組合せ最適化における双対性

小林 佑輔

京都大学
数理解析研究所

RIMS 公開講座
2019 年 7月29-8月2日

講義の目標

組合せ最適化の「双対性」について知る

- 双対性とはどのようなものか？
- どのような問題に現れるか？
- どのように有用か？
- どのように示されるか？

講義の構成

- 1日目：双対性とは？ 例の紹介. スライド中心
- 2日目：パスの詰込み 黒板中心
- 3日目：有向木の詰込み 黒板+スライド
- 4日目：その他の例．発展的な話題. スライド中心
- 5日目：オフィスアワー

最適化とは

例

• うまく販売価格を決めて，	利益を最大化したい．
• うまく資産を分散投資して，	リスクを最小化したい．
• うまく道順を決めて，	早く目的地に着きたい．
• うまくスケジュールを組んで，	早く仕事を終わらせたい．

etc.

特定の制約条件下 で ある値を最大(最小)にすること

- 様々な問題を同じ形式にモデル化できる．
- ネットワークフロー（Ford-Fulkerson,1950年代）
  線形計画法（Danzig,1960年代）　　以来，
  理論･応用の両面から様々な研究

1日目の話

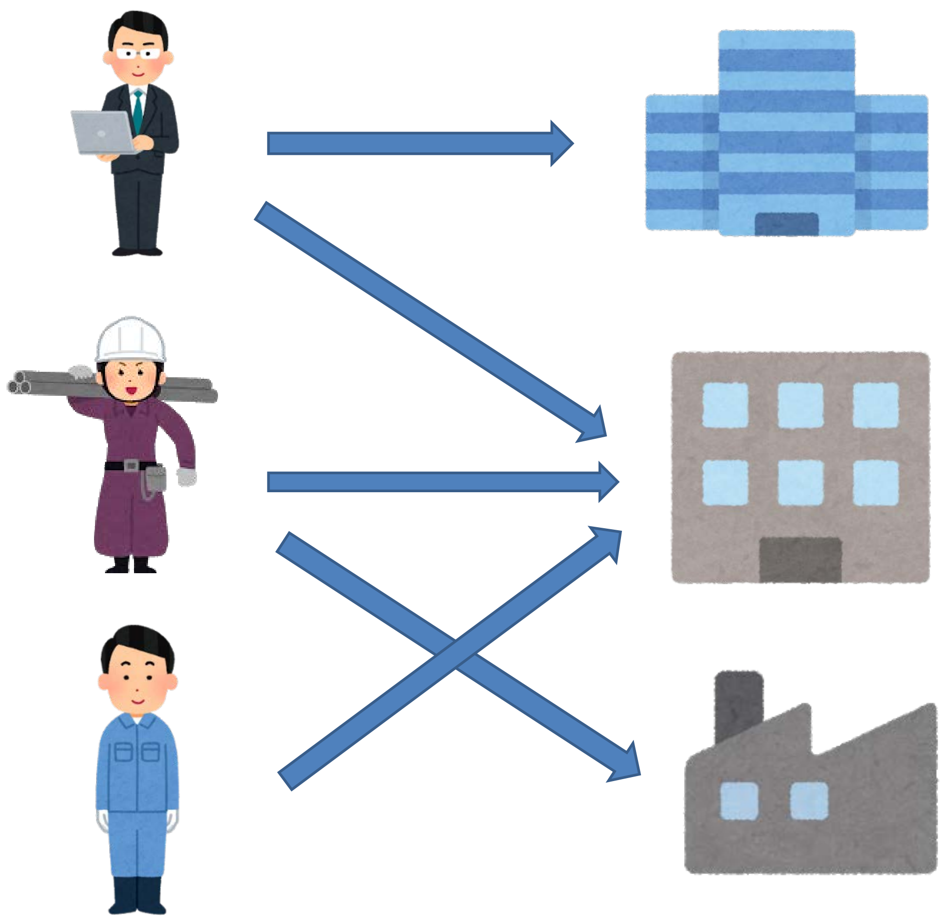
目標

組合せ最適化の様々な問題において
双対性が現れることを紹介

- 双対性の例：２部グラフのマッチング
- 一般グラフのマッチング
- Menger の定理
- 全域木
- 有向全域木

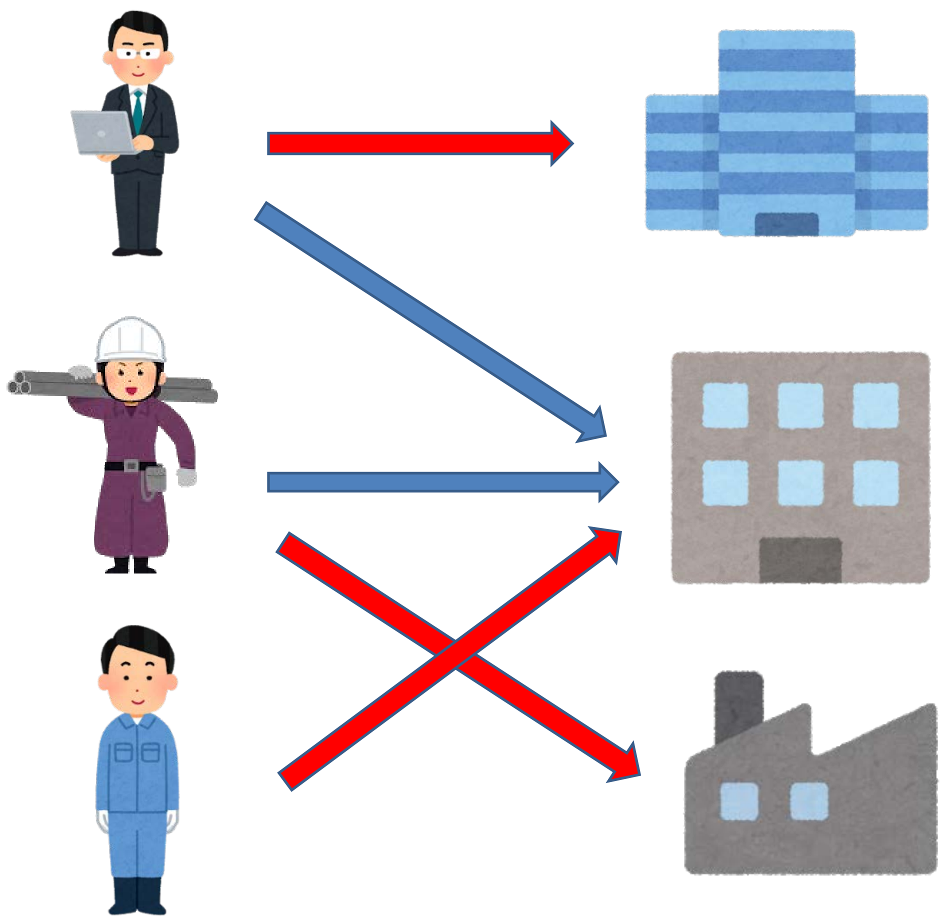
マッチング

問題:　それぞれの人の可能な作業が決まっているとき
うまく作業を割り当てるには？



マッチング

問題:　それぞれの人の可能な作業が決まっているとき
うまく作業を割り当てるには？

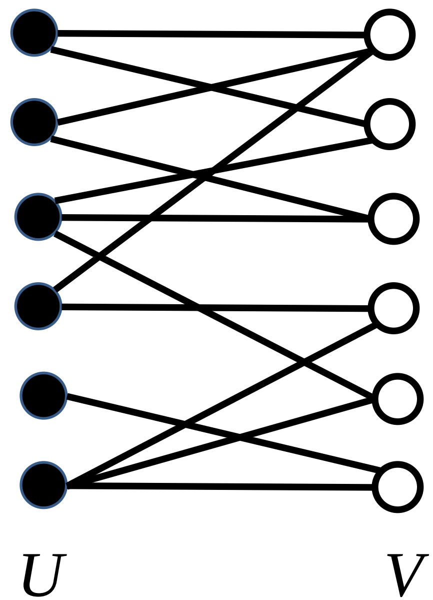


マッチング

どの点にも
１本以下の辺が接続

入力:　２部グラフ $G=(U, V; E)$

問題:　最大サイズのマッチングは？



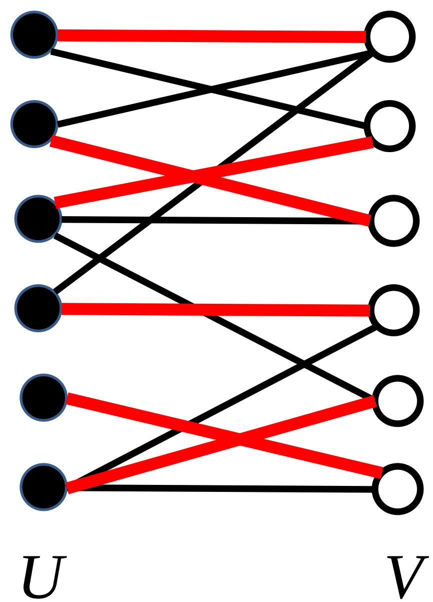
- 学生 と 研究室
- 病院 と 研修医
- 労働者 と 仕事　etc.

