数学者フルウ”ィツ（Adolf Hurwitz）によって１９世紀に少し研究されていたが、トポロジー（位相幾何学）の結び目（knots)や絡み輪（links) の研究に役立てようと、エミール・アルティン(Emile Artin、息子のマイケル・アーティンも MIT の数学の教授) が１９３０年前後に初めて系統的に調べ始めた。

４日間の講義でこの組紐群についてごく基本的なことをお話ししよう。

§1．　群とは何か。またどんな性質もつか。

１．１　群の定義。 組紐群を定義する前に、まず群を定義する必要がある。代数学の基本的概念である群は１９世紀にフランスのガロア（E. Galois) によって始めてはっきりと把握された。これは次のように定義される。

(1.1)　定義　最初にある集合 G がある。G の２つの元 x, y に対してその積といわれる xy という記号で表わされる第三の元を定めるある規則も与えられている（これを演算、または算法ともいう）。　まずこれが次の結合法則を満たす。つまり、

（１）　G の任意の元 $x, y,$ に対して、　$(xy)z = x(yz)$　が成立する。

さらに

（2）　G の中に単位元と呼ばれる特別な元 e が一つあって、G の任意の元 x に対して

$$xe = x, ex = x \text{ が成立する。}$$

その上

（3）G の各元 x に対して逆元と呼ばれる元 x^{-1} があって、

$$xx^{-1} = e, x^{-1}x = e$$

が成立する。

記号。　群の単位元は1で、元 x の逆元は x^{-1} で記す。

注意。　積を作るとき順序が大切である。$xy = yx$ は一般に成立しない。G の任意の2元 x, y に対してこの等式が成立するとき群 G は可換であるという。

例1。　整数の集合 $\mathbb{Z}$（ドイツ語の Zahlen·（数の頭文字））や、有理数全体の集合 $\mathbb{Q}$ は加法を演算として、零元0を単位元、x の逆元は $-x$ として、群をなす。　0以外の有理数の集合 $\mathbb{Q}^*$ は乗法に関し群をなす。このとき単位元は1、x の逆元は x の逆数である。

例2。　対称群。　1から n までの数字の集合を考える。この集合 X から X 自分自身への一対一対応を全体を考える。こういうものはあきらかに $n!$ 個ある。これに写像の合成を積とし、恒等写像を単位元とし、逆元を逆写像として群をなす。これを n 次対称群という。

例3。　2次一般線形群、$GL(2)$。2×2 の可逆行列全体のなす群。

以下上の例等、少し説明する予定である。

§2. 生成元と基本関係式。　あるいは群の表示。

(2.1) 定義。 群 G のある部分集合 S で G の任意の元 g が S の元及びその逆元たちの積の形書き表されるとき、S を G の生成系あるいは生成集合という。つまり

$$g = s_1 s_2 s_3 \cdots s_n \text{ で, 各 } s_i \text{ は } \ s_i \in S \text{ あるいは } s_i^{-1} \in S.$$

例として、組紐群とも関係の深い対称群を調べる。

(2.2) 定理（アミダくじの原理）。n 次の対称群 S_n は $n-1$ 個の互換　$s_i = (i, i+1)$　$(i = 1, \cdots, n-1)$　たちで生成される。

さて、群 G とその生成系が与えられたとき、一般には生成系の元の積にはいろいろ関係式が成立する。例えば上の対称群のときは互換たち

$$s_i^2 = 1; \quad s_i s_{i+1} s_i s_{i+1} s_i s_{i+1} = 1$$

というような関係式である。これは例えば $xx^{-1} = 1$ というようなどんな群に対しても成立する関係式と異なり、考えている群とその生成系に特有なもののはずである。

まず一番最初に生成系 S の積たちの間に、どんな群でも常に成立する $ss^{-1} = 1$ や $s^{-1}s = 1$ $s \in S$ とこれらを消去しても同様の関係式に導くような、あたりまえの関係式しかないとき、もとの群を S を生成系とする自由群であるという。

(2.3) 定義。いま集合 S が一つ与えられているとき、それから形式的に逆元を付け加えてしかも上の様な自明な関係しかない群を構成できる。これを S 上生成された自由群といい、記号 $F(S)$ で表す。

個々の群は、その生成系を一つ固定したとき、考えている群がその生成系について自由群でない限り、いろいろその群と選ばれた生成系に特有の関係式をもつはずで、これらの関係式で群は特徴づけられるはずである。このことを数学的にきちんと定式化するため少し言葉を準備する。

(2.4) 定義。 2つの群 G と H が与えられていて、G から H への対応 $f: G \to H$ があって、これが積を保つとき、つまり G の任意の2元 $x,\ y$ に対して $f(xy) = f(x)f(y)$ が成立するとき、f を群 G から群 H への準同型という。

群 G とその生成系 S が与えられているとき、S 上生成された自由群 $F(S)$ から G へ自然な全射準同型 f が存在する。ここで $F(S)$ の元で f によって G の単位元に移るもの全体 R^* を考える。これが関係式の全体である。しかしこの中には基本的なものがいくつか選ぶことができて、他の関係式がこれから導かれることがある。いまこのことをみる。関係式の全体 R^* について次が成立することはすぐにわかる。

