

数学入門公開講座

平成8年8月5日(月)から8月9日(金)まで

京都大学数理解析研究所

講師及び内容

1. プログラミング言語、状態と型 (6時間 15分)

京都大学数理解析研究所・助手 ガリグ ジャック

チューリング機械とラムダ計算(帰納関数論)という、最も一般的な二つのコンピュータの抽象化が根本的に違う点は状態の扱いである。前者では、無限な書き込み可能なテープという形で残されているのに、後者では跡形もなく消えている。プログラミング言語を研究するには、後者が望ましいので、状態を再び導入し、ラムダ計算が持っている型(範疇)体系に埋め込む必要がある。

本講座では、両方の抽象化を紹介し、状態に関する諸問題を考える。

2. リーマン面 (6時間 15分)

京都大学数理解析研究所・助教授 古田 幹雄

一変数の多項式 $f(z)$ は、複素数 z に対して別の複素数 $f(z)$ を対応させる写像です。 z は複素数全体のなす平面の上を動きます。ここで、平面のかわりに球面や、トーラスを考えたらどんな世界が広がっているのでしょうか。リーマン・ロッホの定理の紹介を目標とします。

3. 「漸近挙動を巡って：太鼓の形と酔歩」 (6時間 15分)

京都大学数理解析研究所・教授 高橋陽一郎

“Can you hear the shape of a drum?” は故 M. Kac の有名な論文のタイトルである。鼓や太鼓やドラムの音を聴いて、その幾何学的な形がわかるかという問いかけである。

また、酔歩は乱歩 (random walk) とも呼ばれ、デタラメさ (randomness) とは何かを数学として問うときに最も基本的な、現代確率論の概念である。

これらについて語ることを通じて、漸近挙動ということばの意味をわかってもらえることを期待しつつ、解析学における「等式」の意味を考えてみたい。

時 間 割

日	8月 5日 (月)	6日 (火)	7日 (水)	8日 (木)	9日 (金)
時間					
10:30~11:45	ガリグ	ガリグ	ガリグ	ガリグ	ガリグ
11:45~13:00	休憩				
13:00~14:15	古田	古田	古田	古田	古田
14:15~14:45	休憩				
14:45~16:00	高橋	高橋	高橋	高橋	高橋

「漸近挙動を巡って: 太鼓 の形と酔歩」

京都大学数理解析研究所・教授 高橋陽一郎

1996, AUGUST 5, 6, 7, 8, 9, 14:45 ~ 16:00

平成8年度数学入門公開講座

漸近挙動を巡って：太鼓の形と酔歩

京都大学数理解析研究所 高橋陽一郎

§1 固有振動

M. カッツ(Mark Kac)は、30年前に「太鼓の音を聴いて、その形がわかるか (Can one hear the shape of a drum?)」という問題を提起した。

この節では先ず、弦や笛の音を聴いてその長さがわかるかどうかを考えてみよう。

長さ L の弦の振動は、時刻 t 、点 x における変位を $u(t, x)$ 、また、 u_{tt} 、 u_{xx} をそれぞれ u の t 、 x に関する2次の偏導関数として、偏微分方程式

$$u_{tt} = u_{xx} \quad (t > 0, 0 < x < L) \quad (1)$$

で記述される。ただし、弦の両端は固定されているので、境界条件

$$u(t, 0) = u(t, L) = 0 \quad (2)$$

をおく。(物理的には、上の方程式は $u(t, x)$ の値が小さいときに成り立つ近似であるが、われわれは理想化された方程式そのものに興味がある。なお、物理定数はすべて1とする。) この方程式は、 $u(t, x) \equiv 0$ という自明な解をもつが、それ以外に、空間的な形を保ち、

$$u(t, x) = a(t)u(x) \quad (3)$$

の形をした特別な解がある。これは弦の固有振動に対応する。

このような解を求めてみよう。(3)を(1)に代入すると、

$$a''(t)u(x) = a(t)u''(x).$$

よって、

$$a''(t)/a(t) = u''(x)/u(x).$$

この左辺は x に依存せず、右辺は t に依存しないから、この値は定数でなければならない。その値を κ とおくと、

$$u''(x) = \kappa u(x), \quad (4)$$

$$a''(t) = \kappa a(t). \quad (4')$$

常微分方程式(4)を解こう。

もし $\kappa = 0$ ならば、(4)の解は $u(x) = Ax + B$ (A, B は定数)。すると、境界条件(2)より、 $B = 0$ 、 $A + B = 0$ 。よって、 $A = B = 0$ 、つまり、 u は自明な解になってしまう。

同様に、もし $\kappa = \mu^2 > 0$ ならば、 $u(x) = A \exp \mu x + B \exp(-\mu x)$ (A, B は定数)となり、境界条件(2)より、 $A = B = 0$ となり、やはり自明な解になってしまう。

そこで、 $\kappa = -\mu^2$ 、 $\mu > 0$ とすると、 $u(x) = A \sin \mu x + B \cos \mu x$ 。境界条件(2)より、 $B = 0$ 、 $A \sin \mu L = 0$ 。これが自明な解でないとする、

$$\sin \mu L = 0, \text{つまり、} \mu = n\pi/L \quad (n=1, 2, \dots)$$

よって、定数 κ は次の形に書けなければならない。

$$\kappa = -\lambda_n \quad (n=1, 2, \dots)$$

ただし、

$$\lambda_n = (n\pi/L)^2 \quad (5)$$

ゆえに、固有振動は

$$u(t, x) = \exp(-\lambda_n t) \sin(n\pi x/L) \quad (6)$$

となる。

ここに現れる値 λ_n をこの振動の固有値、また、

$$u_n(x) = \sin(n\pi x/L) \quad (7)$$

を固有関数と呼ぶことにする。

水面などの振動では、方程式は上と同じ(1)であるが、両端は固定されずに、開放されているので、境界条件は、

$$u'(0) = u'(1) = 0 \quad (2')$$

となる。固有振動を同様に求めると、やはり、 $\kappa = -\mu^2$, $\mu > 0$ のときだけ自明でない解 $u(x) = A \sin \mu x + B \cos \mu x$ が存在し、この場合は、境界条件(2)より、 $A=0$, $B \sin \mu L = 0$ 。よって、固有値と固有関数は、

$$\lambda_n = ((n-1)\pi/L)^2 \quad (n=1, 2, \dots) \quad (5')$$

$$u_n(x) = \cos(n\pi x/L) \quad (7')$$

となる。(開放端の場合は、定数関数が固有値0の固有関数となることに注意。)