マッチング

入力:　２部グラフ $G=(U, V; E)$

問題:　最大サイズのマッチングは？

どの点にも
１本以下の辺が接続



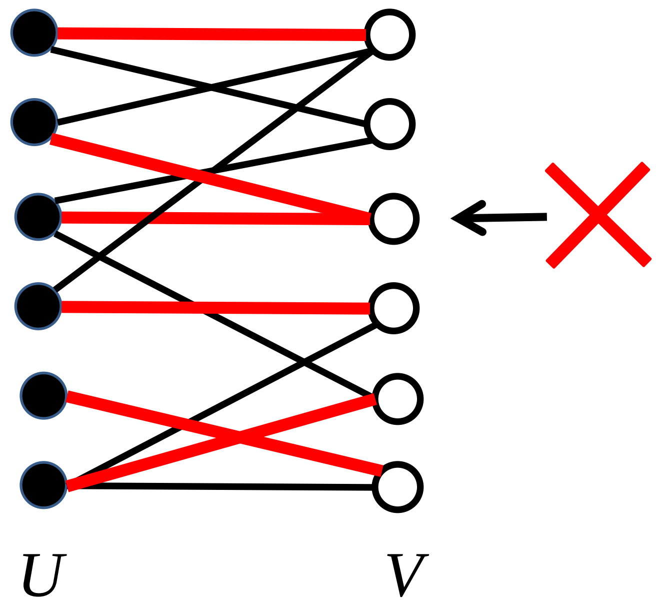
- 学生 と 研究室
- 病院 と 研修医
- 労働者 と 仕事　etc.

マッチング

入力:　２部グラフ $G=(U, V; E)$

問題:　最大サイズのマッチングは？

どの点にも
１本以下の辺が接続



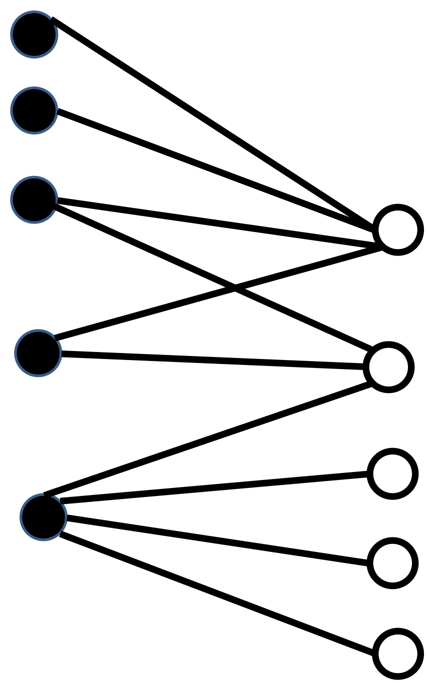
- 学生 と 研究室
- 病院 と 研修医
- 労働者 と 仕事　etc.

