

数 学 入 門 公 開 講 座

平成9年8月4日(月)から8月8日(金)まで

京都大学数理解析研究所

講師及び内容

1. 代数曲面の世界 (6時間 15分)

京都大学数理解析研究所・助教授 中山 昇

2変数の多項式 $F(X, Y)=0$ で定義された図形というと、たとえば

$$F(X, Y)=(X/a)^2+(Y/b)^2-1=0, F(X, Y)=Y-X^2=0, F(X, Y)=XY-1=0, \dots$$

など、楕円、放物線、双曲線、といろいろ思い浮かびますが、代数幾何学ではもっと一般に n 変数の k 個の多項式

$$F_1(X_1, X_2, \dots, X_n), F_2(X_1, X_2, \dots, X_n), \dots, F_k(X_1, X_2, \dots, X_n)$$

の共通零点集合を研究しています。たとえば $XY=Z^3+W^3=1$ で定義される図形は K3 曲面という名前の曲面の 1 部分になります。代数曲線、代数曲面はこのような図形 (代数多様体) の中でそれぞれ 1 次元、2 次元のものです。代数曲線は種数によって大きく性格が異なります。代数曲面では種数だけでは足りなくて小平次元を考えます。今回は代数曲面の小平次元による分類の概略を紹介します。

2. 数値積分と複素関数論 (6時間 15分)

京都大学数理解析研究所・教授 森 正武

台形公式、シンプソン公式、ガウス公式などはコンピュータ出現のはるか以前に確立した数値積分の基本的な手法であり、その後、数学解析の対象としては比較的地味な存在であった。しかし、解析の道具として複素関数論を導入すると、状況は一変する。各々の公式は複素対数関数の有理関数近似によって導かれ、また誤差解析もグラフィックスと組み合わせて魅力ある対象となる。さらに、新しい強力な数値積分公式を次々と創り出すことができる。

この講義では、数値積分と複素関数論という二つの古典的テーマにコンピュータを組み合わせ、て実を結んだ、応用数理の新しい成果を紹介する。

3. 「超対称性の物理と数学」 (6時間 15分)

京都大学数理解析研究所・助教授 河合 俊哉

超対称性 (supersymmetry) とはボゾン (互いに可換な粒子) とフェルミオン (互いに反可換な粒子) の間に成り立つ対称性であり、現在の理論物理の様々な分野で活躍している。また数学との関係も極めて密接である。本講座では、この超対称性の入門的解説を中心に行なうとともに、その応用にも触れたいと思っている。

時 間 割

日	8月 4日 (月)	5日 (火)	6日 (水)	7日 (木)	8日 (金)
時 間					
10:30~11:45	中山	中山	中山	中山	中山
11:45~13:00	休 憩				
13:00~14:15	森	森	森	森	森
14:15~14:45	休 憩				
14:45~16:00	河合	河合	河合	河合	河合

数値積分と複素関数論

京都大学数理解析研究所・教授 森 正 武

1997, AUGUST 4, 5, 6, 7, 8, 13:00 ~ 14:15

平成9年度数学入門公開講座

数値積分と複素関数論

京都大学数理解析研究所 森正武

台形公式, Simpson 公式, Legendre-Gauss 公式などはコンピュータ出現のはるか以前に確立した数値積分の基本的な手法であり, その後, 数学解析の対象としては比較的地味な存在であった. しかし, 解析の道具として複素関数論を導入すると, 状況は一変する. 各々の公式は複素対数関数の有理関数近似によって導かれ, また誤差解析もグラフィックスと組み合わせると魅力ある対象となる. さらに, 新しい強力な数値積分公式を次々と創り出すことができる. ここでは, 数値積分と複素関数論という二つの古典的テーマにコンピュータを組み合わせると実を結んだ, 応用数理の新しい成果を紹介する.

§1. 数値積分と誤差の特性関数

有限区間 (a, b) における関数 $f(x)$ の積分が与えられたとする.

$$I = \int_a^b f(x) dx \quad (1.1)$$

この積分を, 分点が a_k でそこでの重みが A_k の, 次のような数値積分公式で計算するとしよう.

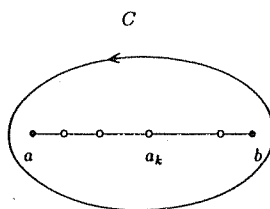
$$I_n = \sum_{k=1}^n A_k f(a_k) \quad (1.2)$$

n 点で関数値を計算するので, このような積分公式を, n 点公式という.

被積分関数 $f(z)$ は端点 a, b も込めて区間 $[a, b]$ を内部に含む z 平面のある領域で正則であると仮定する. そこで, Cauchy の積分公式

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{1}{z-x} f(z) dz \quad (1.3)$$

を利用することにしよう. ただし, 積分路 C は, 図 1 に示すような, 両端点を含む区間 $[a, b]$ およびすべての分点 $a_k, k=1, 2, \dots, n$ を正の向きに囲む閉曲線で, その内部には $f(z)$ の特異点を含まないようにとる. (1.3) を (1.1) に代入して, 積分の順序を交換すると

図 1: 積分路 C

$$I = \frac{1}{2\pi i} \int_C \Psi(z) f(z) dz, \quad (1.4)$$

$$\Psi(z) = \int_a^b \frac{1}{z-x} dx = \log \frac{z-a}{z-b} \quad (1.5)$$

となる. また, (1.3) を (1.2) に代入すると

$$I_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \Psi_n(z) f(z) dz, \quad (1.6)$$

$$\Psi_n(z) = \sum_{k=1}^n \frac{A_k}{z - a_k} \quad (1.7)$$

が得られる. 関数 $\Psi_n(z)$ は有理関数で, 右辺を通分すると

$$\Psi_n(z) = \frac{G_n(z)}{F_n(z)} \quad (1.8)$$

となる. ただし, $F_n(z)$ は n 次多項式

$$F_n(z) = (z - a_1)(z - a_2) \cdots (z - a_n) \quad (1.9)$$

であり, $G_n(z)$ はたかだか $n - 1$ 次の多項式である.

したがって, 数値積分の誤差は

$$\Delta I_n = I - I_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \Phi_n(z) f(z) dz \quad (1.10)$$

$$\Phi_n(z) = \Psi(z) - \Psi_n(z) = \log \frac{z - a}{z - b} - \sum_{k=1}^n \frac{A_k}{z - a_k} \quad (1.11)$$

と書くことができる. 複素関数 $\Phi_n(z)$ は, 積分 I の上下限と数値積分公式 I_n の分点と重みだけから定まり, 被積分関数 $f(z)$ には依存しない. $\Phi_n(z)$ を数値積分公式 (1.2) の誤差の特性関数という.

例として, 積分

$$I = \int_{-1}^1 f(x) dx \quad (1.12)$$

を考える. この積分に対して, 区間 $(-1, 1)$ を 20 等分して刻み幅を $h = 0.1$ にとった 21 点 Simpson 公式の $|\Phi_n(z)|$ の等高線図を図 2 (a) に, また 8 次 Legendre-Gauss 公式の $|\Phi_n(z)|$ の等高線図を図 2 (b) に示した. これらの図は, 複素平面の領域 $-4 \leq \operatorname{Re} z \leq 4$, $-4 \leq \operatorname{Im} z \leq 4$ のそれぞれの辺を 80 等分して 81×81 の格子点を作り, 各々の格子点において $|\Phi_n(z)|$ の値を計算した後, そのデータを等高線図を描くグラフィックスのプログラムに渡して描いたものである [3, 8]. これらの図にも見られるように, 一般に実用的な数値積分公式の誤差の特性関数 $\Phi_n(z)$ の値は, z が積分区間 $[a, b]$ から離れるにしたがって急速に小さくなる.

§2. 誤差の特性関数による数値積分の誤差評価

誤差の特性関数を利用して実際に数値積分の誤差を評価してみよう. ここでは被積分関数 $f(z)$ が z 平面に 1 位の極 $\zeta_j, j = 1, 2, \dots, m$ をもつ有理関数である場合を考える. そして, 各々の ζ_j における留数が R_j であって, 分母の多項式の次数が分子の多項式の次数よりも適当に高いとする. このとき, (1.10) の誤差は, 積分路 C を区間 $[a, b]$ から遠ざけて留数定理を適用すると, 次のように書くことができる.

$$\Delta I_n = - \sum_{j=1}^m R_j \Phi_n(\zeta_j) \quad (2.1)$$

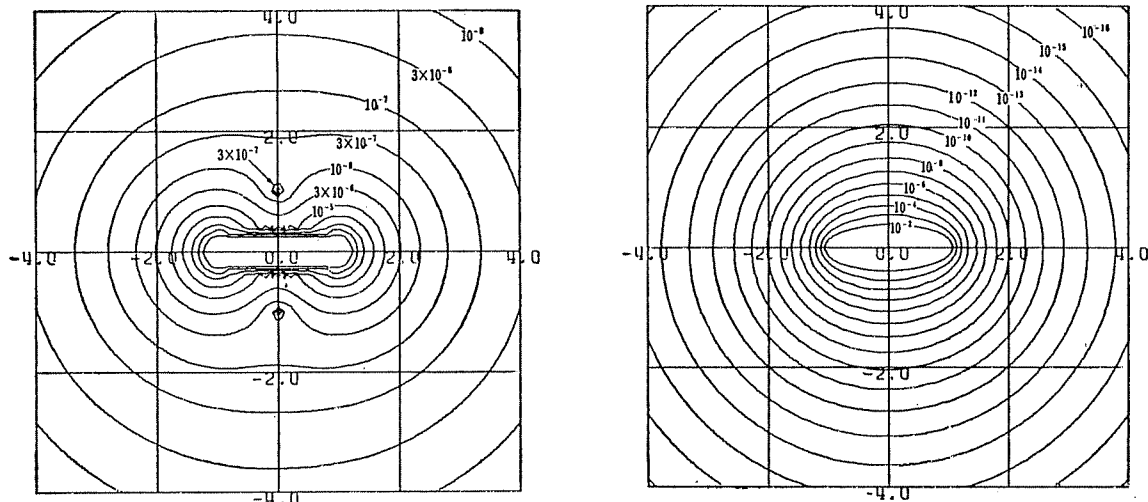


図 2: (a) 21 点 Simpson 公式の $|\Phi_n(z)|$ (b) 8 次 Legendre-Gauss 公式の $|\Phi_n(z)|$

例として, 積分

$$I = \int_{-1}^1 \frac{1}{(x-2)(x^2+1)} dx = -\frac{1}{5}(\log 3 + \pi) = -0.84804 \dots \quad (2.2)$$

を取り上げよう. 被積分関数

$$f(z) = \frac{1}{(z-2)(z^2+1)} \quad (2.3)$$

は, $z = 2, \pm i$ に単純な極をもち, そこでの留数はそれぞれ $1/5$, $(-1 \pm 2i)/10$ である. したがって (2.1) より, いずれの数値積分公式を使うにせよ, その結果の誤差は次のようになる.

$$\Delta I_n = -\frac{1}{5}\Phi_n(2) - \frac{-1+2i}{10}\Phi_n(i) - \frac{-1-2i}{10}\Phi_n(-i) \quad (2.4)$$

実際に次の二つの場合について誤差を評価してみよう. $\Phi_n(2)$ や $\Phi_n(\pm i)$ の絶対値は図 2 から読み取ることができる. なお, 誤差評価自体に要求される有効桁数は, 通常は 1 桁か 2 桁程度である. したがって, われわれの誤差評価に必要なことは, 積分 (1.10) の近似計算である.