なお、数学では、固定端の境界条件(2)は Dirichlet 条件、開放端の境界条件(2')は Neumann 条件と呼ぶことが多い。

以上の2つの例では、固有値 λ_n ($n=1, 2, \dots$) を知れば、長さ L がわかる。しかし、余りに具体的で個別的で、どのようにわかるのかは不明である。

そこで、さらに、一般的な境界条件として、

$$u(0) \cos \alpha + u'(0) \sin \alpha = 0, \quad u(L) \cos \beta + u'(L) \sin \beta = 0 \quad (2'')$$

を考えてみよう。($\alpha = \beta = 0$ ならば Dirichlet 条件、 $\alpha = \beta = \pi/2$ ならば Neumann 条件となる。) これを混合条件という。

このときも同じように議論を進めると、

$$u(x) = A \sin \mu x + B \cos \mu x = C \sin(\mu x + \gamma)$$

が境界条件(2'')を満たせばよいから、

$$\sin \gamma \cos \alpha + \cos \gamma \sin \alpha = \sin(\gamma + \alpha) = 0,$$

$$\sin(\mu L + \gamma) \cos \beta + \cos(\mu L + \gamma) \sin \beta = \sin(\mu L + \gamma + \beta) = 0.$$

つまり、

$$\gamma + \alpha = k\pi, \quad \mu L + \gamma + \beta = m\pi \quad (k, m \text{ は整数}).$$

したがって、

$$\mu = (n\pi + \alpha - \beta)/L \quad (n = k - m \text{ は整数})$$

ゆえに、固有値と固有関数は、 n を整数として、次のようになる。

$$\lambda_n = ((n\pi + \alpha - \beta)/L)^2 \quad (5'')$$

$$u_n(x) = \sin((n\pi + \alpha - \beta)x/L - \alpha) \quad (7'')$$

以上の例に共通する固有値 λ_n からの L の求め方は、

$$n^{-1}(\lambda_n)^{1/2} \rightarrow \pi/L \quad (8)$$

である。これは、もっと一般の場合にも通用する法則だろうか？

§2 膜の固有振動

平面領域において、その境界にディリクレ条件をおけば、膜の振動の問題となる。膜の固有振動を求めるためには、 D を平面内の有界領域、 C をその境界として、方程式

$$\begin{aligned}\Delta u &= -\lambda u && (D \text{ 内で}) \\ u &= 0 && (C \text{ 上で})\end{aligned}\quad (9)$$

を解けばよい。ただし、 Δ はラプラス作用素、つまり、

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy}.$$

我々の興味は、太鼓の形を聞けるか？ つまり、次の問題にある。

問題：固有値 λ をすべて知れば、領域の幾何（面積、周の長さ etc）がわかるか？

1次元の場合と違って、上のような方程式を一般的に解くことは難しい。が、正方形や長方形ならば、容易に解けることがわかっている。

そこで、まず、これらの特別な場合に固有値を計算して、この問題がどうなるか調べてみることにする。

まず、正方形を考えよう。その一辺の長さを L とすると、方程式は、

$$\begin{aligned}\Delta u(x,y) &= u_{xx}u(x,y) + u_{yy}u(x,y) = -\lambda u(x,y) && (0 < x, y < L) \\ u(0,y) &= u(L,y) = u(x,0) = u(L,y) = 0\end{aligned}\quad (10)$$

となる。

このとき、固有振動はすべて $u(x,y) = v(x)w(y)$ の形（変数分離形）となることが知られている。このとき、方程式は

$$v''(x)w(y) + v(x)w''(y) = -\lambda u(x)w(y)$$

つまり、

$$v''(x)/v(x) + w''(y)/w(y) = 0$$

となるから、 v, w はそれぞれ、区間 $[0, L]$ におけるディリクレ条件のもとでの固有振動になることがわかる。したがって、固有値と固有振動は次のようになる。

$$\begin{aligned}\lambda &= \lambda_{n,m} = (n\pi/L)^2 + (m\pi/L)^2, && (11) \\ u_{n,m}(x,y) &= \sin(n\pi x/L)\sin(m\pi y/L).\end{aligned}$$

もう少し”実験”を続けてみよう。

領域 D として長方形

$$D: 0 < x < L_1, 0 < y < L_2$$

を考えよう。このときも、正方形の場合と同様に変数分離形で固有振動を求めることができ、

$$\begin{aligned}\lambda &= \lambda_{n,m} = (n\pi/L_1)^2 + (m\pi/L_2)^2, && (12) \\ u_{n,m}(x,y) &= \sin(n\pi x/L_1)\sin(m\pi y/L_2).\end{aligned}$$

これらの結果(11), (12)を見て、その幾何を取り出せというのは少し無茶な問題であろう。実は、カツツの問題は、数理物理学的な背景がある。

量子力学において、固有値と固有状態は、ポテンシャルを V として、方程式

$$\Delta u_n(x,y,z) - V(x,y,z)u_n(x,y,z) = \lambda_n u_n(x,y,z) \quad (-\infty < x, y, z < \infty)$$

によって定まる。ただし、

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}$$

物理学者ローレンツ(Lorentz)は、固有値 λ_n は n が大きいときにはポテンシャル V によらない普遍性をもつことを予想し、数学者H. ワイル(Hermann Weyl)が定理として、証明を与えた。

それを膜の振動の場合に焼き直して述べると、次のようになる。

$$N(\lambda) = \text{大きさが}\lambda\text{未満の固有値}\lambda_n\text{の数}$$

とすると、

$$N(\lambda) \sim (2\pi)^{-1} \text{Area}(D) \lambda \quad (\lambda \rightarrow \infty) \quad (13)$$

が成り立つ。つまり、

$$N(\lambda)/\lambda \rightarrow (4\pi)^{-1} \text{Area}(D) \quad (\lambda \rightarrow \infty)$$