マッチング

入力: ２部グラフ $G=(U, V; E)$

問題: 最大サイズのマッチングは？

どの点にも
１本以下の辺が接続

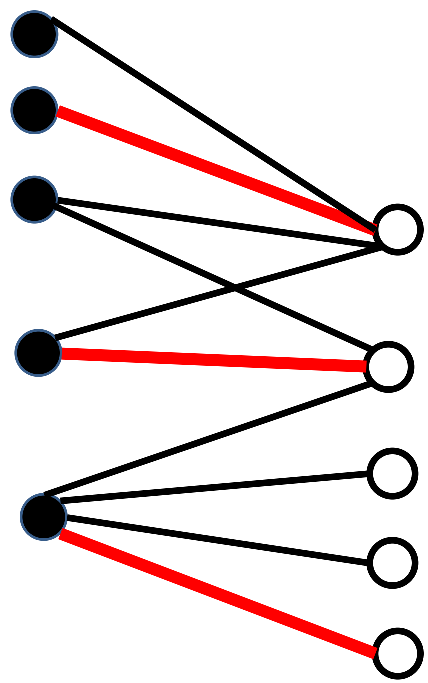


マッチング

入力:　２部グラフ $G=(U, V; E)$

問題:　最大サイズの**マッチング**は？

どの点にも
１本以下の辺が接続



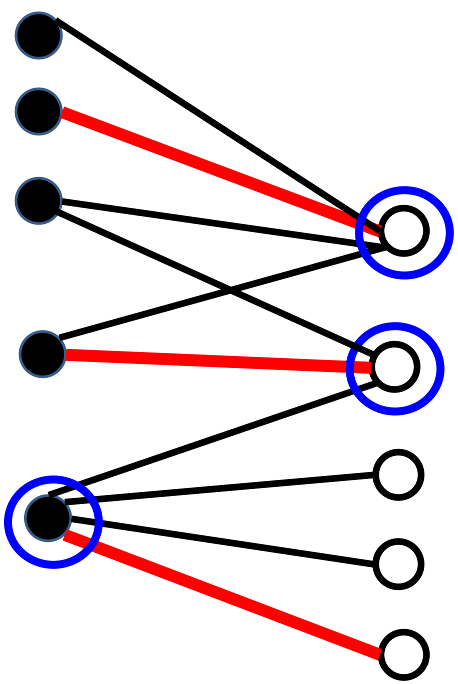
サイズ４以上の
マッチングが無い証明は？

マッチングの上界

入力:　２部グラフ $G=(U, V; E)$

問題:　最大サイズのマッチングは？

どの点にも
１本以下の辺が接続



サイズ４以上の
マッチングが無い証明は？

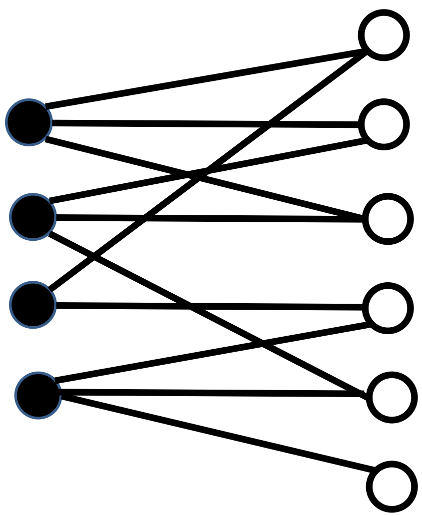
どの辺を見ても
どちらかの端点は ○ の点

○ は頂点被覆

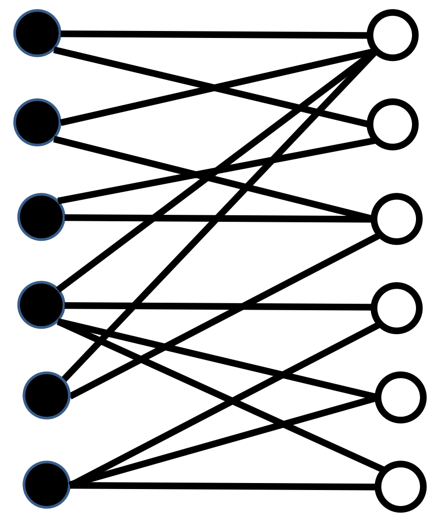
○ の数以下しか
辺は選べない

他の例：最大のマッチングは？

例１

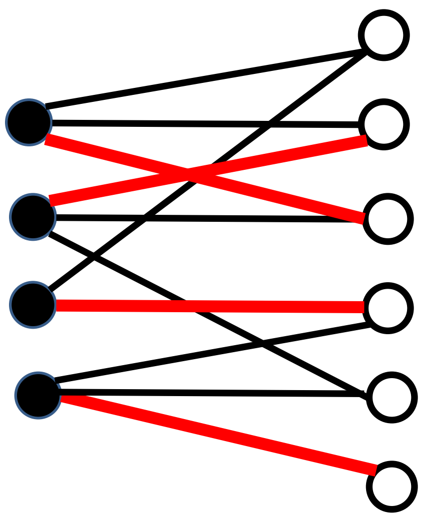


例２

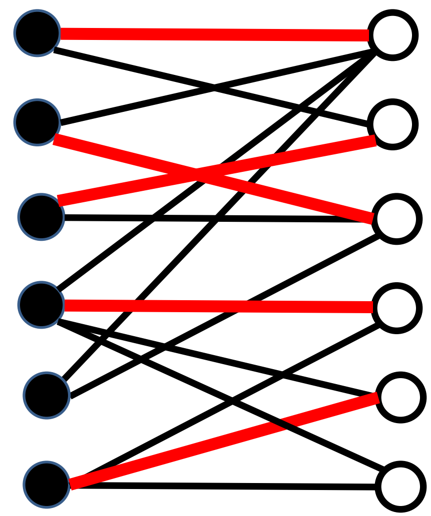


他の例：最大のマッチングは？

例１



例２

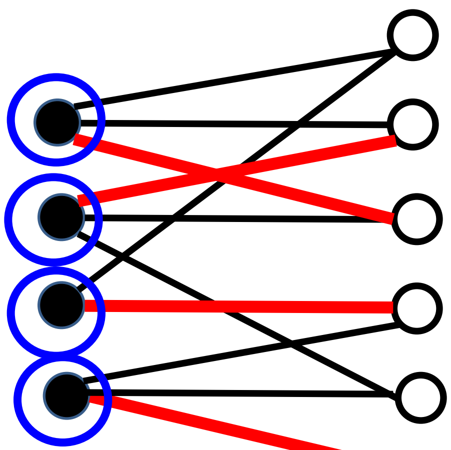


サイズ5以上の
マッチングは無い？

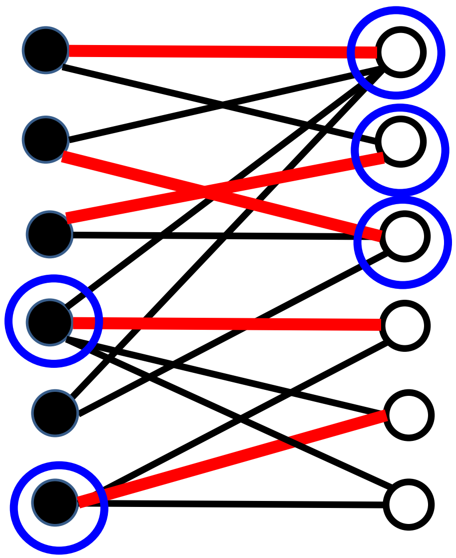
サイズ6以上の
マッチングは無い？

他の例：最大のマッチングは？

例１



例２



サイズ5以上の
マッチングは無い？

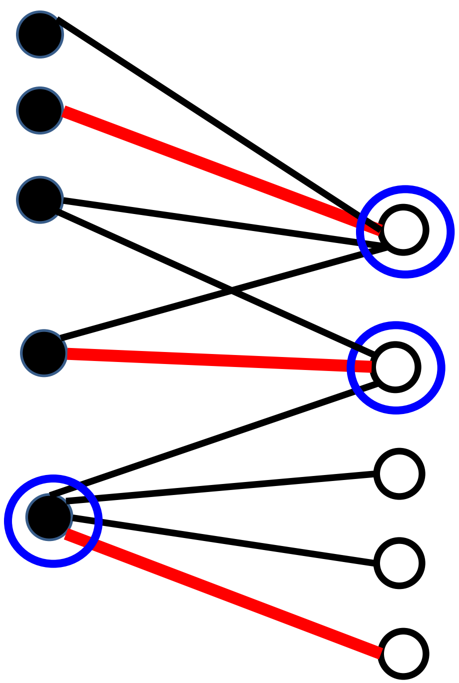
サイズ6以上の
マッチングは無い？

マッチングの上界

入力:　２部グラフ G=(U, V; E)

問題:　最大サイズのマッチングは？

どの点にも
１本以下の辺が接続



~~任意の~~マッチングのサイズ

最大の

≦

~~任意の~~ 頂点被覆のサイズ

最小の

<u>嬉しいこと</u>

- サイズ k のマッチング と
- サイズ k の頂点被覆

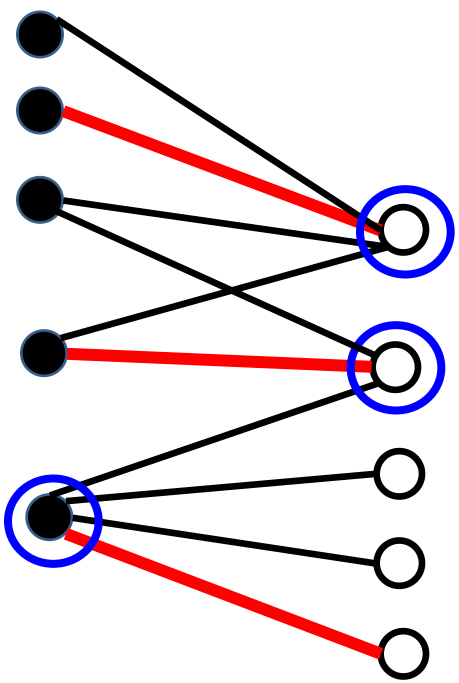
が見つかれば，それは最大マッチング

マッチングの双対定理

入力:　２部グラフ $G=(U, V; E)$

問題:　最大サイズのマッチングは？

どの点にも
１本以下の辺が接続



最大の マッチングのサイズ

~~≥~~　=

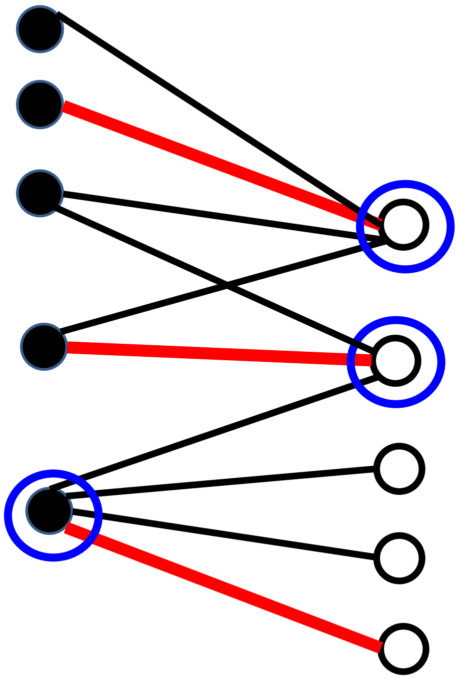
最小の 頂点被覆のサイズ

[Kőnig, 1931]

意味

うまく マッチング と 頂点被覆 を
選べば最適性が保証できる

マッチングの双対定理



任意のマッチング	最大の マッチング
≤	~~≤~~ =
任意の 頂点被覆	最小の 頂点被覆
簡単	[Kőnig, 1931]