(a) 21 点 Simpson 公式

図 2 (a) より, $|\Phi_n(\pm i)| < 3 \times 10^{-7} \ll |\Phi_n(2)| \simeq 3 \times 10^{-6}$ であるから, $z = \pm i$ の極からの寄与は無視できて, 誤差は次のように評価される.

$$|\Delta I_n| \simeq \frac{1}{5}|\Phi_n(2)| \simeq \frac{1}{5} \times 3 \times 10^{-6} = 6 \times 10^{-7} \quad (2.5)$$

(b) 8 次 Legendre-Gauss 公式

図 2 (b) より $|\Phi_n(2)| \simeq 10^{-9} \ll |\Phi_n(\pm i)| \simeq 2 \times 10^{-6}$ であるから, $z = 2$ の極からの寄与は無視できて, 誤差は次のように評価できる.

$$|\Delta I_n| \simeq 2 \times \frac{\sqrt{5}}{10} \times |\Phi_n(\pm i)| \simeq 2 \times 0.22 \times (2 \times 10^{-6}) \simeq 9 \times 10^{-7} \quad (2.6)$$

実際に数値積分を行ってみると, これら二つの評価が実際の誤差をほぼ正しく表していることが確かめられる.

§3. 数値積分公式の導出

図 2 にも見られるように, 一般に, 誤差の特性関数 $\Phi_n(z)$ の値は z が積分区間から離れると急速に 0 に近づく. このことは, z が大きくなるとき (1.7) の $\Psi_n(z)$ が (1.5) の $\Psi(z)$ に急速に近づくことを意味している. したがって, 良い数値積分公式を作る問題は, z が大きいところで $\Psi(z) = \log((z-a)/(z-b))$ を良く近似する有理関数 $\Psi_n(z)$ を求める問題, すなわち対数関数の有理関数近似の問題に置き換えることができる. そこで, 具体的にこの考え方に基づいてよく知られた数値積分公式を導いてみよう.

(a) Newton-Cotes 公式と Chebyshev 公式

対数関数 $\Psi(z) = \log((z-a)/(z-b))$ および (1.7) の有理関数 $\Psi_n(z)$ は, z が大きいところで次のように展開することができる.

$$\Psi(z) = \log \frac{z-a}{z-b} = \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{b^j - a^j}{j} \right) \frac{1}{z^j} \quad (3.1)$$

$$\Psi_n(z) = \sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^n A_k a_k^{j-1} \right) \frac{1}{z^j} \quad (3.2)$$

したがって, 誤差の特性関数は次のように表すことができる.

$$\Phi_n(z) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{d_j}{z^j} \quad (3.3)$$

$$d_j = \frac{b^j - a^j}{j} - \sum_{k=1}^n A_k a_k^{j-1}, \quad j = 1, 2, \dots \quad (3.4)$$

いま, 分点 a_k と重み A_k を, $d_j = 0$, $j = 1, 2, \dots, M+1$, すなわち

$$\sum_{k=1}^n A_k a_k^{j-1} = \frac{b^j - a^j}{j}, \quad j = 1, 2, \dots, M+1 \quad (3.5)$$

をみたすように選んだとすると,

$$\Phi_n(z) = \frac{d_{M+2}}{z^{M+2}} + \frac{d_{M+3}}{z^{M+3}} + \dots \quad (3.6)$$

となる. ここで, 被積分関数 $f(z)$ が M 次の多項式

$$f(z) = \alpha_M z^M + \alpha_{M-1} z^{M-1} + \dots + \alpha_1 z + \alpha_0 \quad (3.7)$$

であるとしよう. すると, $\Phi_n(z)f(z)$ は

$$\Phi_n(z)f(z) = \frac{c_2}{z^2} + \frac{c_3}{z^3} + \dots \quad (3.8)$$

のように, $1/z^2$ のべきから始まることになり, したがって

$$\Delta I_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \Phi_n(z)f(z)dz = 0 \quad (3.9)$$

が成り立って、誤差は 0 になる。つまり、(3.5) のように定めた公式は、被積分関数が M 次までの多項式のとき正しい積分値を与える。このような数値積分公式を、 M 次の公式という。

$a_k, k = 1, 2, \dots, n$ をあらかじめ定めておき、(3.5) を $A_k, k = 1, 2, \dots, n$ に関する n 元連立 1 次方程式とみてこれを解けば、一つの数値積分公式が得られる。例えば、 N を固定した上で、区間 (a, b) を N 等分し、刻み幅 $h = (b - a)/N$ で分点 $a_k = a + (k - 1)h, k = 1, 2, \dots, N + 1$ を等間隔にとった上で $N + 1$ 個の重み $A_k, k = 1, 2, \dots, N + 1$ を (3.5) をみたすように定めれば、一つの $N + 1$ 点公式が得られる。この公式は、 N 次の公式になる。この $N = 1, 2, \dots$ の各々に対応する一連の公式は Newton-Cotes 公式として知られており、そのうち、 $N = 1$ の公式が台形公式、 $N = 2$ の公式が Simpson 公式である。

重み $A_k, k = 1, 2, \dots, n$ の方をあらかじめ定めておき、(3.5) を $a_k, k = 1, 2, \dots, n$ に関する n 元連立非線形方程式とみてこれを解いて定めた公式も存在する。 n を固定して、 $a = -1, b = 1, A_k = 2/n, k = 1, 2, \dots, n$ ととってから、(3.5) をみたすように $a_k, k = 1, 2, \dots, n$ を定めた公式は、Chebyshev 積分公式として知られている。

(b) Legendre-Gauss 公式

Legendre-Gauss 公式は、Legendre 多項式と深い関係をもつことはよく知られている [2]。積分

$$I = \int_{-1}^1 f(x) dx \quad (3.10)$$

の場合、対応する n 次の Legendre-Gauss 公式の分点 a_k は n 次の Legendre 多項式 $P_n(x)$ の n 個の零点で、対応する重みは $2/[(1 - a_k^2)\{P_n'(a_k)\}^2]$ である。一方、Legendre-Gauss 公式は Legendre 多項式の零点を補間点とする Lagrange 補間式

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{P_n(x)}{(x - a_k)P_n'(a_k)} f(a_k) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{P_n(z) - P_n(x)}{(z - x)P_n(z)} f(z) dz \quad (3.11)$$

を $(-1, 1)$ で積分したものであることに注意すると [2], (1.8) はいまの場合

$$\Psi_n(z) = \frac{G_n(z)}{P_n(z)}, \quad (3.12)$$

$$G_n(z) = \int_{-1}^1 \frac{P_n(z) - P_n(x)}{z - x} dx \quad (3.13)$$

と表されることがわかる。また、Legendre 多項式は次の漸化式をみたすことが知られている。

$$\begin{aligned} P_0(z) &= 1, \quad P_1(z) = z, \\ P_n(z) &= \frac{2n-1}{n} z P_{n-1}(z) - \frac{n-1}{n} P_{n-2}(z), \quad n = 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (3.14)$$

$G_n(z)$ の定義から、 $n - 1$ 次多項式である $G_n(z)$ もまた、初期値は異なるが、(3.14) とまったく同じ形の漸化式をみたすことがわかる。

$$\begin{aligned} G_0(z) &= 0, \quad G_1(z) = 2, \\ G_n(z) &= \frac{2n-1}{n} z G_{n-1}(z) - \frac{n-1}{n} G_{n-2}(z), \quad n = 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (3.15)$$

一般に, $P_n(z)$, $G_n(z)$ が同じ形の漸化式をみたす二つの多項式のとき, 有理関数 $G_n(z)/P_n(z)$ は連分数の形に表すことができることが知られており [2], Legendre 多項式の場合には次のようになる.

$$\frac{G_n(z)}{P_n(z)} = \frac{2}{z - \frac{1^2}{3z - \frac{2^2}{5z - \ddots - \frac{(n-1)^2}{(2n-1)z}}}}} \quad (3.16)$$

この有限連分数 $\Psi_n(z)$ の展開を無限に続けければ $\log((z-1)/(z+1))$ に収束することもわかっている [5]. したがって逆に, $\Psi(z) = \log((z+1)/(z-1))$ の連分数展開を第 n 項で打ち切って, それを

$$\Psi_n(z) = \frac{G_n(z)}{P_n(z)} = \sum_{k=1}^n \frac{A_k}{z - a_k} \quad (3.17)$$

の形に部分分数に分解すれば, $2n-1$ 次の Legendre-Gauss 公式の分点 a_k と重み A_k が得られる.

なお, $a = -1$, $b = 1$ において, n を固定して (3.5) を $j = 2n$ までとり, a_k , A_k に関する $2n$ 元の非線形方程式とみなしてこれを解くと, その解が上に述べた $2n-1$ 次の Legendre-Gauss 公式の分点 a_k , A_k に一致することもわかっている [2].

このように, ほとんどすべての既知の数値積分公式が $\log((z-a)/(z-b))$ の何らかの形の有理関数近似から導かれるのである.

われわれは解析関数の数値積分を考えている. 一方, 積分, 数値積分, 数値積分の誤差には, 関数を一つ与えたとき, それぞれある一つの数値が対応する. したがって, 区間 (a, b) を固定するとき, 積分, 数値積分, そして数値積分の誤差は, いまの場合いずれも (a, b) で解析的な関数の集合の上の連続な線形汎関数である. その意味で, これらは佐藤の超関数 [14] と見なすことができる. 実際, $\Phi_n(z)$ は, 定数倍の違いはあるが, 数値積分の誤差という佐藤の超関数の定義関数に他ならない. われわれは, 佐藤の超関数の定義関数という具体的な複素関数を取り扱うことによって, 誤差を評価し, 数値積分公式を導出することができた, ということもできる.