これをワイルの公式という。ここで、 $\text{Area}(D)$ は領域 D の面積である。

正方形と長方形の場合に、上で得た結果(11),(12)から(13)を導いてみよう。まず、正方形の場合、

$$\lambda_{n,m} = (n\pi/L)^2 + (m\pi/L)^2 < \lambda$$

をみたす自然数の組 (n,m) の数 $N(\lambda)$ は、

$$n^2 + m^2 < (L/\pi)^2 \lambda \quad \dots\dots\dots$$

をみたす自然数の組 (n,m) の数に等しいから、

$$\text{半径 } (L/\pi)\lambda^{1/2} \text{ の4分円の面積} \quad \dots\dots\dots$$

以下で、

$$\text{半径 } (L/\pi)\lambda^{1/2} - 1 \text{ の4分円の面積} \quad \dots\dots\dots$$

以上である。

よって、次の2つの不等式が成り立つ。

$$N(\lambda) \leq (\pi/4) ((L/\pi)\lambda^{1/2})^2 \quad \dots\dots\dots$$

$$\leq (4\pi)^{-1} L^2 \lambda, \quad \dots\dots\dots$$

$$N(\lambda) \geq (\pi/4) ((L/\pi)\lambda^{1/2} - 1)^2 \quad \dots\dots\dots$$

$$\geq (4\pi)^{-1} L^2 \lambda - L\lambda^{1/2}/2.$$

ゆえに、 $\lambda \rightarrow \infty$ の極限をとれば、ワイルの公式(13)が得られる。

長方形の場合、

$$\lambda_{n,m} = (n\pi/L_1)^2 + (m\pi/L_2)^2 < \lambda$$

をみたす自然数の組 (n,m) の数 $N(\lambda)$ は、変形すれば、

$$n^2/L_1^2 + m^2/L_2^2 < (1/\pi)^2 \lambda$$

となるから、今度は、4分楕円の面積を用いて評価できて、やはり、ワイルの公式が成り立つことがわかる。実際、次の2つの不等式が成り立つ。

$$N(\lambda) \leq (\pi/4) \cdot (L_1/\pi)\lambda^{1/2} \cdot (L_2/\pi)\lambda^{1/2}$$

$$\leq (4\pi)^{-1} L_1 L_2 \lambda,$$

$$N(\lambda) \geq (\pi/4) ((L_1/\pi)\lambda^{1/2} - 1) ((L_2/\pi)\lambda^{1/2} - 1)$$

$$\geq (4\pi)^{-1} L_1 L_2 \lambda - (L_1 + L_2)\lambda^{1/2}/4.$$

以上で、ワイルの公式が成立するらしいことは、納得できたことにしよう。このような具体的に計算可能な例としては、この他にも、円板などの対称性の高い図形があり、ベッセル関数などの特殊関数のさまざまな性質を駆使して工夫すれば計算できる。(それはそれで興味深い。)しかし、個別に計算手法を工夫しているのでは、一般の領域 D に対して、ワイルの公式やカツツの問題 K を考察するには、程遠く、もう少し一般的な認識方法を見出す必要がある。

そこで、もう少し視野を広げて考えることにしよう。

§ 3 離散版熱方程式と固有関数展開

波の方程式 $u_{tt} = \Delta u$ に対して、次の形の偏微分方程式は熱方程式という。

$$u_t = (1/2) \Delta u \quad (14)$$

熱方程式は、J. フーリエにより 19 世紀始めに導出された。彼の名を有名にしたフーリエ級数は、実は、固有関数を用いた展開であり、熱方程式の固有関数展開により、カッツの問題は熱方程式を用いて、明確な表現が与えられるものである。

さらに、熱方程式はランダムに動きまわる粒子の運動も記述していることが今世紀初頭に明確になる。それは今日、ブラウン運動と呼ばれているものであり、カッツの問題の解答は、そのつながりを通して、理解されるものである。

ここではそのイメージを掴むために、§ 1 の離散版の話から始めよう。1 次元の場合、ラプラス作用素 Δ の離散版は 2 階の差分だから、

$$(1/2) (u_{n+1} + u_{n-1}) - u_n = -\lambda u_n \quad (n=1, 2, \dots, N) \quad (15)$$

を考えることになる。ただし、前と同様に、次の境界条件をおく。

$$u_0 = u_{N+1} = 0 \quad (16)$$

差分方程式(15)を解くと、結果は、連続版の場合と類似の形となり、固有値 $\lambda = \lambda_n$ 、固有振動 $u = e^n$ ($n=1, 2, \dots, N$) はそれぞれ、次のようになることがわかる。

$$\lambda_n = 1 - \cos(n\pi/(N+1)), \quad e^n = \sqrt{2} \sin(nk\pi/(N+1)) \quad (17)$$

そして、任意の波は固有振動を用いて展開できる。

線形代数のことはでいえば、ベクトル $u = (u_1, u_2, \dots, u_N)$ を用いて(15)を

$$Au = -\lambda u \quad (15')$$

と書くことにすると、 A は実対称行列で、その固有値と固有ベクトルが(17)である。このとき、任意のベクトル u は固有ベクトル e^1, e^2, \dots, e^N を用いて

$$u = c_1 e^1 + c_2 e^2 + \dots + c_N e^N \quad (18)$$

と展開される。さらに、等式 $Ae^k = \lambda_k e^k$ より、

$$Au = \lambda_1 c_1 e^1 + \lambda_2 c_2 e^2 + \dots + \lambda_N c_N e^N \quad (19)$$

となる。ここで、固有ベクトル e^1, e^2, \dots, e^N は正規直交基底であり、(つまり、 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ を内積

$$\langle u, v \rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_N v_N.$$

とすると、 $\langle e^n, e^n \rangle = 1, \langle e^n, e^m \rangle = 0$ ($n \neq m$.) また、係数 c_1, c_2, \dots, c_N は次式で与えられる。

$$c_1 = \langle u, e^1 \rangle \quad (n=1, 2, \dots, N) \quad (20)$$

問 上のことを確かめよ。(したがって、

$$u = \langle u, e^1 \rangle e^1 + \langle u, e^2 \rangle e^2 + \dots + \langle u, e^N \rangle e^N \quad (18')$$

$$Au = \lambda_1 \langle u, e^1 \rangle e^1 + \lambda_2 \langle u, e^2 \rangle e^2 + \dots + \lambda_N \langle u, e^N \rangle e^N \quad (19')$$