<u>双対定理の意義</u>

- 理論的興味：
  一見関係ない値が等しくなる
- 最適性の保証に使える
  アルゴリズムの設計

双対性：組合せ最適化における重要な概念

1日目の話

目標

組合せ最適化の様々な問題において
双対性が現れることを紹介

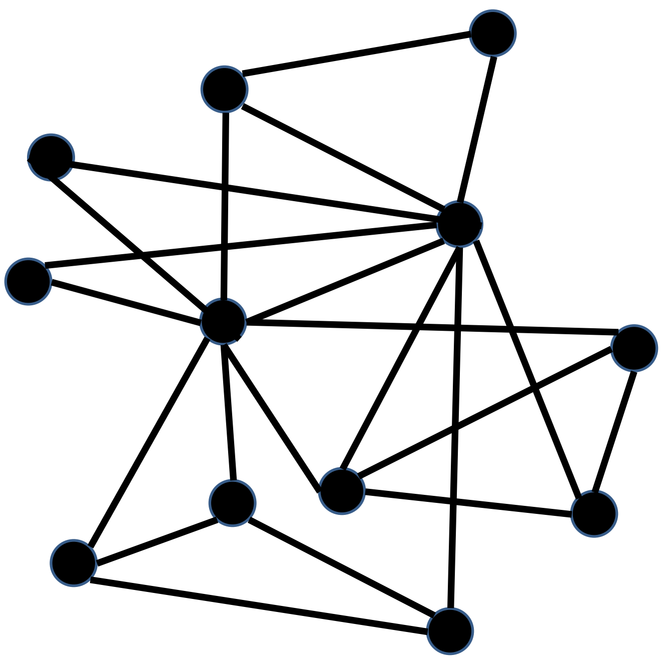
- 双対性の例：２部グラフのマッチング
- 一般グラフのマッチング
- Menger の定理
- 全域木
- 有向全域木

一般グラフのマッチング

入力: グラフ $G=(V, E)$

問題: 最大サイズのマッチングは？

1本以下の枝が接続



任意のマッチングのサイズ

$\leq$

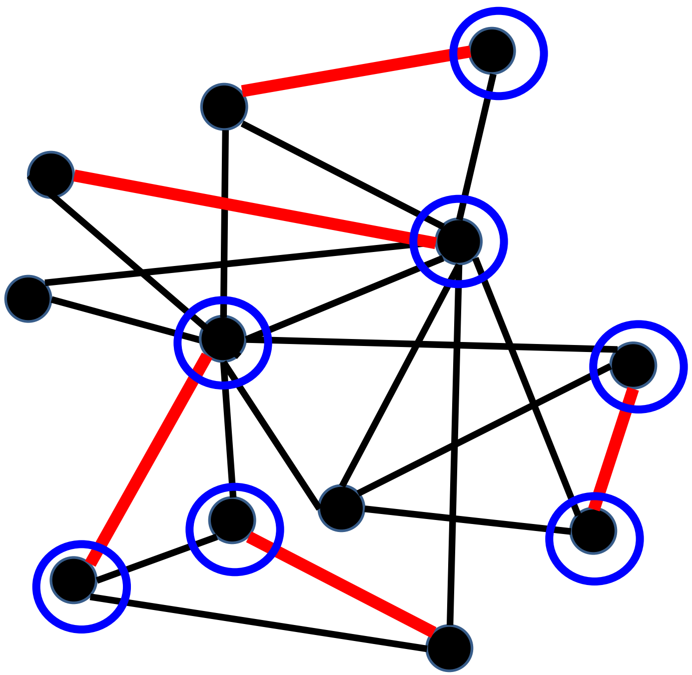
任意の 頂点被覆のサイズ

一般グラフのマッチング

入力:　グラフ $G=(V, E)$

1本以下の枝が接続

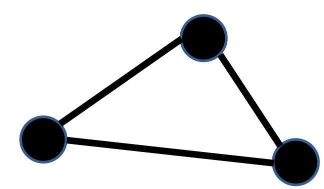
問題:　最大サイズのマッチングは？



任意のマッチングのサイズ	5
≦	
任意の 頂点被覆のサイズ	7

サイズ6以上の
マッチングが無い証明は？

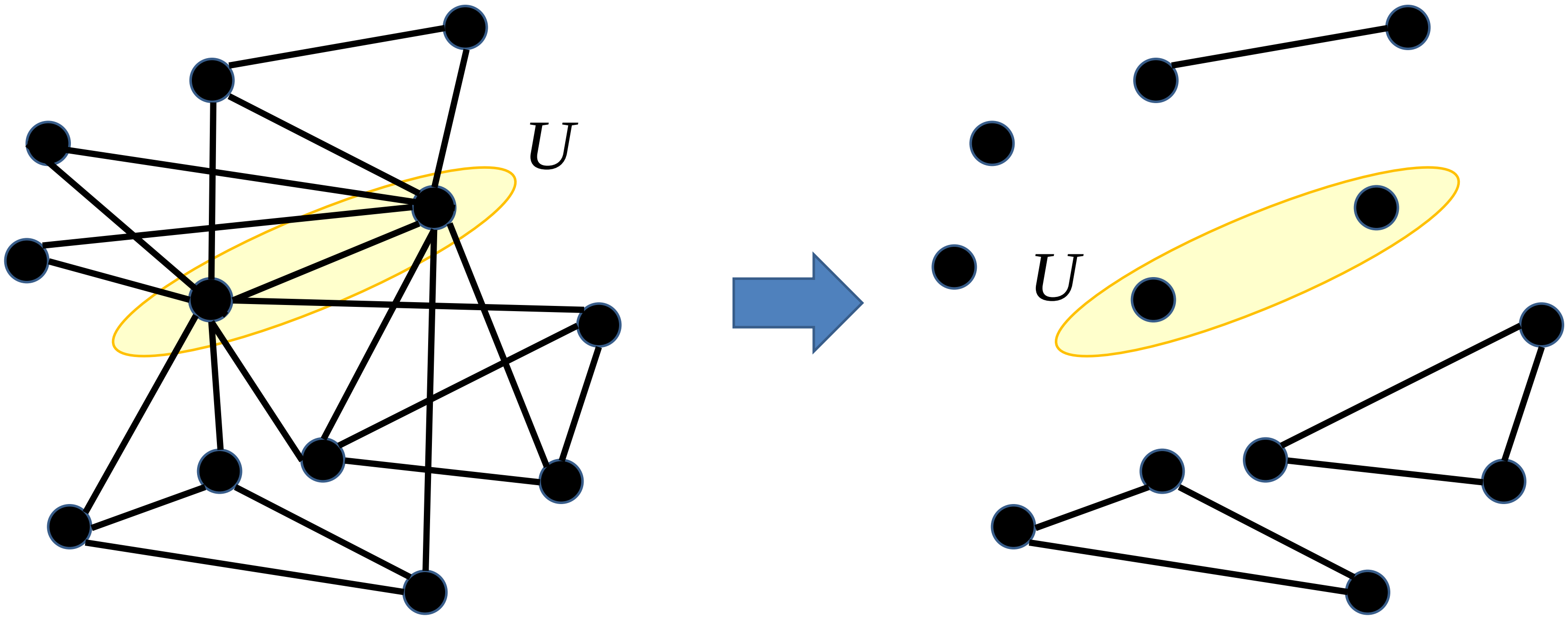
例

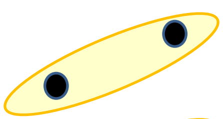


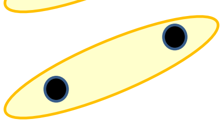
最大マッチング ≠ 最小頂点被覆

マッチングの上界

サイズ6以上の
マッチングが無い証明は？



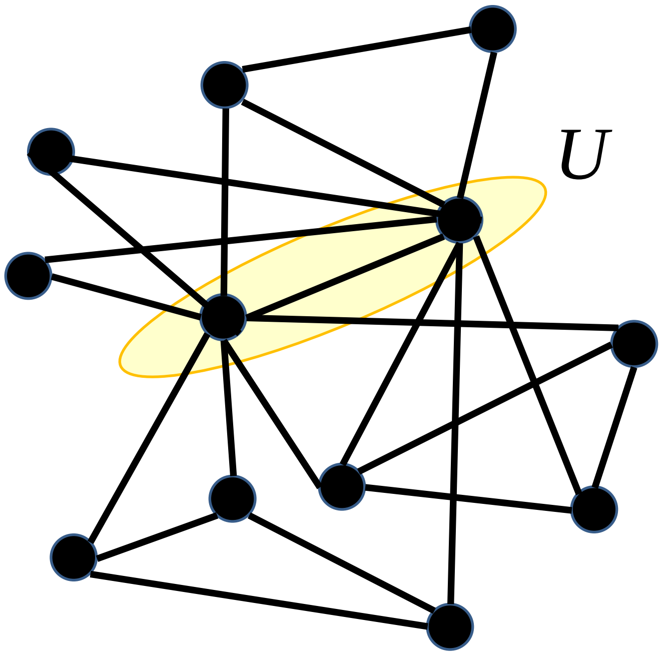
 を使わないマッチング ≦ 3 $\dfrac{|V|-|U|-odd(G-U)}{2}$