§4. 無限区間の台形公式とその最適性

本節では, 解析関数 $g(u)$ の無限区間 $(-\infty, \infty)$ にわたる積分

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} g(u) du \quad (4.1)$$

を考える. この形の積分に対しては, 刻み幅が一定で無限個の分点をもつ単純な台形公式 (trapezoidal formula)

$$I_T = h \sum_{k=-\infty}^{\infty} g(kh) \quad (4.2)$$

が, ある意味で最適公式になっている. ここでは, この台形公式の最適性について考えてみることにする. なお後で変数変換を行う都合上, $(-\infty, \infty)$ にわたる積分では複素変数として w を使うこ

とにする. (4.1) で $g(u)$ の独立変数を u としているのは, u が複素変数 $w = u + iv$ の実部であることを明示するためである.

(4.1) の被積分関数 $g(w)$ が実軸上 $-\infty < w < \infty$ で解析的であるとすると, 積分 I は

$$I = \frac{1}{2\pi i} \int_{\hat{C}} \hat{\Psi}(w) g(w) dw \quad (4.3)$$

と書くことができる. ただし, $\hat{\Psi}(w)$ は

$$\hat{\Psi}(w) = \begin{cases} -\pi i; & \text{Im } w > 0 \\ +\pi i; & \text{Im } w < 0 \end{cases} \quad (4.4)$$

なる関数であり, 積分路 $\hat{C}$ は図 3 に示すような実軸の上側を左に, 下側を右に走る二つの曲線で, その間に $g(w)$ の特異点が存在しないようにとる. $\hat{C}$ を限りなく実軸に近づければ (4.3) が (4.1) に一致することは明らかであろう. 一方, 台形公式による積分値 I_T は, 留数定理と $\cot$ 関数の部分

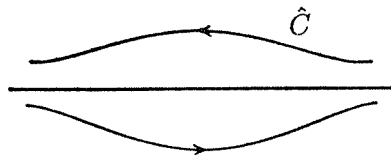


図 3: 積分路 $\hat{C}$

分数分解を使って

$$\begin{aligned} I_T &= h \sum_{k=-\infty}^{\infty} g(kh) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\hat{C}} h \left(\frac{1}{w} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{w - kh} + \frac{1}{w + kh} \right) \right) g(w) dw \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\hat{C}} \hat{\Psi}_T(w) g(w) dw \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$\hat{\Psi}_T(w) = \pi \cot \frac{\pi}{h} w = \pi i \frac{\exp(\frac{\pi i}{h} w) + \exp(-\frac{\pi i}{h} w)}{\exp(\frac{\pi i}{h} w) - \exp(-\frac{\pi i}{h} w)} \quad (4.6)$$

と書ける. したがって, 台形公式 (4.2) の誤差は, 結局次のような複素積分で表現することができる.

$$\Delta I_T = I - I_T = \frac{1}{2\pi i} \int_{\hat{C}} \hat{\Phi}_T(w) g(w) dw \quad (4.7)$$

ここで, $\hat{\Phi}_T(w)$ は

$$\hat{\Phi}_T(w) = \hat{\Psi}(w) - \hat{\Psi}_T(w) = \begin{cases} \frac{-2\pi i}{1 - \exp(-\frac{2\pi i}{h} w)}; & \text{Im } w > 0 \\ \frac{+2\pi i}{1 - \exp(+\frac{2\pi i}{h} w)}; & \text{Im } w < 0 \end{cases} \quad (4.8)$$

で定義される, 無限区間の台形公式に対する誤差の特性関数である.

関数 (4.8) は, 実軸から少し離れると

$$|\hat{\Phi}_T(w)| \approx 2\pi \exp\left(-\frac{2\pi}{h} |\text{Im } w|\right) \quad (4.9)$$

のように振る舞う。すなわち、台形公式の刻み幅 h が小さければ、 w が実軸から少しでも離れると $|\hat{\Phi}_T(w)|$ は減衰率 $2\pi/h$ をもって指数関数的に減衰する。したがって、 $|\hat{\Phi}_T(w)|/2\pi = 10^{-m}$, $m = 1, 2, \dots$ の等高線図は、実軸に等間隔に並ぶ直線群となる。図 11 (a) に $h = 0.25$ の場合の $|\hat{\Phi}_T(w)|/2\pi = 10^{-m}$, $m = 1, 2, \dots$ の等高線図を示してある。特性関数を 2π で割っているのは、図 11 (a) において等高線の実軸を挟む間隔が他の間隔と等しくなるようにするためである。

そこで、同様のことを一般の数値積分公式について考えてみよう。積分 (4.1) に対する一つの積分公式を

$$I_A = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k g(a_k) \quad (4.10)$$

とする。すなわち、この公式の分点は a_k , そこでの重みは A_k であり、分点は台形公式と同様に無限個とる。このとき、この公式の誤差が (4.7) に対応して

$$\Delta I_A = I - I_A = \frac{1}{2\pi i} \int_{\hat{C}} \hat{\Phi}_A(w) g(w) dw \quad (4.11)$$

のように表されるものとしよう。実際、台形公式、Simpson 公式など通常使用される公式の誤差は、この形に表すことができる。 $\hat{\Phi}_A(w)$ はこの公式の誤差の特性関数である。このとき、実軸から ℓ だけ離れた実軸に平行な直線上の誤差の特性関数の平均減衰率を、次式によって定義する。

$$r(\ell) = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2R} \int_{-R+i\ell}^{R+i\ell} \left\{ -\frac{\partial}{\partial v} \log |\hat{\Phi}_A(w)| \right\} dw, \quad v = \text{Im } w \quad (4.12)$$

$-\partial/\partial v \log |\hat{\Phi}_A(w)|$ は、 w が実軸から離れるとき誤差の特性関数 $|\hat{\Phi}_A(w)|$ が指数関数的に減衰するとしたときの減衰の指数で、たとえば台形公式の場合 (4.9) より $-\partial/\partial v \log |\hat{\Phi}_T(w)| \simeq 2\pi/h$ である。 $r(\ell)$ は、実軸からの距離 ℓ のところでこの値を実軸方向に平均したものである。さらに、誤差の特性関数の極限減衰率を

$$r = \lim_{|\ell| \rightarrow \infty} r(\ell) \quad (4.13)$$

で定義する。

このとき、分点 $\{a_k\}$ の単位長さあたりの分布密度が一定値 ν_P であるような (4.10) の形をもつすべての数値積分公式 I_A のうちで、等間隔刻み幅 $h = 1/\nu_P$ をもつ台形公式 I_T が、極限減衰率 r が可能な最大値

$$r_{\max} = 2\pi\nu_P = \frac{2\pi}{h} \quad (4.14)$$

を達成するという意味で最適公式であることが示される [18, 5].

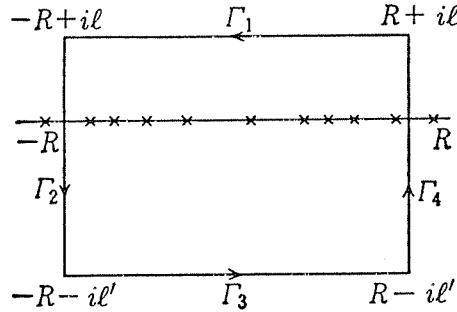
証明の概略は次の通りである。 $\hat{C}$ を図 3 に示すような積分路とするとき、留数定理より I_A は

$$I_A = \frac{1}{2\pi i} \int_{\hat{C}} \hat{\Psi}_A(w) g(w) dz, \quad (4.15)$$

$$\hat{\Psi}_A(w) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k \left(\frac{1}{w - a_k} + \frac{1}{a_k} \right) \quad (4.16)$$

と書くことができる。ただし、分点 a_k および重み A_k は

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{|A_k|}{|a_k|^2} < \infty \quad (4.17)$$


 図 4: 積分路 Γ

をみたしていること, すなわち (4.16) が収束することを仮定する. 通常使われる積分公式はこの条件をみたしている. また, 誤差の特性関数は, (4.4) を考慮すると,

$$\hat{\Phi}_A(w) = \begin{cases} -\pi i - \hat{\Psi}_A(w), & \text{Im } w > 0 \\ +\pi i - \hat{\Psi}_A(w), & \text{Im } w < 0 \end{cases} \quad (4.18)$$

となる. ここで, (4.18) の右辺 1 行目の関数を下半平面へも拡張して,

$$\hat{\Phi}_A^+(w) = -\pi i - \hat{\Psi}_A(w) \quad (4.19)$$

と書く. そして, 上半平面における誤差の特性関数の減衰に着目して

$$J_R(\ell) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{d}{dw} \log \left\{ \hat{\Phi}_A^+(w) \right\} dw = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\frac{d}{dw} \hat{\Phi}_A^+(w)}{\hat{\Phi}_A^+(w)} dw \quad (4.20)$$

なる積分を考える. Γ は図 4 に示すような積分路である. このとき, N_P , N_Z をそれぞれ Γ の内部に存在する $\hat{\Phi}_A^+(w)$ の極の個数, 零点の個数であるとする, 偏角の原理から

$$J_R(\ell) = N_P - N_Z \quad (4.21)$$

が成り立つ. 台形公式の $\hat{\Psi}_T(w)$ は, (4.6) より, $\text{Im } w < 0$ において実軸から離れるとき指数関数的に $+\pi i$ に収束するので, $\hat{\Psi}_A(w)$ もやはり $\text{Im } w < 0$ において実軸から離れるとき指数関数的に $+\pi i$ に収束することを仮定する. そこで, 図 4 の積分路で R および ℓ' を大きくすると, Γ_2 , Γ_3 , Γ_4 に沿う積分はいずれも 0 になり, Γ_1 に沿う積分だけが残る. ここで (4.20) の微分 d/dw を実軸方向 $\partial/\partial u$ ($w = u + iv$) にとり, 上半平面においては (4.18) より $\hat{\Phi}_A^+(w) = \hat{\Phi}_A(w)$ であることおよび $J_R(\ell)$ が実数であることに注意しながら Cauchy-Riemann の関係式を使うと, 結局

$$2\pi(\nu_P - \nu_Z) = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2R} \int_{-R+i\ell}^{R+i\ell} \left\{ -\frac{\partial}{\partial v} \log |\hat{\Phi}_A(w)| \right\} dw = r(\ell), \quad (4.22)$$

を得る [18, 5]. ただし,

$$\nu_P = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2R} N_P, \quad \nu_Z = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2R} N_Z \quad (4.23)$$

は, それぞれ実軸と平行な方向の単位長さ当たりの $\hat{\Phi}_A^+(w)$ の極の個数および零点の個数である. とくに ν_P は単位長さ当たりの分点数に等しく, 仮定よりこの値は一定である. (4.22) より

$$r(\ell) = 2\pi(\nu_P - \nu_Z) \leq 2\pi\nu_P = \text{一定} \quad (4.24)$$

が成り立つ. (4.18) の右辺 2 行目を上半平面に拡張した関数 $\hat{\Phi}_A^- = +\pi i - \hat{\Psi}_A(w)$ に関しても同様の結論が成り立つ.