が成り立つ。)

さて、熱方程式の離散版に話を進めよう。

(14)の離散版は、未知変数 u_1, u_2, \dots, u_N に対する常微分方程式

$$du_n/dt = (u_{n+1} + u_{n-1})/2 - u_n \quad (n=1,2,\dots,N) \quad (14')$$

である。ただし、境界条件は前と同じで、

$$u_0 = u_{N+1} = 0 \quad (16)$$

とする。

ところで、(18),(19)が成り立ち、また $dx/dt = \lambda x$ の解は $x(t) = x(0)\exp \lambda t$ だから、(14')の解は

$$u(t) = \sum \exp(\lambda_n t) \langle u(0), e^n \rangle e^n \\ = \exp \lambda_1 t \langle u(0), e^1 \rangle e^1 + \exp \lambda_2 t \langle u(0), e^2 \rangle e^2 + \dots + \exp \lambda_N t \langle u(0), e^N \rangle e^N$$

この右辺を行列 $P(t) = (P_{ij}(t))_{i,j=1,2,\dots,N}$ を導入して、

$$u(t) = P(t)u(0)$$

と書くことにする。この行列 $P(t)$ を方程式(14')の基本解という。

定理1 (14')の基本解 $P(t)$ の各成分は、

$$P_{ij}(t) = \sum \exp(\lambda_n t) e^{n_i} e^{n_j} \\ = 2 \sum \exp(\lambda_n t) \sin(n_i \pi / (N+1)) \sin(n_j \pi / (N+1)) \quad (20)$$

で与えられ、以下の性質が成り立つ。

- (i) $P_{ij}(t) \geq 0$.
- (ii) $P_{i1}(t) + P_{i2}(t) + \dots + P_{iN}(t) \leq 1 \quad (i=1, 2, \dots, N)$.
- (iii) $\sum P_{in}(t) P_{nj}(s) = P_{ij}(t+s) \quad (t, s \geq 0)$.
- (iv) $\sum P_{nn}(t) = \sum \exp(\lambda_n t)$

これらの性質を(19)から計算で導こうとすると、かなり面倒であるが、方程式(14')を見直すと、以下のように簡単に示すことができる。

定理の証明 まず、

$$x_n = u_n \exp t$$

とおくと、(14')より、

$$dx_n/dt = 2^{-1} (x_{n+1} + x_{n-1}) \quad (n=1,2,\dots,N)$$

これから、 $x_n(t) = \sum_k (t^k/k!) \sum_j 2^{-k} {}_k C_j x_{n-2j+k}(0)$

となり、二項係数は ${}_k C_j = k!/(j!(k-j)!)$ で、 $x_n(0) = u_n(0)$ だから、

$$u_n(t) = \exp(-t) x_n(t) = \sum_k \sum_j \frac{t^k \exp(-t)}{2^k j! (k-j)!} u_{n-2j+k}(0) \quad (21)$$

ただし、和は $k \geq 0, 0 \leq j \leq k, 1 \leq n-2j+k \leq N$ の範囲でとる。(21)で、とくに、

$$u_n(0) = 0 \quad (n \neq j); u_j(0) = 1$$

とすれば、

$$u_n(t) \geq 0.$$

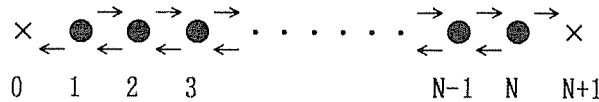
一方、行列 $P(t)$ の定義より、 $u_n(t) = P_{nj}(t)$ 。ゆえに、 $P_{nj}(t) \geq 0$ 。これで、(i)が示された。

次に、 $u_n(0) = 1 \quad (1 \leq n \leq N)$ とすれば、二項係数 ${}_k C_j = k!/(j!(k-j)!)$ の j についての和が 2^k だから、 $u_n(0) \leq 1$ 。よって、(ii)。また、 $u(t+s) = P(t)P(s)u(0)$ であることに注意すれば、(iii)が得られる。最後に、(iv)は、定義式(20)を $i=j$ として i について足し合わせれば、 $\sum_i e^{n_i} e^{n_i} = 1$ より得られる。□

§ 4 離散版熱方程式と酔歩

前ページの補題1の性質(i),(ii),(iii)から、 $P_{ij}(t)$ ($1 \leq i, j \leq N$)に対して、次のような粒子がランダムに集合 $\{1, 2, \dots, N\}$ を跳び回るという確率論的な解釈ができる。

- (i') $P_{ij}(t)$ は時刻 $t=0$ に点 i にいた粒子が t 時間後に点 j にいる確率で、
- (ii') $Q_i(t) = 1 - \{P_{i1}(t) + P_{i2}(t) + \dots + P_{iN}(t)\}$ は粒子が(点 0 または $N+1$ に跳んで、我々の世界 $\{1, 2, \dots, N\}$ から)消滅する確率であり、
- (iii') 時刻 $s > 0$ に点 i にいた粒子が時刻 $t+s$ に点 j にいる確率は、時刻 s までの履歴によらず、 $P_{ij}(t)$ に等しい。



集合 $\{1, 2, \dots, N\}$ 上の酔歩 (点 0, $N+1$ は吸収壁)

このようなランダムな粒子の運動を(連続時間の)酔歩(random walk)といい、 $P_{ij}(t)$ を推移確率という。また、点 0, $N+1$ は吸収壁であるという。(これはディリクレ境界条件に対応する。)

なお、酔歩は、入門書で次のように記述されていることが多い。

酔歩の時刻 t における場所を $X(t)$ とすると、

- (a) $P\{X(t+h)=i \mid X(t)=i\} = 1-h+O(h)$ ($h \rightarrow 0$)
- (b) $P\{X(t+h)=i+1 \mid X(t)=i\} = P\{X(t+h)=i-1 \mid X(t)=i\} = h/2+O(h)$ ($h \rightarrow 0$)
- (c) 条件 $X(t)=i$ のもとで、時刻 t までの履歴 $X(s)$ ($s < t$) と未来 $X(s)$ ($s > t$) とは独立。