 を使う　　マッチング ≦ 2 $|U|$

合計 ≦ 5 $\dfrac{|V|+|U|-odd(G-U)}{2}$

マッチングの上界

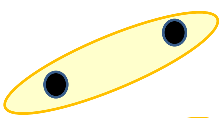
サイズ6以上の
マッチングが無い証明は？

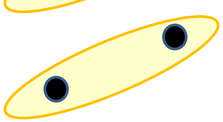


任意のマッチングのサイズ

$\wedge\!\!\|$

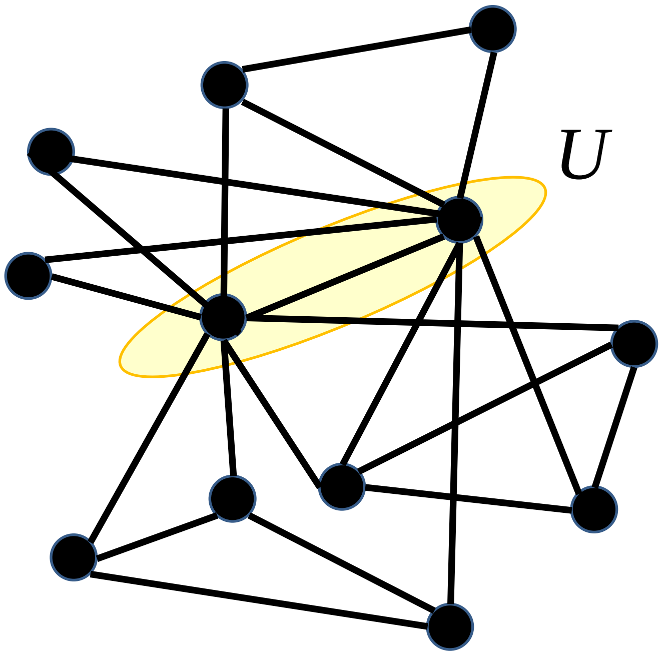
任意の U: $\dfrac{|V|+|U|-odd(G-U)}{2}$


を使わないマッチング ≦ 3 ⇐ $\dfrac{|V|-|U|-odd(G-U)}{2}$


を使う　　マッチング ≦ 2 ⇐ $|U|$

合計 ≦ 5 ⇐ $\dfrac{|V|+|U|-odd(G-U)}{2}$

マッチングの最大最小定理



最大マッチングのサイズ

$$\|$$

$$\min_{U} \frac{|V| + |U| - odd(G-U)}{2}$$

[Tutte, 1947], [Berge, 1958]