したがって, いずれにしても $|\ell| \rightarrow \infty$ のとき $\nu_Z = 0$ をみたす公式があれば, それが最適な積分公式であるといえることができる.

一方, 台形公式の誤差の特性関数 $\hat{\Phi}_T(w)$ については, (4.8) の右辺 1 行目, 2 行目の関数をそれぞれ下半平面, 上半平面に拡張しても, それらは w 平面の有限の場所に零点をもたない. すなわち $\nu_Z = 0$ である. 以上より, 台形公式 (4.2) が最適公式であることが結論される.

刻み幅が h の台形公式の場合, (4.9) より極限減衰率は

$$r = \frac{2\pi}{h} \quad (4.25)$$

となり, 上の定理の最適値 $r_{\max} = 2\pi\nu_P = 2\pi/h$ を達成していることがわかる. 一方, 刻み幅 h の Simpson 公式は

$$\begin{aligned} I_S &= \frac{2}{3}h \sum_{k=-\infty}^{\infty} g(2kh) + \frac{4}{3}h \sum_{k=-\infty}^{\infty} g(2kh + h) \\ &= \frac{4}{3}h \sum_{k=-\infty}^{\infty} g(kh) - \frac{1}{3}(2h) \sum_{k=-\infty}^{\infty} g(2kh) \end{aligned} \quad (4.26)$$

であるから, (4.16) の関数はいまの場合

$$\begin{aligned} \hat{\Psi}_S(w) &= \frac{4}{3}h \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{w - kh} - \frac{2}{3}h \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{w - 2kh} \\ &= \frac{4\pi}{3} \cot \frac{\pi}{h} w - \frac{\pi}{3} \cot \frac{\pi}{2h} w \end{aligned} \quad (4.27)$$

と書くことができる. したがって, 誤差の特性関数は

$$\hat{\Phi}_S(w) = \begin{cases} -\frac{4\pi}{3} \left(\cot \frac{\pi}{h} w + i \right) + \frac{\pi}{3} \left(\cot \frac{\pi}{2h} w + i \right); & \text{Im } w > 0 \\ -\frac{4\pi}{3} \left(\cot \frac{\pi}{h} w - i \right) + \frac{\pi}{3} \left(\cot \frac{\pi}{2h} w - i \right); & \text{Im } w < 0, \end{cases} \quad (4.28)$$

あるいは近似的に

$$|\hat{\Phi}_S(w)| \simeq \frac{2\pi}{3} \exp \left(-\frac{\pi}{h} |\text{Im } w| \right), \quad |\text{Im } w| \gg \frac{h}{2\pi} \quad (4.29)$$

となる. この Simpson 公式の極限減衰率 π/h は台形公式の $1/2$ である. すなわち, 台形公式と同じ精度の結果を得るためには Simpson 公式では刻み幅 h を $1/2$ にしなければならないのである. 一方, $\text{Im } w > 0$ において (4.28) の右辺 1 行目の関数が

$$w = 2kh + i \frac{h}{\pi} \log 3, \quad k = 0, \pm 1, \dots \quad (4.30)$$

の位置に無限個の零点をもつことは容易に確かめられる。これはちょうど分点(極)2個に対して1個の割合で零点が存在すること, すなわち

$$\nu_P = 2\nu_Z \quad (4.31)$$

を示しており, したがって(4.24)より, Simpson 公式の極限減衰率 $r = \pi/h$ は台形公式の極限減衰率 $r = 2\pi/h$ の $1/2$ になるのである。

例として, 積分

$$I = K_0(p) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} \exp(-p \cosh u) du \quad (4.32)$$

を取り上げる。 K_0 は変形 Bessel 関数である。 $p = 1$ とおいた $K_0(1) = 0.42102\ 44382\ 4 \dots$ を, 刻み幅 $h = 0.5$ の台形公式で計算すると, その結果の絶対誤差は $|\Delta I_T| = 8.8 \times 10^{-10}$ 程度に小さい。ただし, 実際の計算では(4.2)の和は $u = \pm 4.0$ までとって打ち切った。一方, 同じ刻み幅の Simpson 公式でこれを計算すると, 絶対誤差が 2.1×10^{-5} 程度の結果しか得ることができない。

台形公式の $(-\infty, \infty)$ におけるこの最適性は, 後に最適な変数変換型公式である二重指数関数型数値積分公式を導くときに利用される。

この節を終わるにあたり, 刻み幅一定の台形公式に関するもう一つの重要な性質を述べておく。 $f(z)$ は区間 $[0, p]$ を含む z 平面のある領域で正則で, p を周期にもつ周期関数であるとする。このとき, $f(x)$ の1周期にわたる積分

$$I = \int_0^p f(x) dx \quad (4.33)$$

に対して, $[0, p]$ における分点数が一定な公式のうちで, 刻み幅一定の台形公式が上と同様な意味で最適公式であることが示される [4]。

例として, Bessel 関数の積分表示

$$J_n(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(nx - t \sin x) dx \left(= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^\pi \cos(nx - t \sin x) dx \right) \quad (4.34)$$

の右辺を, $n = 4$, $t = 5$ の場合について数値積分することを考える。この被積分関数は周期 2π の周期関数であるが, 偶関数なので $(-\pi, \pi)$ の積分を半分にして $(0, \pi)$ で計算する。 $(0, \pi)$ を 16 等分し, 台形公式を適用して $J_4(5)$ を計算すると, その誤差は 3.9×10^{-19} 程度に小さくなる。しかし, 同じ分点を使って Simpson 公式で計算すると, その誤差は 2.5×10^{-5} 程度に大きくなってしまう。

Fourier 変換の計算のために高速 Fourier 変換 (FFT) という手法がある。その計算には刻み幅一定の台形公式が使われる。そして, その台形公式の計算を高速に実行できるようにアルゴリズムの観点から効率化したものが, FFT である。FFT の根拠はここに述べた台形公式の最適性にある。ただし, FFT においても, 変換の対象となる関数 $f(x)$ は周期を超えて実軸上で解析的でないならば良い精度の結果は得られないことに注意する必要がある。要するに, 台形公式は, 解析関数の $(-\infty, \infty)$ における積分と解析的周期関数の1周期にわたる積分に対しては最適公式であって極めて精度の高い結果を与えるが, 一方よく知られているように, 解析関数の一般の有限区間 (a, b) の積分に対しては, Simpson 公式などに比べて精度の低い結果しか与えないのである。

§5. 鞍点法と誤差評価

誤差の特性関数を使って有理関数の数値積分の誤差評価を行う場合には、留数定理を利用することができた。有理関数でない場合には、鞍点法を利用することができる場合がある。ここでも、関数を w 平面で考える。

関数 $\varphi(w)$ は点 $w = s$ の近傍で正則で

$$\varphi'(s) = 0, \quad \varphi''(s) \neq 0 \quad (5.1)$$

をみたしているものとする。このとき、 $w = s$ を中心とする $\varphi(w)$ の Taylor 展開は、(5.1) より

$$\varphi(w) = \varphi(s) + \frac{\varphi''(s)}{2!}(w-s)^2 + \frac{\varphi'''(s)}{3!}(w-s)^3 + \dots \quad (5.2)$$

となる。 w は s のごく近くを考え、右辺の第3項以下を無視すると、 $\varphi(w)$ は近似的に

$$\varphi(w) \simeq \varphi(s) + \frac{\varphi''(s)}{2!}(w-s)^2 \quad (5.3)$$

のように w の2次関数の形に表される。したがって、定点 $w = s$ から見て $\varphi''(s)(w-s)^2/2!$ が負の実数になる方向では

$$\operatorname{Re} \varphi(w) \simeq \operatorname{Re} \varphi(s) - \frac{|\varphi''(s)|}{2!}|w-s|^2 \quad (5.4)$$

となり、 $\varphi(w)$ の実部はこの方向で上に凸の2次関数のような変化をする。定点 $z = s$ の近傍では $\operatorname{Re} \varphi(w)$ の変化はこの方向で最も急峻で、 $z = s$ を中心としてこの方向からずれるにしたがって次第にゆるやかになり、これと直角な方向では $\operatorname{Re} \varphi(w)$ は逆に下に凸の2次関数のように振る舞う。すなわち、点 s の近傍では、 $\operatorname{Re} \varphi(w)$ はちょうど鞍あるいは峠の様な形をしている。 $\operatorname{Im} \varphi(w)$ もこれと 45° の方向で同様の振る舞いを示す。その意味で (5.1) をみたす点を、 $\varphi(w)$ の鞍点と呼ぶのである。

通常は (5.1) をみたす点 $w = s$ を鞍点というが、これを拡張して一般に

$$\varphi'(s) = \varphi''(s) = \dots = \varphi^{(m)}(s) = 0, \quad \varphi^{(m+1)}(s) \neq 0 \quad (5.5)$$

をみたす点を $\varphi(w)$ の m 位の鞍点という。図5(a)に $\varphi(w) = \exp(-w^2)$ の $w = 0$ (1位の鞍点) の近傍での $|\varphi(w)|$ の概形を、図5(b)に $\varphi(w) = \exp(-w^3)$ の $w = 0$ (2位の鞍点) の近傍での $|\varphi(w)|$ の概形を示した [3]。

鞍点の近傍で

$$F(w) = \exp(\varphi(w)) \quad (5.6)$$

のように指数関数で表現するのが適切であるような関数 $F(w)$ が与えられているとしよう。そして、積分路 $\hat{C}$ に沿う $F(w)$ の複素積分

$$J = \int_{\hat{C}} F(w) dz = \int_{\hat{C}} \exp(\varphi(w)) dw, \quad \varphi(w) = \log F(w) \quad (5.7)$$