このような酔歩に関して次のような問題がある。(時間に余裕があれば、触れる予定である。)

問題 点1から出発して、点 N に到達する時間 T_n の分布を求めよ。また、 $T_n = \infty$ となる(つまり、点 N に到達できない)確率を求めよ。

以上、少々大変な計算を実行してきたが、次のような事実が離散版熱方程式についてわかった。

(I) 熱方程式の解 $u(t)$ は固有関数展開できる。とくに、その基本解(つまり、 $u(t) = P(t)u(0)$ をみたす行列) $P(t)$ に対して、その跡(trace) $\sum P_{nn}(t)$ は固有値 λ_n を用いて次のように表示できる。

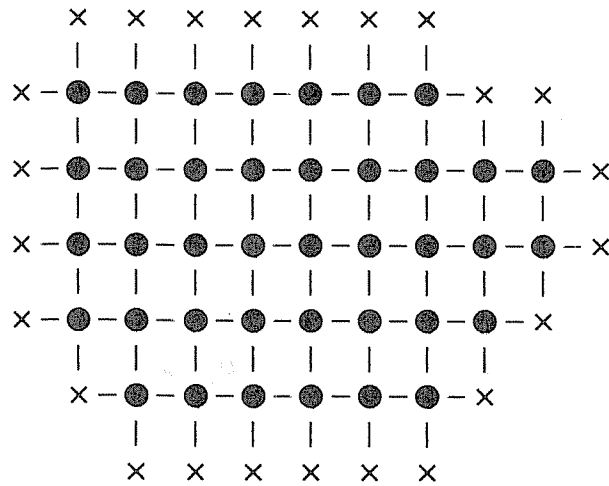
$$\sum P_{nn}(t) = \sum \exp(-\lambda_n t)$$

(II) 酔歩の推移確率 $P_{ij}(t)$ は熱方程式をみたし、推移確率行列 $P(t) = (P_{ij}(t))$ $i, j = 1, 2, \dots, N$ は熱方程式の基本解と一致する。

もうひとつ、上の具体的な計算結果(21)を注意深く見直せば、次のこともわかる。

(III) 数直線上の格子点全体の上で酔歩を考えることができる。(このときは、推移確率の和は、 $\sum_n P_{in}(t) = 1$ となる。)この酔歩を、点 0 または $N+1$ に初めて到達したときに粒子を消滅させることにすると、集合 $\{1, 2, \dots, N\}$ 上の酔歩が得られる。

全く同様のことが、平面上の格子点の集合の上の熱方程式と酔歩についても成り立つ。



平面領域上の酔歩 (吸収壁)

問 前ページと同様の結果は、次の長方形上の離散版熱方程式についても成り立つことを確かめよ。

$$du_{i,j}/dt = (\Delta u)_{i,j} \quad (1 \leq i \leq N_1, 1 \leq j \leq N_2)$$

ただし、

$$\begin{aligned} (\Delta u)_{i,j} &= (u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1})/4 - u_{i,j}, \\ u_{i,j} &= 0 \quad (i=0, i=N_1+1, j=0, j=N_2+1 \text{ のとき}) \end{aligned}$$

とする。

このとき、(III)に相当する性質は重要であり、これによって、2つの領域 D_1, D_2 の間に包含関係があるとき、2つの酔歩を比較することが出来、したがって、2つの熱方程式の解も比較でき、ゆえに、固有値 $\lambda_n(D_1), \lambda_n(D_2)$ についても、和 $\sum \exp(-\lambda_n t)$ を用いて、比較が可能となる。

なお、以下では扱わないが、同様の結果は他の境界条件のもとでも成り立つ。例えば、

$$(u_{n+1} + u_{n-1})/2 - u_n = \lambda u_n \quad (n=1, 2, \dots, N)$$

において、上で考えた

(a) $u_0 = u_{N+1} = 0$

の場合以外にも、

(b) $u_0 = u_1, u_N = u_{N+1}$

の場合 (反射壁酔歩)、また、より一般の場合

(c) $u_0 \cos \alpha + u_1 \sin \alpha = 0, u_N \cos \beta + u_{N+1} \sin \beta = 0$

を考えることもできる。

問 上のことを確かめてみよ。

§ 5 熱方程式の固有関数展開とブラウン運動

平面の有界な領域 D で、その境界 C 上にディリクレ条件を課した熱方程式

$$\begin{aligned} u_t &= (1/2)\Delta u && (D \text{ 内で}) \\ u &= 0 && (C \text{ 上で}) \\ u &= u_0 && (t = 0) \end{aligned} \tag{22}$$

および、固有値問題

$$\begin{aligned} (1/2)\Delta u &= -\lambda u && (D \text{ 内で}) \\ u &= 0 && (C \text{ 上で}) \end{aligned} \tag{23}$$

を考える。

これらの問題に対して、(少なくとも、境界 C が滑らかな閉曲線ならば、) 以下のように、離散版熱方程式と類似の結果が成り立つことが知られている。(もちろん、厳密な数学として示すためにはかなりの準備と労力が必要であるが、ここでは、離散版からの類比により結果を直観的に理解することを目標とする。)

定理2 固有値問題(23)に対して、可算無限個の固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots$ と固有関数 u_1, u_2, u_3, \dots が存在し、すなわち、

$$(1/2)\Delta u_n = -\lambda_n u_n \quad (D \text{ 内で}), \quad u_n = 0 \quad (C \text{ 上で}) \quad (n=1, 2, \dots)$$

が成り立ち、以下の性質をみだす。

(i) $0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots \leq \lambda_n \rightarrow \infty$.