1日目の話

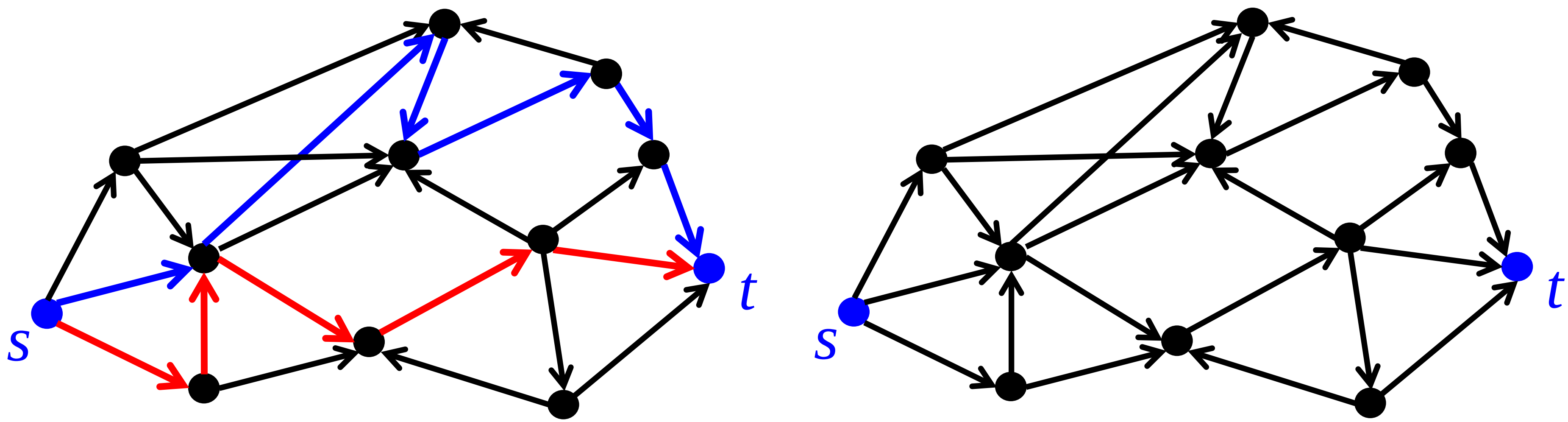
目標

組合せ最適化の様々な問題において
双対性が現れることを紹介

- 双対性の例：２部グラフのマッチング
- 一般グラフのマッチング
- Menger の定理
- 全域木
- 有向全域木

s-t パスの詰込み

- 有向グラフ $D=(V,A)$, 頂点 $s,t\in V$

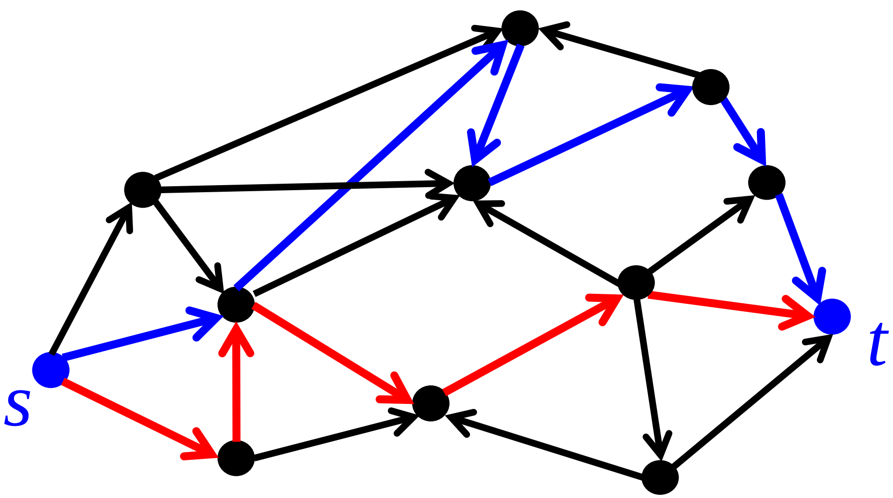


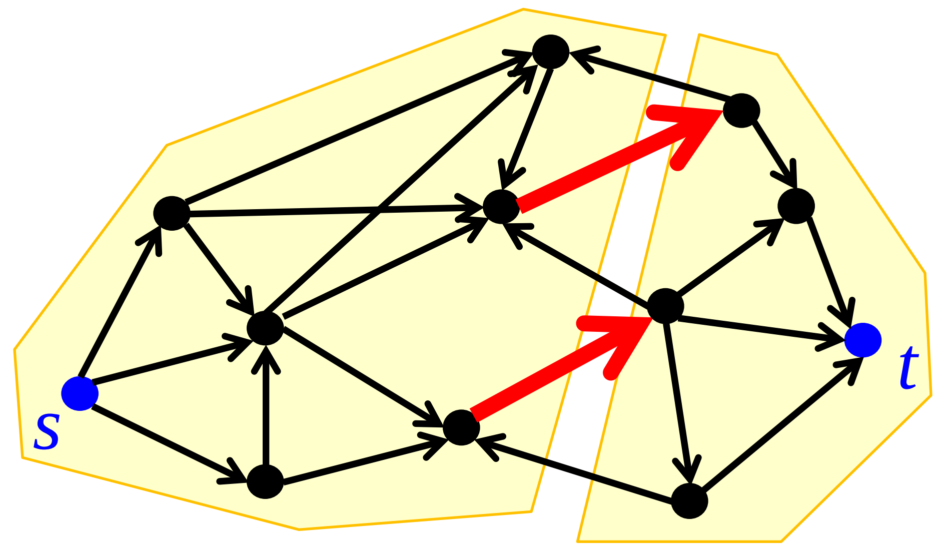
互いに枝を共有しない s-t パス をたくさん見つけたい

3つの s-t パス が無い証明は？

s-t パスの詰込み

- 有向グラフ $D = (V, A)$, 頂点 $s, t \in V$





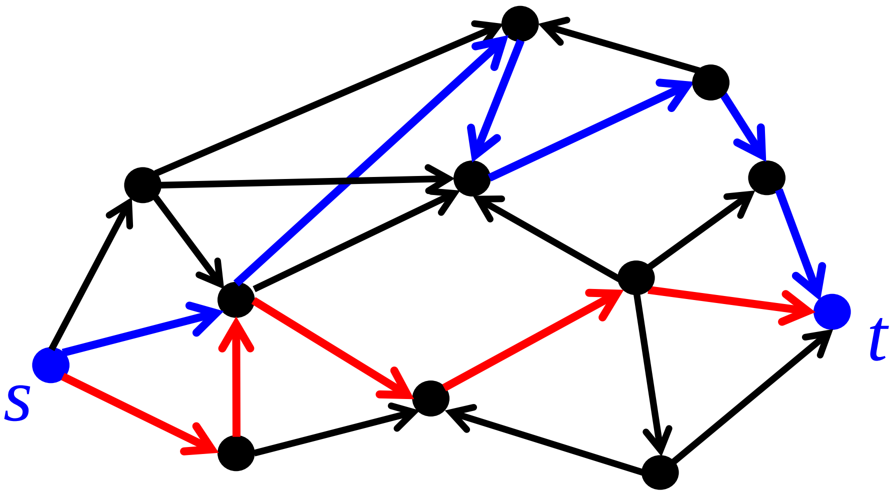
互いに枝を共有しない s-t パス をたくさん見つけたい

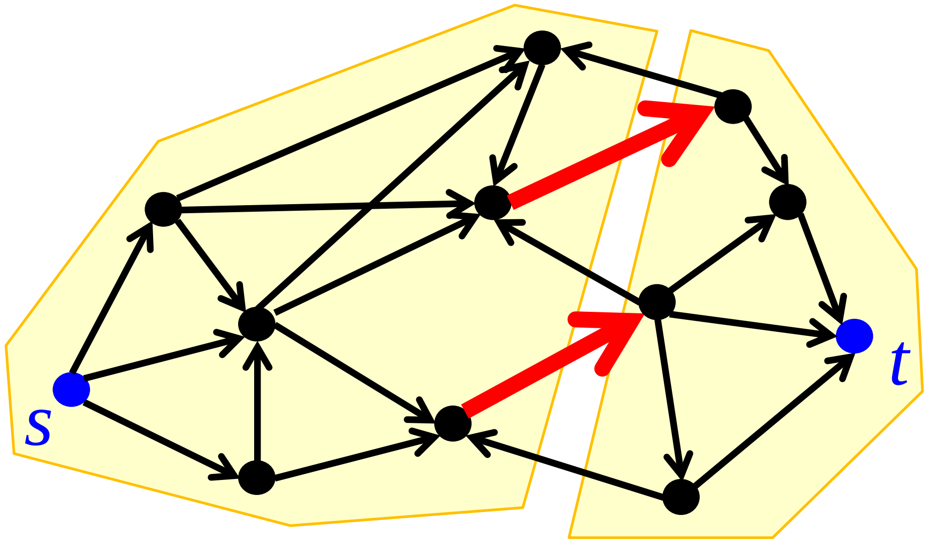
3つの s-t パス が無い証明は？

枝素な s-t パス の最大数 ≦ 任意の s-t カット のサイズ

Menger の定理（最大流最小カット定理）

- 有向グラフ $D=(V,A)$, 頂点 $s,t\in V$





枝素な s-t パス の最大数 ＝ 最小の s-t カット のサイズ

[Menger, 1927], [Ford-Fulkerson, 1956]