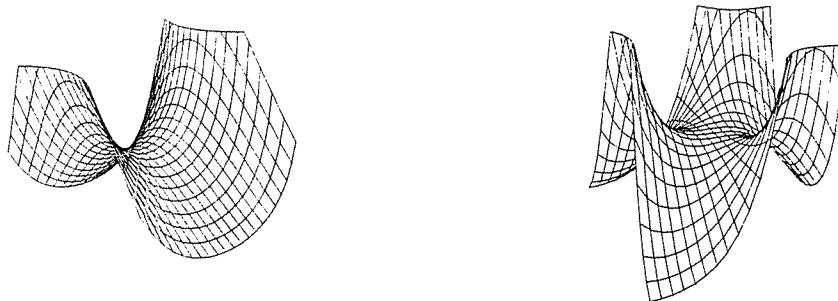


図 5: (a) $w = 0$ の近傍での $|\exp(-w^2)|$ (b) $w = 0$ の近傍での $|\exp(-w^3)|$

を考える. このとき, $F(w)$ の鞍点 $w = s$ では, $F'(s) = \varphi'(s) \exp(\varphi(s)) = 0$ より, $\varphi'(s) = 0$ が成り立っており, $w = s$ は $\varphi(w)$ の鞍点でもある. この鞍点の近傍において, $\varphi''(s)(w-s)^2/2$ が負の実数になるような方向での $F(w)$ の挙動は, (5.4) と (5.6) より

$$|F(w)| \simeq |\exp(\varphi(s))| \exp\left(-\frac{|\varphi''(s)|}{2}|w-s|^2\right) \quad (5.8)$$

となる. すなわちこの方向では, $|F(w)|$ が最も急峻な路に沿って Gauss の誤差曲線を登って下る形になり, またこれと直角な方向では $|F(w)|$ は谷を下って登る形になる. そこで, この鞍点の近くでは $F(w)$ は正則であると仮定して, 積分路 $\hat{C}$ を移動させてこの鞍点 $z = s$ を最も急峻な方向に登って下る方向に通過するようにとる. 他にも積分に対する寄与の大きい鞍点があれば, それらも同様の方向に通過するように積分路を移動させる. すると, 結局 (5.7) の積分に対するこれらの鞍点 $s = s_j$, $j = 1, 2, \dots$ からの寄与は, 近似的に次のように表されることがわかる.

$$|J| \simeq \sum_j \frac{\sqrt{2\pi|F(s_j)|}}{\sqrt{|\varphi''(s_j)|}}, \quad \varphi(s_j) = \log F(s_j) \quad (5.9)$$

誤差の積分 (1.10) の被積分関数 $\Phi_n(z)f(z)$ あるいは (4.11) の $\hat{\Phi}_A(w)g(w)$ は, とくに鞍点の近傍では通常は (5.6) の形に書くことができる. そこで, 誤差の積分 (4.11) に鞍点法を適用すれば, (5.9) より次のような数値積分の誤差を表す近似式を得ることができる.

$$|\Delta I_A| \simeq \sum_j \frac{|\hat{\Phi}_A(s_j)g(s_j)|}{\sqrt{2\pi|\varphi''(s_j)|}}, \quad \varphi(s_j) = \log(\hat{\Phi}_A(s_j)g(s_j)) \quad (5.10)$$

公式 (5.10) における鞍点 s_j としては, 寄与の大きいものだけをとればよい. 通常はただ 1 点か, または複素共役なただ 2 点で十分なことが多い. また (5.10) に対しては, 正確な鞍点からのずれは 2 次の寄与をするだけなので, (5.10) の計算において s_j にはある程度おおまかな値を代入することが許される. 山が二つあればその中間には峠がある, という見方で探せば, 鞍点の大体の位置を知ることができる.

例として, 再び (4.32) に挙げた積分

$$K_0(p) = \int_{-\infty}^{\infty} g(u) du, \quad g(u) = \frac{1}{2} \exp(-p \cosh u) \quad (5.11)$$

を取り上げる. いま $|\operatorname{Im} w| \gg h$ ならば (4.8) は $\operatorname{Im} w > 0$, $\operatorname{Im} w < 0$ に応じてそれぞれ

$$\hat{\Phi}_T(w) \simeq \pm 2\pi i \exp\left(\pm \frac{2\pi i w}{h}\right), \quad (5.12)$$

となる. ここで鞍点法の公式 (5.10) を適用しよう.

$$\hat{\Phi}_T(w)g(w) \simeq \pm \pi i \exp\left(\pm \frac{2\pi i w}{h} - p \cosh w\right) \quad (5.13)$$

$$\varphi(w) = \log \left\{ \hat{\Phi}_T(w)g(w) \right\} \simeq \log(\pm \pi i) \pm \frac{2\pi i w}{h} - p \cosh w \quad (5.14)$$

であるから, $\varphi'(w) \simeq \pm 2\pi i/h - p \sinh w = 0$ より, 鞍点として

$$s = \pm \operatorname{arccosh} \frac{2\pi}{ph} \pm \frac{(4\ell+1)\pi}{2}i, \quad \ell = 0, 1, 2, \dots \quad (5.15)$$

を得る. いまの場合, (5.15) の鞍点のうち実軸に最も近い 4 個の鞍点

$$s \simeq \pm \operatorname{arccosh} \frac{2\pi}{ph} \pm \frac{\pi}{2}i \quad (5.16)$$

が誤差に大きく寄与する. このとき, $|\varphi''(s)| \simeq |-p \cosh s| \simeq 2\pi/h$, $|\exp(-p \cosh s)|/2 \simeq 1/2$ となる. $h = 0.5$, $p = 1$ の場合について, (5.15) のうち $u = \operatorname{Re} w > 0$, $v = \operatorname{Im} w > 0$ に存在する鞍点 $s = \operatorname{arccosh} 2\pi/ph + \pi i/2 \simeq 3.22 + 1.57i$ の近傍での $\frac{1}{2}|\hat{\Phi}_T(w) \exp(-p \cosh w)|/(2\pi)$ の立体図を図 6 に示した. $|\hat{\Phi}_T(w)|$ は $|v|$ が増加するとともに指数関数的に減少するが, 一方 $g(w)$ は $\cos v < 0$ の部

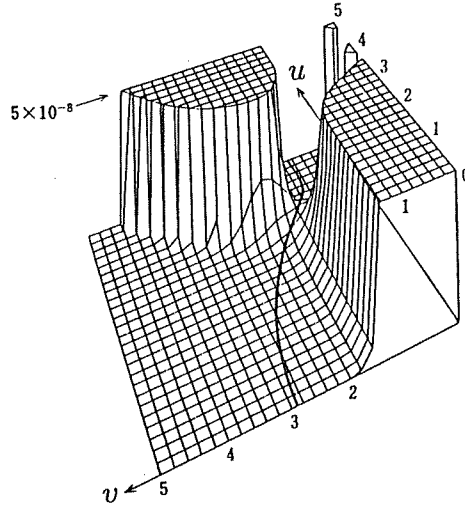


図 6: $\frac{1}{2\pi}|\hat{\Phi}_T(w)|^{1/2} \exp(-\cosh w)$ の立体図と積分路 $\hat{C}$

分, すなわち $(4\ell+1)\pi/2 < |v| < (4\ell+3)\pi/2$, $\ell = 1, 2, \dots$ において $|u|$ が増加すると指数関数的に増大するので, $|u|$ の大きいところで積分路 $\hat{C}$ を実軸から十分に遠ざけることができない. そこで, (4.7) の上半平面における積分路 $\hat{C}$ は, 実軸から最も近い 2 個の鞍点 $s = \pm \operatorname{arccosh}(2\pi/ph) + \pi i/2$ を通り, $|u|$ の大きいところでは $v = \pi/2$ に沿って実軸に平行にとる. 図 6 にこの積分路の一部を示した. 下半平面においても同様に積分路をとる. このように積分路をとると, 結局 (5.10) より次のような誤差評価を得る.

$$|\Delta I_T| \simeq 2\sqrt{h} \exp\left(-\frac{\pi^2}{h}\right) \quad (5.17)$$

これは刻み幅 h が小さければきわめて小さな値になる. 例えば, $h = 0.5$ のとき $|\Delta I_n| \simeq 3.8 \times 10^{-9}$ 程度である. (5.17) は誤差が p にほとんど依存しないことを示している. 実際, $h = 0.5$ として (4.32) を数値積分すると, その誤差は $p = 0.25, 1, 4$ に対してそれぞれ $3.1 \times 10^{-9}, 8.8 \times 10^{-10}, 3.1 \times 10^{-10}$ となる.

§6. 変数変換と二重指数関数型数値積分公式

端点に特異性をもつ

$$I = \int_{-1}^1 \frac{dx}{(x-2)(1+x)^{3/4}(1-x)^{1/4}} \quad (6.1)$$

のような積分は, Simpson 公式や Legendre-Gauss 公式など通常使われる公式を利用しても精度の高い結果は得られない. 一方, 4 節に示したように, 解析関数の無限区間にわたる数値積分には刻み幅一定の台形公式が最適である. そこで, 一般の区間 (a, b) における解析関数 $f(x)$ の積分

$$I = \int_a^b f(x) dx \quad (6.2)$$

が与えられたとき, これを数値積分するために 4 節で得た結果を利用することを考えよう. ここで $f(x)$ は, 可積分である限り, (6.1) のように端点 $x = a, x = b$ において特異性をもっている. 4 節の結果を利用するためには, $-\infty < u < \infty$ で解析的で

$$\phi(-\infty) = a, \phi(+\infty) = b \quad (6.3)$$

をみたす単調増加関数

$$x = \phi(u) \quad (6.4)$$

を使って, 積分を (a, b) から $(-\infty, \infty)$ に変数変換すればよい. このとき, (6.2) の積分 I は

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} f(\phi(u)) \phi'(u) du \quad (6.5)$$

となる. この積分の被積分関数 $g(u) = f(\phi(u)) \phi'(u)$ は, $-\infty < u < \infty$ で解析的である. したがって, 4 節に述べた台形公式の最適性により, 積分 (6.5) を数値計算するには次のような刻み幅一定の台形公式を適用するのが自然である.

$$I_h = h \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(\phi(kh)) \phi'(kh) \quad (6.6)$$

変換の関数 $\phi(u)$ をうまく選ぶと, $\phi'(u)$ は $|u|$ が大きくなるとき急速に減衰するようにできる. 例えば, (6.1) の積分に

$$x = \phi(u) = \tanh \left(\frac{\pi}{2} \sinh u \right) \quad (6.7)$$

を適用すると, (6.1) にあった特異性による関数値の端点での発散は変換後の

$$\phi'(u) = \frac{\frac{\pi}{2} \cosh u}{\cosh^2 \left(\frac{\pi}{2} \sinh u \right)} \quad (6.8)$$