(ii) 任意の連続関数 u は

$$u = c_1 u_1 + c_2 u_2 + c_3 u_3 + \dots \tag{24}$$

と展開される。ここで、係数 c_n は次式で与えられる。

$$c_n = \langle u, u_n \rangle$$

ただし、2つの連続関数 f, g に対して、内積は

$$\langle f, g \rangle = \int \int_D f(x, y) g(x, y) dx dy$$

と定め、固有関数は次のように規格化しておく。

$$\langle u_n, u_n \rangle = 1, \quad \langle u_n, u_m \rangle = 0 \quad (n \neq m). \tag{25}$$

注意 (24)および次の(27)の展開は、2乗平均の意味で成り立つ。つまり、

$$\int \int_D (u - c_1 u_1 - c_2 u_2 - c_3 u_3 - \dots - c_n u_n)^2 dx dy \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

定理3 (a) 熱方程式(22)は、基本解 $p(t, x, y, a, b)$ をもつ。したがって、初期値 $u_0(x, y)$ が有界連続関数のとき、解 $u(t, x)$ で有界連続なものは(ただ1つで)、次式で与えられる。

$$u(t, x, y) = \int \int_D p(t, x, y, a, b) u_0(a, b) da db \tag{26}$$

(b) 基本解は次のように固有関数展開される。

$$p(t, x, y, a, b) = \sum_n u_n(x, y) u_n(a, b) \exp(-\lambda_n t) \tag{27}$$

さらに、以下の性質が成り立つ。

(i) $p(t, x, y, a, b) \geq 0$.

(ii) D の各点 (x, y) に対して、 $\int \int_D p(t, x, y, a, b) da db \leq 1$.

(iii) $\int \int_D p(s, x, y, x', y') p(t, x', y', a, b) dx' dy' = p(t+s, x, y, a, b) \quad (t, s \geq 0)$.

(iv) $\int \int_D p(t, a, b, a, b) da db = \sum_n \exp(-\lambda_n t)$.

注意 領域 D が平面全体の場合の基本解は、

$$g(t,x,y,a,b) = \frac{1}{2\pi t} \exp\left(-\frac{(x-a)^2+(y-b)^2}{2t}\right) \quad (28)$$

である。

問 (25)および(i)-(iii)に相当する式が成り立つことを直接計算して確かめよ。

注意 しかし、この場合は(iv)の左辺に相当する積分は発散する。

前ページで述べた性質(i)-(iii)から予想されるとおり、 $p(t,x,y,a,b)$ に対応して、点 (x,y) から出発して平面上をランダムに動き回る運動が存在する。つまり、その点の時刻 t における位置を $Z(t)$ とすれば、以下のように、酔歩の場合と同様な性質が成り立つ。

(i') $Z(t)$ が部分集合 A にいる確率は、 $\iint_A p(t,x,y,a,b)dadb$ 。

(ii') $q(t,x,y) = 1 - \iint_D p(t,x,y,a,b)dadb$ はこの点が(領域 D の境界 C に到達して、我々の世界 D から)消滅する確率である。

(iii') 時刻 $s>0$ に点 (x,y) にいた粒子が時刻 $t+s$ に A にいる確率は、時刻 s までの履歴によらず、 $\iint_A p(t,x,y,a,b)dadb$ に等しい。

このようなランダムな運動は、 D 上の吸収壁ブラウン運動と呼ばれている。また、 $p(t,x,y,a,b)$ は推移確率密度関数という。

吸収壁ブラウン運動

これから、定理2および定理3より、離版熱方程式と酔歩に関して§4でまとめた事実のうちの(I),(II)は、熱方程式とブラウン運動についても成り立つことがわかる。また、(III)も同様に成り立つ。これを少し丁寧に述べよう。

以下、領域 D 上の吸収壁ブラウン運動 $Z(t)$ が D の境界 C に到達して消滅するまでの時間を S で表し、消滅後は”天国”にいると考えることにして、

$$t \geq S \text{ のとき、 } Z(t) = \infty \quad (29)$$

と書く。また、上の注意の $g(t,x,y,a,b)$ に対応して、平面全体の上のブラウン運動も存在する。これを $B(t)$ と表すことにする。

定理4 $B(t)$ が領域 D の境界 C に初めて到達する時刻 T_c をとして、

$$Z(t) = \begin{cases} B(t) & (t < T_c) \\ \infty & (t \geq T_c) \end{cases} \quad (30)$$

とすると、 $Z(t)$ は領域 D 上の吸収壁ブラウン運動である。

§ 6 基本解の短時間漸近挙動とワイルの公式

この節では、基本解に添え字を付けて、考えている領域 D を明示する。

領域 D 上の吸収壁ブラウン運動の推移確率密度関数を $p_D(t, x, y, a, b)$ として、積分

$$\int \int_D p(t, a, b, a, b) da db$$

が $t \rightarrow 0$ のとき、どのような振る舞い方をするかを、つまり、漸近挙動を調べる。実は、これが今回のお話の本題である。

既に見たように、この積分は

$$\sum_n \exp(-\lambda_n t)$$

に等しいから、その漸近挙動から、 λ_n の $n \rightarrow \infty$ のときの漸近挙動が導かれてもてもそう不思議ではないだろう。

まず、前節の定理 4 を利用して、基本解の間の比較定理を導こう。

定理 5 有界領域 D 上、 D の部分領域 Q 上、平面全体での熱方程式の基本解をそれぞれ、

$$p_D(t, x, y, a, b), \quad p_Q(t, x, y, a, b), \quad g(t, x, y, a, b)$$

とすると、 $(x, y), (a, b)$ が Q の内部の点のとき、不等式

$$p_Q(t, x, y, a, b) \leq p_D(t, x, y, a, b) \leq g(t, x, y, a, b) \quad (31)$$

が成り立つ。さらに、 $t \rightarrow 0$ のとき、(Q 内の有界閉集合上で一様に)

$$p_Q(t, x, y, a, b) / g(t, x, y, a, b) \rightarrow 1. \quad (32)$$

証明 前半の(31)は、熱方程式の基本解はブラウン運動の推移確率密度に等しいから、定理 4 より、あきらか。

後半の(32)を示すには、不等式(31)から、 Q を小さく選んで証明すれば十分だから、 Q として、 D に含まれ、辺が座標軸に平行な小正方形をとり、その左下の頂点を (x_0, y_0) 、一辺の長さを r とする。