枝素な s-t パス の最大数 $\leqq$ 任意の s-t カット のサイズ

1日目の話

目標

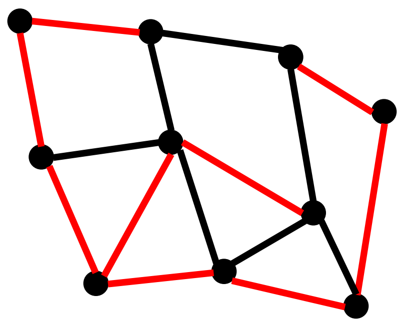
組合せ最適化の様々な問題において
双対性が現れることを紹介

- 双対性の例：２部グラフのマッチング
- 一般グラフのマッチング
- Menger の定理
- 全域木
- 有向全域木

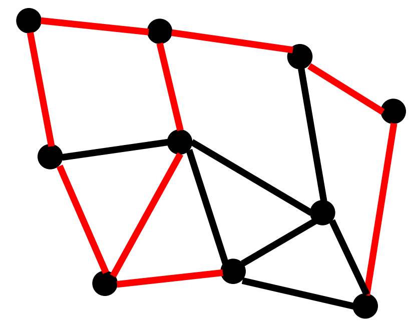
全域木の詰込み

全域木 (spanning tree) ＝ すべての頂点を繋ぐ 木

閉路無し

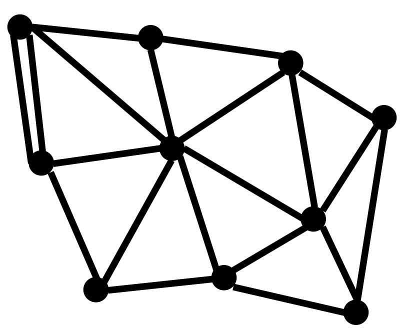


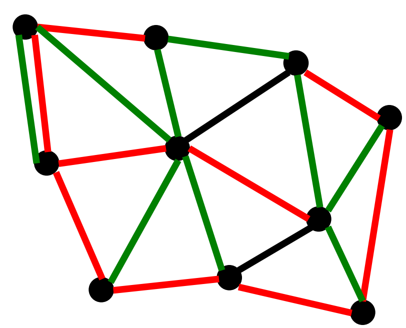
OK



NG

互いに枝を共有しない k 個の全域木を見つけたい





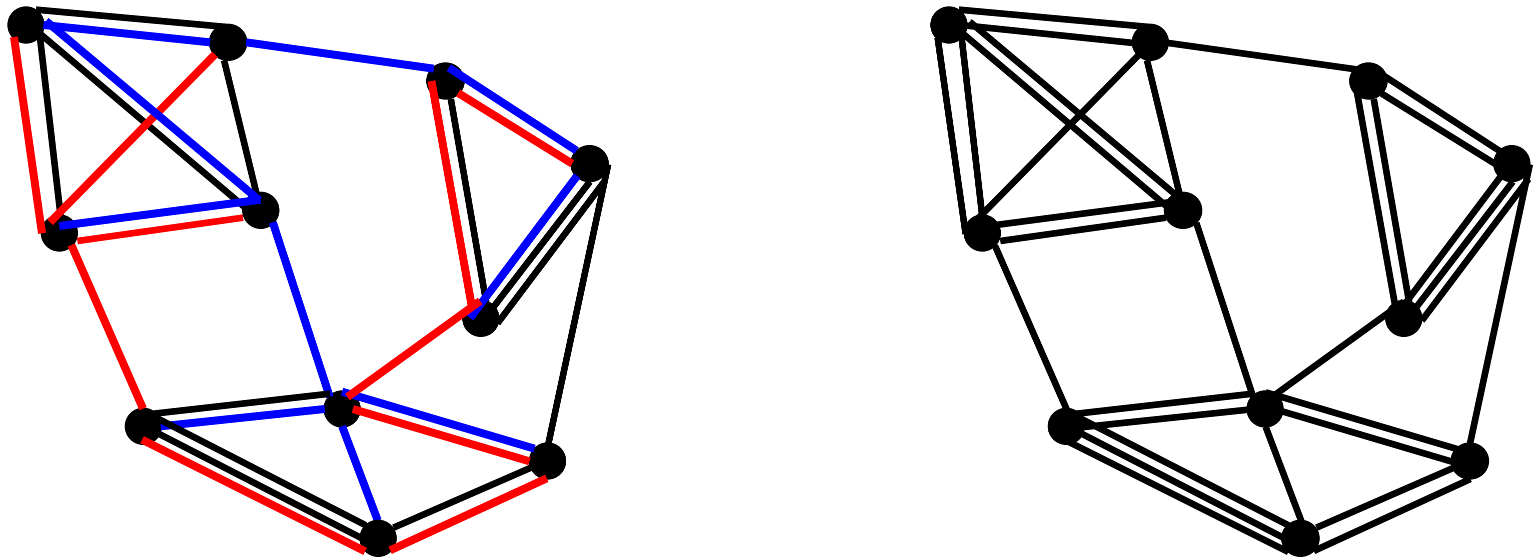
$k = 2$

問題

最大で何個？

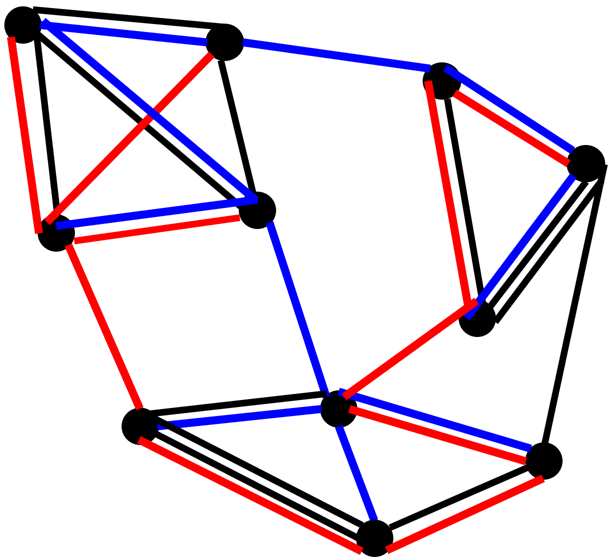
全域木詰込みの上界

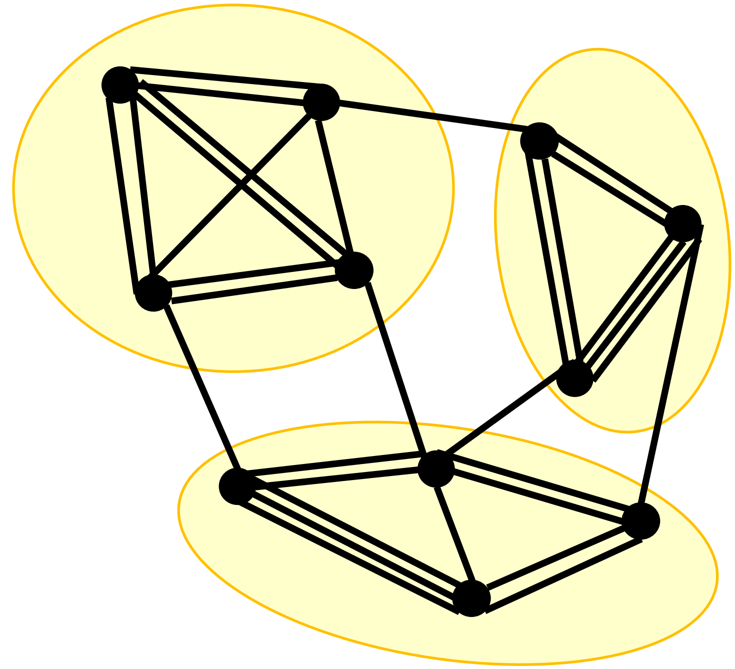
3つの全域木が無い証明は？



全域木詰込みの上界

3つの全域木が無い証明は？



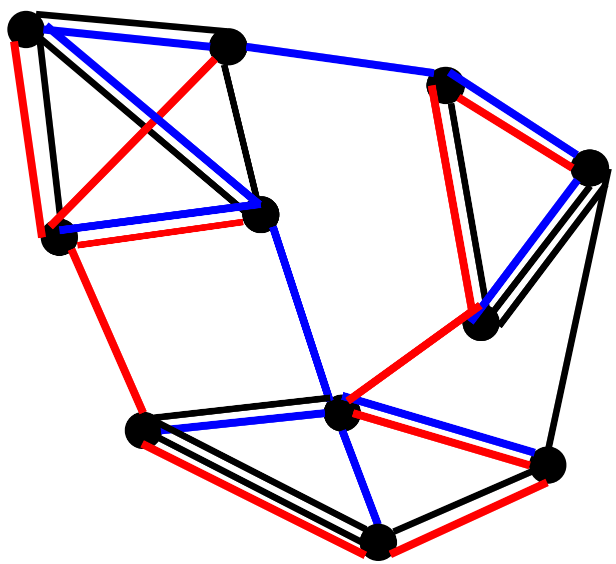


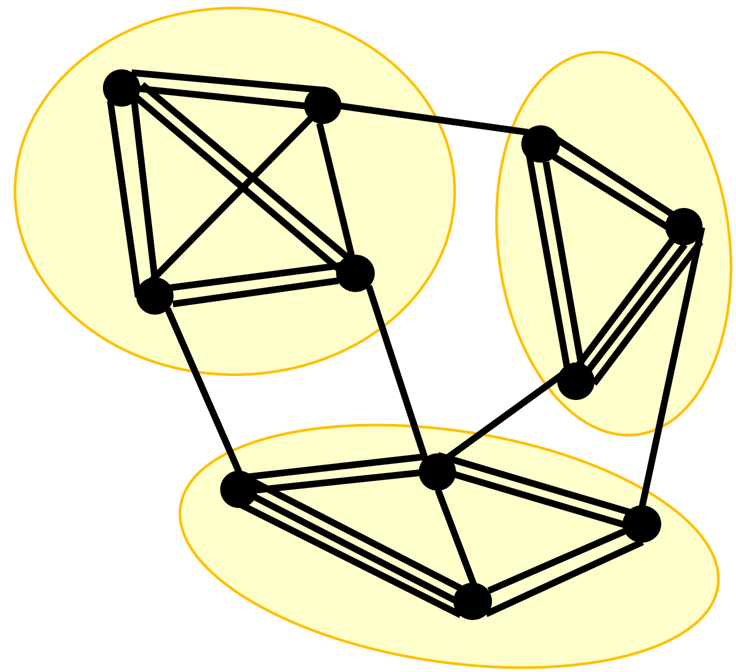
全域木には をまたぐ枝が２本以上

$$(\text{全域木の数}) \le \left\lfloor \frac{\text{をまたぐ枝数}}{2} \right\rfloor = 2$$

全域木詰込みの上界

3つの全域木が無い証明は？





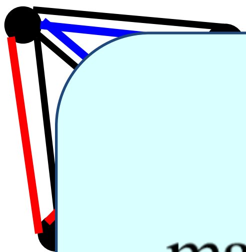
全域木には をまたぐ枝が２本以上

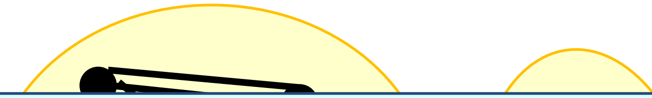
分割数 - 1

<u>任意の分割に対して</u>

$$(\text{全域木の数}) \leq \left\lfloor \frac{\text{をまたぐ枝数}}{\text{分割数}\ -1} \right\rfloor$$

全域木詰込みの最大最小定理





$$\max\ (\text{全域木の数}) = \min_{\text{分割}} \left\lfloor \frac{\text{をまたぐ枝数}}{\text{分割数}\ -1} \right\rfloor$$

[Tutte, 1961], [Nash-Williams, 1961]

全域木には をまたぐ枝が 2 本以上

分割数 - 1

<u>任意の分割に対して</u>

$$(\text{全域木の数}) \leq \left\lfloor \frac{\text{をまたぐ枝数}}{\text{分割数}\ -1} \right\rfloor$$