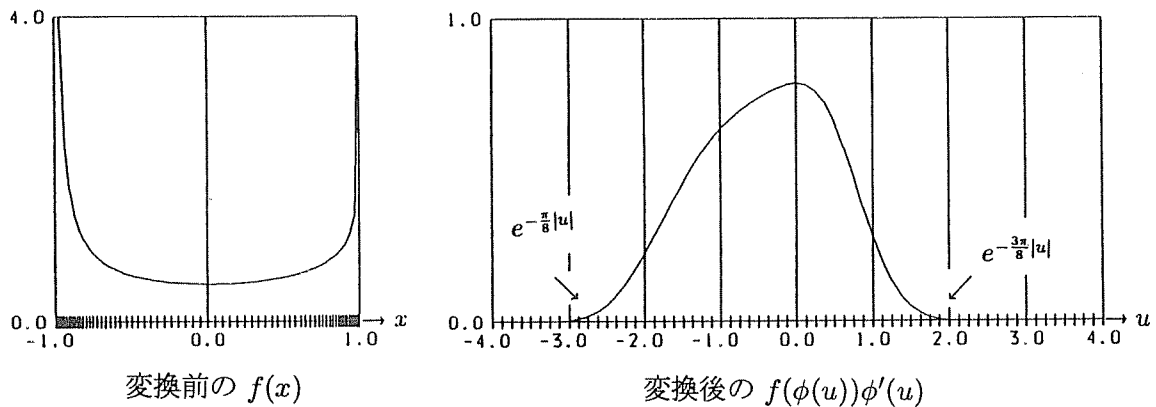


図 7: $f(x) = 1/((x-2)(1+x)^{3/4}(1-x)^{1/4})$ と変換 $x = \phi(u) = \tanh((\pi/2) \sinh u)$

の強い減衰によっておさえられ, (6.5) は台形公式で容易に積分できるようになる. 積分 (6.1) に (6.7) を適用したときの変換の前後の被積分関数の形を図 7 に示した. この図からも, ここに述べた変数変換の意味が理解できよう.

台形公式 (6.6) による誤差は, 誤差の特性関数 (4.8) を使って

$$\Delta I_h = I - I_h = \frac{1}{2\pi i} \int_{\hat{C}} \hat{\Phi}_h(w) f(\phi(w)) \phi'(w) dw \quad (6.9)$$

の形に表現できることはすでに見た通りである. なお, 本節以降 $(-\infty, \infty)$ における積分公式としては台形公式以外は扱わない. そこで以下, 刻み幅 h を明記するために I_T , ΔI_T , $\hat{\Phi}_T(w)$ の代わりに, それぞれ I_h , ΔI_h , $\hat{\Phi}_h(w)$ と書くことにする. (6.9) の ΔI_h は, もとの積分を離散的な和で近似したために生ずる誤差であるから, 離散化誤差と呼ぶことにする.

一方, 実際には無限和 I_h は次のように有限和に打ち切って計算しなければならない.

$$I_h^{(N)} = h \sum_{k=-n}^n f(\phi(kh)) \phi'(kh) \quad (6.10)$$

ここでは, 簡単のために和の k の正の側と負の側は同じ項数 n で打ち切っている. したがって, 関数値の総計算回数 (関数評価回数) N は

$$N = 2n + 1 \quad (6.11)$$

となる. 無限和を有限和で打ち切ることによって誤差が生じるが, これを項の打ち切り誤差と呼ぶことにする. すなわち, 項の打ち切り誤差を ε_t と書くと, 次のように表すことができる.

$$\varepsilon_t = I_h - I_h^{(N)} = h \sum_{k=-\infty}^{-n} f(\phi(kh)) \phi'(kh) + h \sum_{k=n}^{\infty} f(\phi(kh)) \phi'(kh) \quad (6.12)$$

なお, 台形公式では通常は端点での関数値に重み $1/2$ を乗ずるが, ここでの議論では端点における関数値はつねに小さくて無視できるので, (6.10) も台形公式と呼んでいる.

さて, 解析関数の無限区間にわたる積分の計算に最適な公式である台形公式を適用するのはごく自然である. 一方, 与えられた積分 (6.2) に対して行う変数変換 $x = \phi(u)$ には任意性がある. そこ

で, 台形公式の刻み幅 h と, 無限和を打ち切る項数 $n = (N - 1)/2$ とを固定して, いくつかの異なる変換についてその効率に対する影響の考察を行ってみる.

いま, $|u| \rightarrow \infty$ における被積分関数 $f(\phi(u))\phi'(u)$ の減衰が速くなるような変換を適用すると, $n = (N - 1)/2$ で打ち切ったときの項の打ち切り誤差 ε_t は当然小さくなる. しかし, 減衰が速いと被積分関数 $f(\phi(u))\phi'(u)$ の形状の変化に対して刻み幅 h が相対的に大きくなることになり, 離散化誤差 ΔI_h の方は大きくなってしまう.

逆に, 被積分関数 $f(\phi(u))\phi'(u)$ の減衰が遅くなるような変換を適用すると, $f(\phi(u))\phi'(u)$ の形状の変化に対して刻み幅 h が相対的に小さくなり, 離散化誤差 ΔI_h は小さくなる. しかし, 減衰が速い場合と同じ $n = (N - 1)/2$ で無限和を打ち切るとすると, 相対的に減衰がまだ十分でない場所で無限和を打ち切ることになり, 項の打ち切り誤差 ε_t が大きくなってしまう.

この考察からわかるように, 被積分関数 $f(\phi(u))\phi'(u)$ の減衰の仕方は速すぎても遅すぎても誤差は大きくなり, どこかに最適な減衰があるはずである. なお, 当然のことながら, 無限和は項の打ち切り誤差 ε_t が離散化誤差 ΔI_h とほぼ等しくなるところで打ち切るべきである.

すでに (6.8) で見たように, 被積分関数 $f(\phi(u))\phi'(u)$ の減衰を支配するのは (6.5) における $\phi'(u)$ の部分である. そこで, 典型的な場合として積分

$$I = \int_{-1}^1 f(x) dx \quad (6.13)$$

を考え, $\phi'(u)$ の振舞いに注目しながら, $|\Delta I_h| \approx |\varepsilon_t|$ という条件の下で誤差が関数値の総計算回数 N の関数として最も速く 0 に収束するような変換 $x = \phi(u)$ を探してみよう [19, 20]. そのために, 減衰の遅い変換から速い変換に向かって, いくつかの具体的な変換を選び, そのときの誤差がどのように変化するかを調べてみる.

まず最初に, $\phi'(u)$ が一重指数関数的に減衰する変換

$$x = \phi(u) = \tanh u^\rho, \quad \phi'(u) = \frac{\rho u^{\rho-1}}{\cosh^2 u^\rho} \quad (6.14)$$

を取り上げる. ρ を正の奇数に固定すると, 一つの公式が定まる. ρ が $1, 3, 5, \dots$ のように増大するに従って $\phi'(u)$ の減衰は速くなる. (6.13) にこの変換を行うと

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tanh u^\rho) \frac{\rho u^{\rho-1}}{\cosh^2 u^\rho} du \quad (6.15)$$

となる. この積分を台形公式で計算したときの誤差は, (6.9) より

$$\Delta I_h = \frac{1}{2\pi i} \int_{\hat{C}} \hat{\Phi}_h(w) f(\tanh w^\rho) \frac{\rho w^{\rho-1}}{\cosh^2 w^\rho} dw \quad (6.16)$$

で表される. (4.9) に見たように, w が実軸から遠ざかると $|\hat{\Phi}_h(w)|$ は指数関数的に小さくなる. しかし, 被積分関数がたとえ定数関数であっても, (6.16) の積分路 $\hat{C}$ を実軸から遠ざけるとわかるように, 右辺の分母にある $\cosh w^\rho$ の零点に起因する特異点が誤差に必ず寄与する. 図 8 に $\rho = 3$ の場合の $z = \tanh w^3$ による直線 $x = 0, \pm 1, y = 0, \pm 1$ ($z = x + iy$) の w 平面における像を示した. $\cosh w^3 = 0$ をみたす点は z 平面の無限遠点の $z = \tanh w^3$ による像であり, それらのうちで

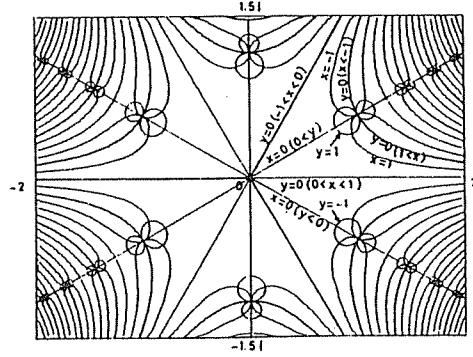


図 8: $z = \tanh w^3$ による $x = 0, \pm 1, y = 0, \pm 1$ ($z = x + iy$) の像

w 平面の実軸に最も近い点は, 図 8 にある直線 $x = 0$ の像と直線 $y = 0$ ($x < -1, 1 < x$) の像との交点など, 原点に対称に位置する 4 点である. もしも $f(z)$ 自身が z 平面の有限な場所に特異点をもつならば, その点は上述の 4 点よりも w 平面上の実軸に近いところに写像されるであろう. これら写像された特異点のうちで実軸から最も近い点までの距離を d とおこう. この写像された特異点の近くに (6.16) の被積分関数の鞍点が存在するので, 積分路をこの鞍点を通るように変形して鞍点法を適用すれば, 誤差 $|\Delta I_h|$ は近似的に次のように書けることがわかる [20].

$$|\Delta I_h| \simeq \exp\left(-\frac{2\pi}{h}d\right) \quad (6.17)$$

一方, (6.15) を台形公式で計算するときの和の上下限を $\pm n = \pm(N-1)/2 \simeq \pm N/2$ (N は関数の計算回数) で打ち切ったときの項の打ち切り誤差 ε_t は, $|u|$ が大きいときの (6.15) の被積分関数における $\phi'(|u|) \simeq 1/(\cosh |u|^\rho)^2 \simeq \exp(-2|u|^\rho)$ の挙動から,

$$\varepsilon_t \simeq \exp(-2(Nh/2)^\rho) \quad (6.18)$$

となる. 台形公式の和は, これと (6.17) がほぼ等しくなるところで打ち切るべきである. N は十分大きいとして, これらの指数を等置すれば

$$h \simeq (2^\rho \pi d)^{\frac{1}{\rho+1}} N^{-\frac{\rho}{\rho+1}} \quad (6.19)$$