(2.5) 補題。 (i) a, b が R^* の2元であるとき、積 ab 及び逆元 a^{-1} も R^* に属する。

(ii) a が R^* の任意の元、c が $F(S)$ の任意の元であるとき、cac^{-1} も R^* の元である。

(2.6) 定義。全関係式の集合 R^* の部分集合 R で上の2つの操作、つまり

「(i) 積と逆元を付け加える」 と 「(ii) 元の変換、つまり x に対して $F(S)$ の任意の元 c を用いて、cxc^{-1} を付け加える」

を（無限に）繰り返して、R^* 全体に到達できるとき R を基本関係式の集合という。

§3. 組紐群の定義、生成元と基本関係式。

組紐群は直観的には次のように定義される。平面 Π に n 個の点 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ を考える。これ全体を上に置き、もう一つこれらのコピーを下に考える。このとき上の各点を下のどれかの点にただ一つの紐で結び、しかも各々の紐は途中で下から上に逆行したり、2つの紐が交わったりしないものとする。このときさらに紐の位置が連続的に動いてもこれを同じものとみる。これが組

紐群の一つの元を定める（図１）。

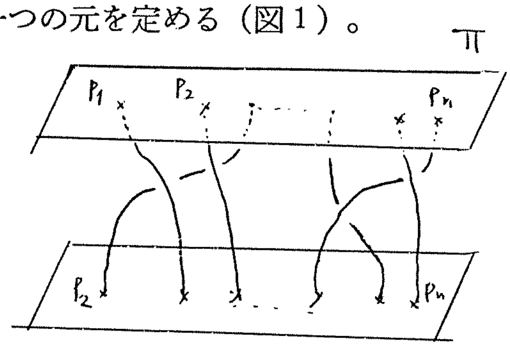

図1

２つの元の積は図２のように定める。（中の平面を忘れる

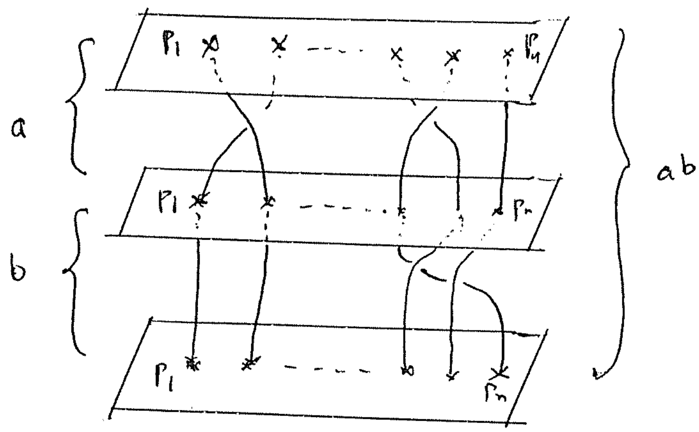

図2

単位元は図３。

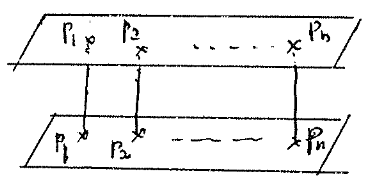

図3

逆元は上の平面に沿って鏡を置き、その鏡映によってえられる。

元 σ_i は点 p_i と p_{i+1} を入れ換えるもので、p_i を手前にくる紐で p_{i+1} に結び、p_{i+1} を向こう側にゆく紐で p_i に結び、他の点は自分自身に垂直に降りる紐で結ぶものとする（図４）。

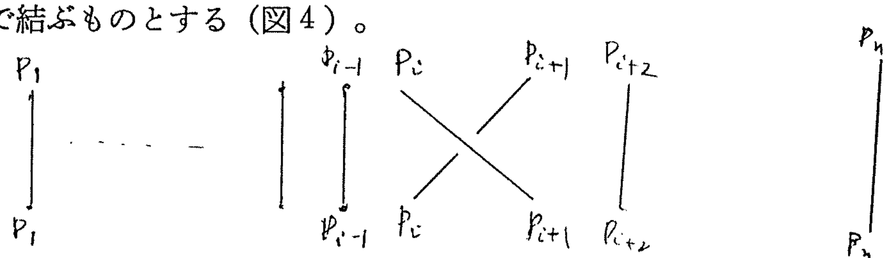

図4.

これらは次の関係式を満たす。

$$(i) \quad \sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1};$$

$$(ii) \quad \sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i \text{（但し、} |i-j| \geq 2 \text{）。}$$

関係式 (i) を組紐関係式 (braid reltion) と呼ぶ。

(3.1) 定理（アルティン）。(a) $n-$ 糸の組紐群 B_n は $n-1$ 個の生成 σ_i $(1 \leq i \leq n-1)$ たちで生成される。

(b) 基本関係式は上の (i)、(ii)、つまり

$$(i) \qquad (\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i)(\sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1})^{-1}$$

$$(ii) \qquad \sigma_i\sigma_j(\sigma_j\sigma_i)^{-1} \text{（但し、} |i-j| \geq 2 \text{）}$$

で与えられる。

上に書いた分ぐらいは何とか２日目の中ぐらいまでには、進みたいと思っています。順調にいけば、３日目、４日目にアレキサンダー不変量やビュロー表現についてお話する予定である。

参考文献

＜民族学上のもの＞

額田　巌、「ひも」、１９８６年、法政大学出版会

数学上の参考文献はきちんと調べていないので、話すときにいくつか挙げるつもりです。