このとき、 Q を平行移動して、左下の頂点が原点で、一辺の長さ r の正方形を R を考えれば、

$$p_Q(t, x, y, a, b) = p_R(t, x-x_0, y-y_0, a-x_0, b-y_0).$$

また、 R 上の吸収壁ブラウン運動の推移確率密度 $p_R(t, x, y, a, b)$ は具体的に、次の級数表示をもつ。

$$p_R(t, x, y, a, b) = \sum (-1)^{n+m} g(t, x, y, a^n, b^m). \quad (33)$$

ただし、和はすべての整数 n, m についてとり、

$$\begin{cases} a_2^n = a + 2nr, & a_2^{n+1} = 2(n+1)r - a \\ b_2^m = b + 2mr, & b_2^{m+1} = 2(m+1)r - a \end{cases} \quad (34)$$

とする。

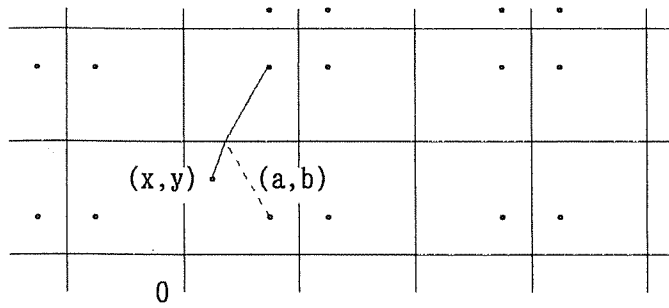
この表式(33)と、 $g(t, x, y, a, b)$ の形(28)から、容易に、

$$p_R(t, x, y, a, b) / g(t, x, y, a, b) \rightarrow 1$$

がわかる。ゆえに、一般に、(32)が成り立つ。□

問 前ページの(33)を証明せよ。

問 前ページの(33)を証明せよ。



鏡映原理

さて、いよいよ我々の目標のカッツの結論 (の一部) に到達する。

定理6 滑らかな境界 C をもつ有界な領域 D に対して、 $t \rightarrow 0$ のとき、

$$\int \int_D p_D(t, a, b, a, b) da db \sim (2\pi t)^{-1} \text{Area}(D) \quad (35)$$

つまり、

$$2\pi t \int \int_D p_D(t, a, b, a, b) da db \rightarrow \text{Area}(D) \quad (35')$$

証明 左辺の積分に対して、2つの評価

(A) 上からの評価

(B) 下からの評価

を与えることにより、(35)を証明する。

(A) 上からの評価 定理5の不等式(31)で、 $(x, y) = (a, b)$ とすれば、

$$p_D(t, a, b, a, b) \leq g(t, a, b, a, b) = (2\pi t)^{-1}$$

したがって、

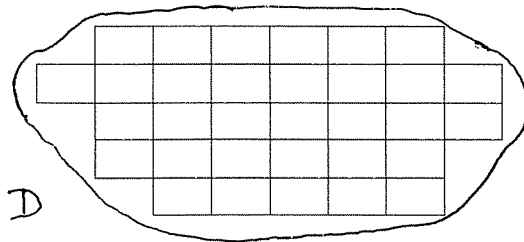
$$2\pi t \int \int_D p_D(t, a, b, a, b) da db \leq \int \int_D da db \leq \text{Area}(D). \quad (35A)$$

(B) 下からの評価 正数 r を十分小さくとり、領域 D の内部を1辺 r の正方形

$$Q(1), Q(2), \dots, Q(m)$$

および残りの部分に分割し、 $D(r)$ をこれらの正方形の和集合とすると、

$$\begin{aligned} \text{Area}(D(r)) &= \text{Area}(Q(1)) + \text{Area}(Q(2)) + \dots + \text{Area}(Q(m)) \\ &\geq \text{Area}(D) - r \cdot \text{Length}(C). \end{aligned} \quad (36)$$



ここで、定理5の不等式(31)を用いると、

$$\begin{aligned} & \int \int_D p_D(t, a, b, a, b) da db \\ & \geq \int \int_{Q(1)} p_D(t, a, b, a, b) da db + \dots + \int \int_{Q(m)} p_D(t, a, b, a, b) da db \\ & \geq \int \int_{Q(1)} p_{Q(1)}(t, a, b, a, b) da db + \dots + \int \int_{Q(m)} p_{Q(m)}(t, a, b, a, b) da db \\ & = m \int \int_{Q(1)} p_{Q(1)}(t, a, b, a, b) da db \end{aligned}$$

次に、(32)を用いると、 $t \rightarrow 0$ のとき、

$$\begin{aligned} \int \int_{Q(1)} p_{Q(1)}(t, a, b, a, b) da db & \sim \int \int_{Q(1)} g(t, a, b, a, b) da db \\ & = \int \int_{Q(1)} (2\pi t)^{-1} da db \\ & = (2\pi t)^{-1} \text{Area}(Q(1)) \end{aligned}$$

よって、(36)より、

$$\begin{aligned} & \liminf_{t \rightarrow 0} 2\pi t \int \int_D p_D(t, a, b, a, b) da db \\ & \geq m \cdot \text{Area}(Q(1)) = \text{Area}(D(r)) \\ & \geq \text{Area}(D) - r \cdot \text{Length}(C). \end{aligned}$$

ここで、 r は任意に選べるから、

$$\liminf_{t \rightarrow 0} 2\pi t \int \int_D p_D(t, a, b, a, b) da db \geq \text{Area}(D). \quad (35B)$$

ゆえに、(35A)、(35B)を合わせれば、求める結論(35)が得られる。□

定理6を言い換えれば、固有値 λ_n に関する情報が得られる。

定理6' 滑らかな境界 C をもつ有界な領域 D に対して、 $t \rightarrow 0$ のとき、

$$\sum_n \exp(-\lambda_n t) \sim (2\pi t)^{-1} \text{Area}(D). \quad (35')$$

定理6' を認めると、ワイルの公式を示すためには、§6の最初に述べた2つの漸近挙動

$$\begin{aligned} (a) \quad N(\lambda) &= \text{大きさが } \lambda \text{ 未満の固有値 } \lambda_n \text{ の数} & \lambda \rightarrow \infty \\ (b) \quad \sum_n \exp(-\lambda_n t) & & t \rightarrow 0 \end{aligned}$$