を得る. これを (6.17) に代入すれば, 計算回数 N の関数として次の形の誤差の表示が得られる.

$$|\Delta I_N| \simeq \exp\left(-(2^{\frac{1}{\rho}} \pi d)^{\frac{\rho}{\rho+1}} N^{\frac{\rho}{\rho+1}}\right) \quad (6.20)$$

とくに $\rho = 1$ のときには次のようになる.

$$|\Delta I_N| \simeq \exp\left(-\sqrt{2\pi d N}\right) \quad (6.21)$$

次に, $\phi'(u)$ が (6.14) の場合よりも速く, 二重指数関数的に減衰する変換

$$x = \phi(u) = \tanh\left(\frac{\pi}{2} \sinh u\right), \quad \phi'(u) = \frac{\frac{\pi}{2} \cosh u}{\cosh^2\left(\frac{\pi}{2} \sinh u\right)} \quad (6.22)$$

を考える. 積分 (6.13) にこの変換を行い, 台形公式を適用すると, 一つの数値積分公式が得られる. この公式の誤差は, (6.9) より

$$\Delta I_h = \frac{1}{2\pi i} \int_{\hat{C}} \hat{\Phi}_h(w) f\left(\tanh\left(\frac{\pi}{2} \sinh w\right)\right) \frac{\frac{\pi}{2} \cosh w}{\cosh^2\left(\frac{\pi}{2} \sinh w\right)} dw \quad (6.23)$$

となる. (6.16) の場合と同様に, いまの場合も (6.23) の右辺の分母の零点に起因する特異点が誤差に寄与する. 図 9 に, (6.22) の変換, すなわち

$$z = \tanh\left(\frac{\pi}{2} \sinh w\right) \quad (6.24)$$

による $x = 0, \pm 1, y = 0, \pm 1$ ($z = x + iy$) の w 平面における像を示した. w 平面で $\cosh\left(\frac{\pi}{2} \sinh w\right) =$

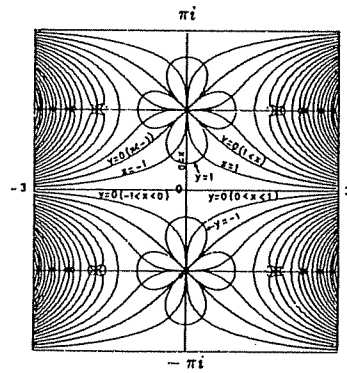


図 9: $z = \tanh\left(\frac{\pi}{2} \sinh w\right)$ による $x = 0, \pm 1, y = 0, \pm 1$ ($z = x + iy$) の像

0 をみだす点は z 平面の無限遠点の像であるが, これら (6.23) の被積分関数の特異点のうち実軸に最も近いものは, 図 9 に見るように, 実軸から $\pi/2$ だけ離れて実軸に平行に無限個並ぶ. もしも $f(z)$ 自身が z 平面の有限な場所に特異点をもつならば, その点は w 平面の実軸から $\pi/2$ よりさらに近いところへ写像されるであろう. 図 9 の点およびこれら写像された点のうちで実軸から最も近い点までの距離を d とおくと, (6.16) の場合と同様に, 二重指数関数的変換に基づくいまの場合の公式の離散化誤差は, (4.8) より

$$|\Delta I_h| \simeq \exp\left(-\frac{2\pi}{h} d\right) \quad (6.25)$$

となることがわかる.

一方, 台形公式の和を $u = n = \pm(N-1)/2 \simeq \pm N/2$ で打ち切ったときの項の打ち切り誤差は, (6.22) の $\phi'(u)$ の $|u|$ の大きいところでの減衰の仕方から,

$$\varepsilon_t \simeq \exp\left(-\frac{\pi}{2} \exp\left(\frac{Nh}{2}\right)\right) \quad (6.26)$$

となる. ここでも N は十分大きいとして, (6.25) と (6.26) の指数を等置すると,

$$h = \frac{2}{N} \log \frac{4d}{h} \quad (6.27)$$

を得る. これは h に関する非線形方程式であるが, 第 0 近似として $h = 2/N$ をとって (6.27) の右辺に代入すると, 第 1 近似として

$$h = \frac{2}{N} \log(2dN) \quad (6.28)$$

が導かれる。これを (6.25) に代入すれば、関数計算回数 N の関数として次の形の誤差の表示が得られる。

$$|\Delta I_N| \simeq \exp\left(-\frac{\pi dN}{\log(2dN)}\right) \quad (6.29)$$

この誤差は、 N が大きくなるとき、(6.20) と比較してずっと速く 0 に近づく。

そこでさらに、二重指数関数型の減衰を与える (6.22) の場合よりも $\phi'(u)$ が速く減衰する変換として

$$x = \phi(u) = \tanh\left(\frac{\pi}{2} \sinh u^3\right) \quad (6.30)$$

を考える。このとき、台形公式の誤差は

$$\Delta I_h = \frac{1}{2\pi i} \int_{\hat{C}} \hat{\Phi}_h(w) f\left(\tanh\left(\frac{\pi}{2} \sinh w\right)\right) \frac{\frac{3\pi}{2} w^2 \cosh w^3}{\cosh^2\left(\frac{\pi}{2} \sinh w^3\right)} dw \quad (6.31)$$

となる。ところで、一般に写像 $\zeta = w^3$ による ζ 平面の実軸に平行な直線 $\text{Im } \zeta = \pi/2$ の一つの像は、図 8 を w 平面の図とみなしたとき、その $y = 0$ ($x < -1, 1 < x$) に対応する曲線である。したがって、写像 $z = \tanh((\pi/2) \sinh \zeta)$, $\zeta = w^3$ を考えると、まず $z = \tanh((\pi/2) \sinh \zeta)$ によって (6.31) の被積分関数の特異点に対応する z 平面の無限遠点は ζ 平面における実軸から $\pi/2$ だけ離れて並ぶ図 9 の無限個の点に写像され、次に $\zeta = w^3$ によってそれが w 平面における図 8 の $y = 0$ ($x < -1, 1 < x$) に対応する曲線上に写像されて無限個並ぶことになる。しかし、これらの特異点は原点から遠いところでは実軸に限りなく近づいてしまう。したがって、誤差の積分 (6.9) の積分路を実軸から一定距離だけ離して保つことができなくなり、結局誤差を (6.25) より小さくすることはできないのである。

以上から、二重指数関数型変換 (6.22) が最適の結果を与えることが結論される。

具体的な例として再び

$$I = \int_{-1}^1 \frac{dx}{(x-2)(1+x)^{3/4}(1-x)^{1/4}} (= -1.9490 \dots) \quad (6.32)$$

を取り上げる。この積分をいくつかの変換を使って数値積分した結果を図 10 に示す。使った変換は次の 4 種類である。

- a. $x = \phi(u) = \tanh u, \quad \phi'(u) = \frac{1}{\cosh^2 u}$
- b. $x = \phi(u) = \text{erf } u = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^u \exp(-t^2) dt, \quad \phi'(u) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \exp(-u^2)$
- c. $x = \phi(u) = \tanh\left(\frac{\pi}{2} \sinh u\right), \quad \phi'(u) = \frac{\frac{\pi}{2} \cosh u}{\cosh^2\left(\frac{\pi}{2} \sinh u\right)}$
- d. $x = \phi(u) = \tanh\left(\frac{\pi}{2} \sinh u^3\right), \quad \phi'(u) = \frac{\frac{3\pi}{2} u^2 \cosh u^3}{\cosh^2\left(\frac{\pi}{2} \sinh u^3\right)}$

b の変換は、 $|u| \rightarrow \infty$ のときに $\exp(-u^2)$ の形で減衰する例である。図 10 の横軸は関数の計算回数 N 、縦軸は計算値の絶対誤差 $|\Delta I_h^{(N)}|$ を対数スケールで表示したものである。図の各曲線に沿って記してある数値は、実際に計算した刻み幅 h の値である。無限和は、 $|f(\phi(u))\phi'(u)|$ の値が刻み

21

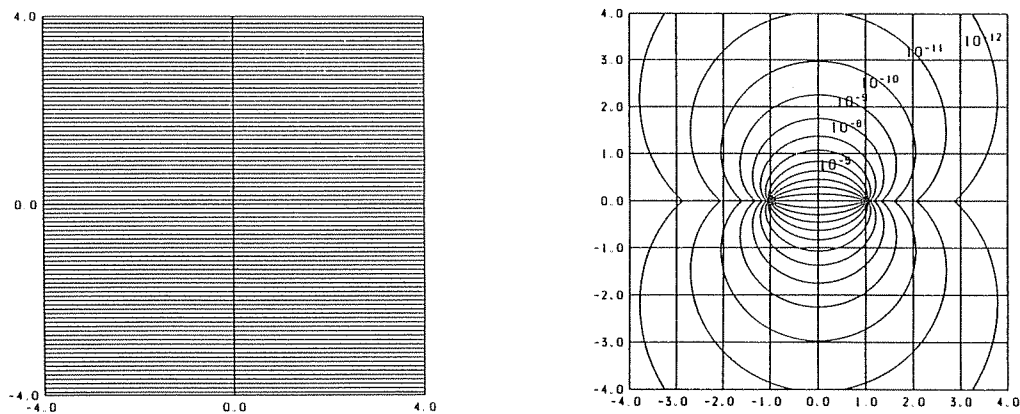


図 11: (a) $|\hat{\Phi}_h(w)|/2\pi = 10^{-m}$, $m = 1, 2, \dots$ (b) $|\Phi_h(z)|/2\pi = 10^{-m}$, $m = 1, 2, \dots$

に対しては

$$x = \sinh \left(\frac{\pi}{2} \sinh u \right) \quad (6.39)$$

が二重指数関数型数値積分公式を与える.