の関係を確かめればよい。

以下、

$$\sum_n \exp(-\lambda_n t) = \int \exp(-\lambda t) dN(\lambda) \quad (31)$$

と書く。

定理7 (A) $N(\lambda) = 0$ ($\lambda \leq 0$)で、 $N(\lambda)$ が増加関数関数のとき、定数 K に対して、

$$N(\lambda) \sim K\lambda \quad (\lambda \rightarrow \infty) \quad (32)$$

が成り立てば、

$$\int \exp(-\lambda t) dN(\lambda) \sim K/t \quad (t \rightarrow 0). \quad (33)$$

(T) 逆に、(32)が成り立つならば、(適当な条件のもとで) (33)が成り立つ。

上の(A)をアーベル型の定理、(T)をタウバー型の定理という。

例 $N(\lambda) = K\lambda$ ($\lambda > 0$); $= 0$ ($\lambda \leq 0$) のとき、 $\int \exp(-\lambda t) dN(\lambda) = K/t$ ($t > 0$)。

この定理7を認めれば、ワイルの公式(13)が定理6' より、ただちに導かれる。

§ 7 2つの漸近挙動をつなげる

定理7のうち、やさしい方の(A)を証明しておこう。

まず、 $(0, \infty)$ 上での指数関数の積分に関する恒等式

$$t \int_0^{\infty} \exp(-\lambda t) d\lambda = 1, \quad t \int_0^{\infty} \lambda \exp(-\lambda t) d\lambda = 1/t$$

を思い出しておこう。

さて、部分積分を用いると、

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} \exp(-\lambda t) dN(\lambda) - K/t \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \{ \exp(-Rt)N(R) - N(0) + t \int_0^R \exp(-\lambda t)N(\lambda) d\lambda \} - K/t \\ &= t \int_0^{\infty} N(\lambda) \exp(-\lambda t) d\lambda - K/t \\ &= t \int_0^{\infty} (N(\lambda) - K\lambda) \exp(-\lambda t) d\lambda. \end{aligned}$$

ここで、 $R > 0$ をとめておけば $t \int_0^R \exp(-\lambda t) d\lambda \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow \infty)$

となることを用いると、

$$N(\lambda)/\lambda \rightarrow K \quad (\lambda \rightarrow \infty) \text{ のとき、} \quad t \int_0^{\infty} \exp(-\lambda t) dN(\lambda) \rightarrow K \quad (t \rightarrow \infty)$$

がわかる。□

なお、アーベル型定理とタウバー型定理には、(32)において $K\lambda$ を $K\lambda^2$ に変えるなど、さまざまな精密化や一般化がある。

最後に、重要な注意と例を1つ紹介しておこう。

まず、極限のとり方を入れ替えると、 $N(\lambda)$ の $\lambda \rightarrow 0$ のときの漸近挙動と積分 $\int_0^{\infty} \exp(-\lambda t) dN(\lambda)$ の $t \rightarrow \infty$ のときの漸近挙動とが対応する。

定理7' (A) $N(\lambda) = 0 \quad (\lambda \leq 0)$ で、 $N(\lambda)$ が増加関数関数のとき、定数 K に対して、

$$N(\lambda) \sim K\lambda \quad (\lambda \rightarrow 0) \tag{32'}$$

が成り立てば、

$$\int_0^{\infty} \exp(-\lambda t) dN(\lambda) \sim K/t \quad (t \rightarrow \infty). \tag{33'}$$

(T) 逆に、(32')が成り立つならば、(適当な条件のもとで) (33')が成り立つ。

例 (スターリングの公式) $n! = \int_{x>0} x^n e^{-x} dx \sim (2\pi n)^{1/2} n^n e^{-n} \quad (n \rightarrow \infty)$.

左辺の積分は、 $x=ny$ と変数変換すれば、

$$\begin{aligned} n! &= n^{n+1} \int_{x>0} y^n e^{-ny} dy = n^{n+1} \int_{y>0} (ye^{-y})^n dy \\ &= n^{n+1} e^{+n} \int_{y>0} \exp(-nf(y)) dy \end{aligned}$$

ただし、

$$f(y) = y - \log y - 1$$

ここで、関数 $f(y)$ は、2つの区間 $0 < y < 1$ および $y > 1$ でそれぞれ単調減少、単調増大で、その値域はともに区間 $(0, \infty)$ 全体である。また、

$$f'(y) = 1 - y^{-1}, \quad f''(y) = y^{-2} \quad \text{とくに、} \quad f'(1) = 0, \quad f''(1) = 1.$$

よって、

$$f(y) = (1/2)\lambda^2, \quad \lambda > 0 \leftrightarrow y > 1, \quad \lambda < 0 \leftrightarrow y < 1$$

と変数変換し、 $y = N(\lambda)$ と書くと、 $N'(0)=1$ で、

$$n! = \int_{x>0} x^n e^{-x} dx = n^{n+1} e^{+n} \int \exp(-n\lambda^2/2) dN(\lambda)$$

したがって、これまでの議論から、 $n \rightarrow \infty$ のときの右辺の積分の漸近挙動は、 $\lambda \rightarrow 0$ のときの $N(\lambda)$ の挙動からきまることが予想される。

ここで、等式

$$\int \exp(-n\lambda^2/2) d\lambda = n^{-1/2} \int \exp(-\lambda^2/2) d\lambda = n^{-1/2} (2\pi)^{1/2}$$

を思い起こせば、求める公式

$$n! = \int_{x>0} x^n e^{-x} dx \sim (2\pi n)^{1/2} n^n e^{-n} \quad (n \rightarrow \infty).$$

が予想できることになる。(この着想にそって厳密な証明を与えるのは、それほど難しくなく、実際、ラプラスはこれを実行して、スターリングの公式に最初の証明を与えた。)

参考文献

1. Mark Kac の原論文 ” Can one hear the shape of a drum” は
American Mathematical Monthly vol.73(1966), 1-23
に掲載されたもので、物理学者 G.E.Uhlenbeck に捧げられている。
2. 漸近挙動に関する教科書 (Dover より、廉価本が再版されている)
Erdelyi, Asymptotic Expansions

この公開講座をもとにして次の本が出版されている。

漸近挙動入門——太鼓の形を聴くために 日本評論社 2002