変換前の積分 (1.1) および (1.10) に対応させて, 変数変換型の数値積分公式の誤差の積分を

$$\Delta I_h = \frac{1}{2\pi i} \int_C \Phi_h(z) f(z) dz \quad (6.40)$$

と書いたとしよう. このとき, 次のようにして誤差の特性関数 $|\Phi_h(z)|$ の等高線図を描くことができる. 変換を複素関数として

$$z = \phi(w) \quad (6.41)$$

のように書いて, (6.40) を z の積分から w の積分に変換すると,

$$\Delta I_h = \frac{1}{2\pi i} \int_{\hat{C}} \Phi_h(\phi(w)) f(\phi(w)) \phi'(w) dw \quad (6.42)$$

となる. ここで (6.9) と (6.42) を比較すれば, $\hat{\Phi}_h(w)$ と $\Phi_h(z)$ の間に次の関係があることがわかる.

$$\hat{\Phi}_h(w) = \Phi_h(\phi(w)) = \Phi_h(z) \quad (6.43)$$

積分路 C は, w 平面の $\hat{C}$ を (6.41) によって z 平面に写像したものである. すでに述べたように, w 平面における $|\hat{\Phi}_h(w)|$ の等高線図は, (4.9) より実軸に平行に等間隔に並ぶ直線群から成る. 一方 (6.43) より, w 平面の直線 $|\hat{\Phi}_h(w)| = c$ は z 平面の曲線 $|\Phi_h(z)| = c$ に対応する. したがって, 直線 $|\hat{\Phi}_h(w)| = c$ を (6.41) によって z 平面に写像すれば z 平面における対応する $|\Phi_h(z)| = c$ の等高線図が得られることになる. $h = 0.25$ の場合の直線群 $|\hat{\Phi}_h(w)|/2\pi = 10^{-m}$, $m = 1, 2, \dots$ を図 11 (a) に, 対応する曲線群 $|\Phi_h(z)|/2\pi = 10^{-m}$, $m = 1, 2, \dots$ を図 11 (b) に示した. 図 11 (b) の曲線は, コンピュータを使って実際に w 平面の直線 $|\hat{\Phi}_h(w)|/2\pi = 10^{-m}$ の 1 本 1 本を z 平面に等角写像しながら描いたものである. この図は, 図 2 と同様に, 二重指数関数型公式の実際の誤差評価に利用することができる.

二重指数関数型数値積分公式の最適性については, 杉原正顕が関数解析的議論を行って, より数学的に厳密な形でこれを記述することに成功した [15, 16]. また杉原は, 二重指数関数型変換は, 数

値積分だけでなく, Sinc 関数に基づく関数近似においても最適な変換であることを示した [17]. さらに堀内・杉原は, 常微分方程式の境界値問題に対する Sinc-Galerkin 法においても, 二重指数関数型変換は非常に効率の高い方法であることを示している [1].

§7. 振動型積分に対する二重指数関数型数値積分公式

二重指数関数型変換は広い範囲の積分に対して有効であるが, 次のような減衰の遅い振動する関数の Fourier 型積分に対しては精度の良い結果を与えないことがわかっている.

$$\begin{cases} I_s = \int_0^\infty f_1(x) \sin \omega x dx \\ I_c = \int_0^\infty f_1(x) \cos \omega x dx \end{cases} \quad (7.1)$$

このような場合には,

$$\phi(-\infty) = 0, \quad \phi(+\infty) = \infty \quad (7.2)$$

をみたし,

$$u \rightarrow -\infty \quad \text{のとき二重指数関数的に} \quad \phi'(u) \rightarrow 0 \quad (7.3)$$

かつ

$$u \rightarrow +\infty \quad \text{のとき二重指数関数的に} \quad \phi(u) \rightarrow u \quad (7.4)$$

となる関数 $\phi(u)$ を使って,

$$\begin{cases} I_s: & x = M\phi(u)/\omega, \\ I_c: & x = M\phi\left(u - \frac{\pi}{2M}\right)/\omega \end{cases} \quad (M = \text{const.}) \quad (7.5)$$

なる変換を行えば, 有効な二重指数関数型積分公式が導かれることを, 1990 年に大浦・森が示した [9]. M は後で述べるように定めるある定数である. この変換の目的は, 公式の分点を $\sin \omega x$ あるいは $\cos \omega x$ の零点に二重指数関数的に近づけ, 大きな x の値に対しては実質的に関数値の計算を行わないで済ますようにすることにある.

この条件をみたす一つの具体的な関数として, 大浦・森は最初

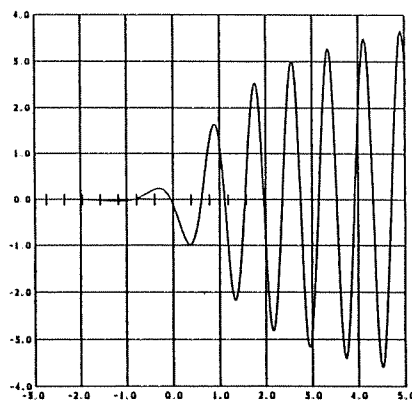
$$\phi(u) = \frac{u}{1 - \exp(-k \sinh u)}, \quad k = 6 \quad (7.6)$$

を提案したが [9, 10], その後より有効な変換として

$$\phi(u) = \frac{u}{1 - \exp(-2u - \alpha(1 - e^{-u}) - \beta(e^u - 1))} \quad (7.7)$$

$$\beta = 1/4, \quad \alpha = \beta / \sqrt{1 + M \log(1 + M) / (4\pi)} \quad (7.8)$$

を提案した [11, 12, 13]. この変換も, 誤差の特性関数に基づく複素解析によって導かれたものである.

図 12: $\log x \sin x$ と $M = 8 (Mh = \pi)$ の場合の公式の分点

この変換を (7.1) の I_s に適用すると,

$$I_s = M \int_{-\infty}^{\infty} f_1(M\phi(u)/\omega) \sin(M\phi(u)) \phi'(u)/\omega du \quad (7.9)$$

が得られるが, これに刻み幅 h の台形公式を適用すると,

$$I_{s,h}^{(N)} = Mh \sum_{k=-n}^n f_1(M\phi(kh)/\omega) \sin(M\phi(kh)) \phi'(kh)/\omega \quad (7.10)$$

を得る. I_c の場合も同様である. ここで, M と h は

$$Mh = \pi \quad (7.11)$$

をみたすように選ぶ. このように選ぶと, (7.4) より, I_c の場合も含めて kh が正で大きいとき

$$\begin{cases} \sin(M\phi(kh)) \sim \sin Mkh = \sin \pi k = 0 \\ \cos\left(M\phi\left(kh - \frac{\pi}{2M}\right)\right) \sim \cos\left(Mkh - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\pi k - \frac{\pi}{2}\right) = 0 \end{cases} \quad (7.12)$$

が成り立ち, k が正で大きくなるときに確かに分点が $\sin \omega x$ あるいは $\cos \omega x$ の零点に二重指数関数的に近づく. したがって大きな $k > 0$ については (7.10) の和を計算する必要がないことがわかる.

この公式は, 例えば

$$I = \int_0^{\infty} \log x \sin x dx = -\gamma \quad (7.13)$$

のように, 被積分関数が発散する関数 $\log x$ を含むような場合にも有効である [9, 10]. この積分は本来

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{\infty} \exp(-\varepsilon x) \log x \sin x dx = -\gamma \quad (7.14)$$

として定義されるものであるが, 変換 (7.7) による場合, 公式 (7.10) に単に $f_1(x) = \log x$ の値を 70 点程度与えるだけで約 15 桁が正しい $-\gamma$ の近似値が得られる. 図 12 に, $\log x \sin x$ の形と, 変換 (7.7) で $M = 8 (Mh = \pi)$ とした場合の公式の分点の位置を示した. x が大きくなると公式の分点が $\sin x$ の零点に近づいていくことがわかる.

以上述べてきたように, 複素関数論は数値積分のような基礎的なアルゴリズムにおいて, その導出, 誤差解析などにおいてきわめて有用な手段を提供することができる. 今後も数値解析のいろいろな分野で複素関数論が活用されることを期待したい.

参考文献

- [1] 堀内賢一, 杉原正顕, 二重指数関数型変数変換を用いた 2 点境界値問題の数値解法 — 二重指数型変数変換を用いた Sinc-Galerkin 法 —, 日本応用数理学会平成 8 年度年会講演予稿集 (1996) 142–143.
- [2] 森正武, 数値解析 (共立数学講座 12, 共立出版, 1973).
- [3] 森正武, 曲線と曲面 (教育出版, 1974).
- [4] M. Mori, On the superiority of the trapezoidal rule for the integration of periodic analytic functions, *Memoirs of Numerical Mathematics*, No.1 (1974) 11–19.
- [5] 森正武, 数値解析と複素関数論 (筑摩書房, 1975).
- [6] 森正武, 数値解析法 (朝倉書店, 1984).
- [7] 森正武, FORTRAN 77 数値計算プログラミング, (岩波書店, 1986).
- [8] 森正武, FORTRAN 77 図形処理プログラミング, (岩波書店, 1991).
- [9] T. Ooura and M. Mori, The double exponential formula for oscillatory functions over the half infinite interval, *J. Comput. Appl. Math.* **38** (1991) 353–360.
- [10] T. Ooura and M. Mori, Double exponential formula for Fourier type integrals with a divergent integrand, *Contributions in Numerical Mathematics*, World Scientific Series in Applicable Analysis **2** (1993) 301–308.
- [11] 大浦拓哉, フーリエ変換型積分に対する新しい変数変換の試み, 日本応用数理学会平成 6 年度年会予稿集 (1994) 260–261.
- [12] 大浦拓哉, Fourier 型積分に対する数値積分法の研究, 東京大学大学院工学系研究科博士論文 (1997).
- [13] T. Ooura and M. Mori, A robust double exponential formula for Fourier type integrals, *J. Comput. Appl. Math.* に投稿中.
- [14] 佐藤幹夫, 超関数の理論, 数学 **10** (1958) 1–27.
- [15] 杉原正顕, DE 公式の最適性について, 京都大学数理解析研究所講究録 No.585 (1986) 150–175.

- [16] M. Sugihara, Optimality of the double exponential formula — functional analysis approach —, *Numer. Math.* **75** (1997) 379-395.
- [17] 杉原正顕, 二重指数関数型変換を用いた Sinc 関数近似, 京都大学数理解析研究所共同研究集会「科学技術における数値計算の理論と応用 II」予稿集 (1996) 26-27.
- [18] H. Takahasi and M. Mori, Error estimation in the numerical integration of analytic functions, *Rep. Comput. Centre Univ. Tokyo* **3** (1970), 41-108.
- [19] H. Takahasi and M. Mori, Quadrature formulas obtained by variable transformation, *Numer. Math.* **21** (1973), 206-219.
- [20] H. Takahasi and M. Mori, Double exponential formulas for numerical integration, *Publ. RIMS Kyoto Univ.* **9** (1974), 721-741.