1日目の話

目標

組合せ最適化の様々な問題において
双対性が現れることを紹介

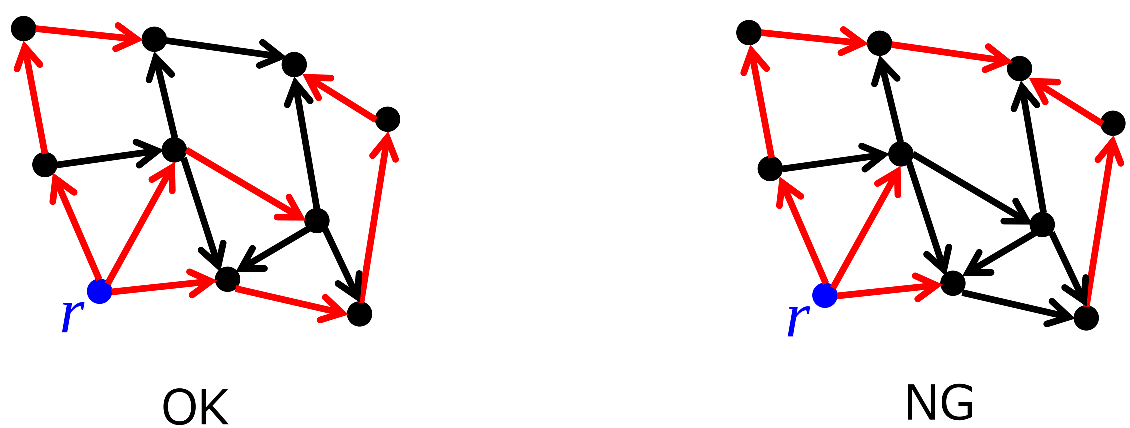
- 双対性の例：２部グラフのマッチング
- 一般グラフのマッチング
- Menger の定理
- 全域木
- 有向全域木

有向全域木

- 有向グラフ $D=(V,A)$, 頂点 $r \in V$

r-有向全域木 (r-arborescence)

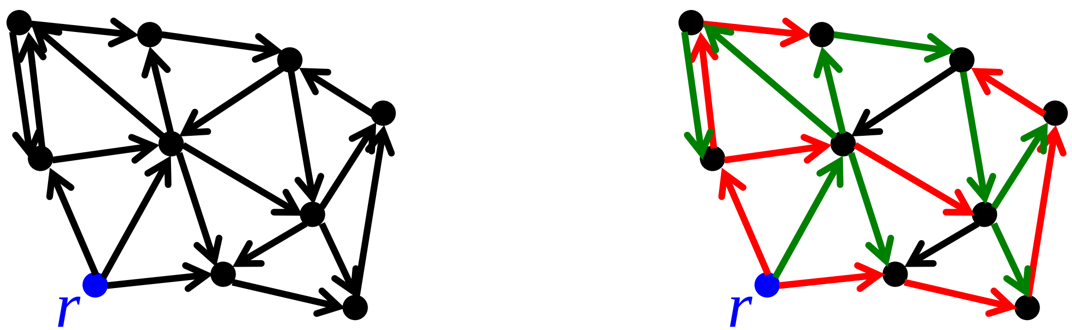
$$= \begin{cases} \bullet\ \text{向きを無視すると全域木} \\ \bullet\ \text{すべての点に } r \text{ から到達可能} \end{cases}$$



（例．すべての点への通信，避難場所への経路）

有向全域木の詰込み

互いに枝を共有しない k 個の r-有向全域木を見つけたい



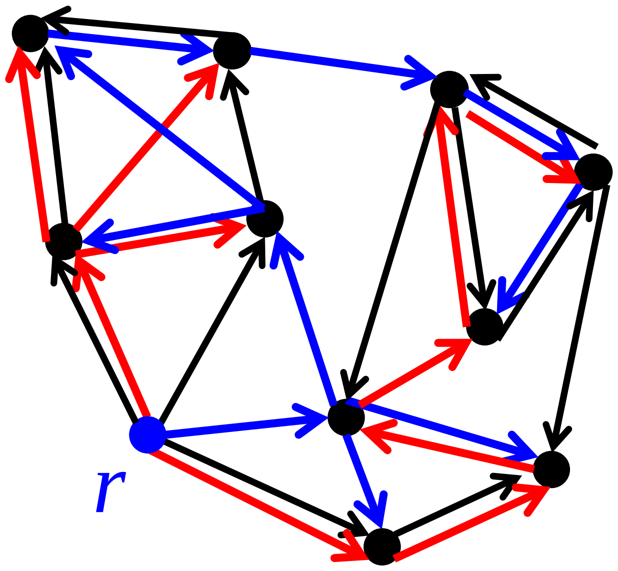
$k = 2$

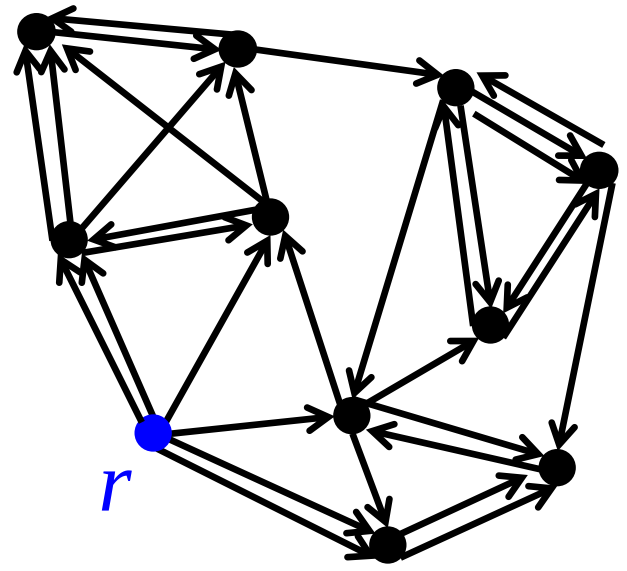
問題

最大で何個見つけられるか？

有向全域木詰込みの上界

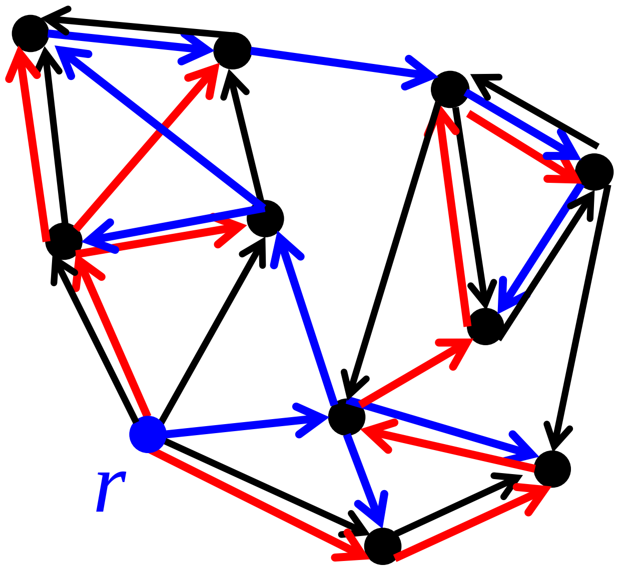
3つの有向全域木が無い証明は？

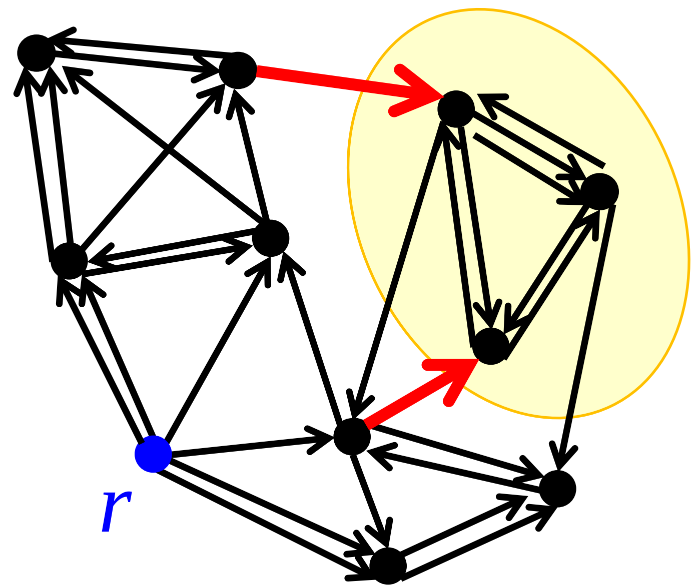




有向全域木詰込みの上界

3つの有向全域木が無い証明は？



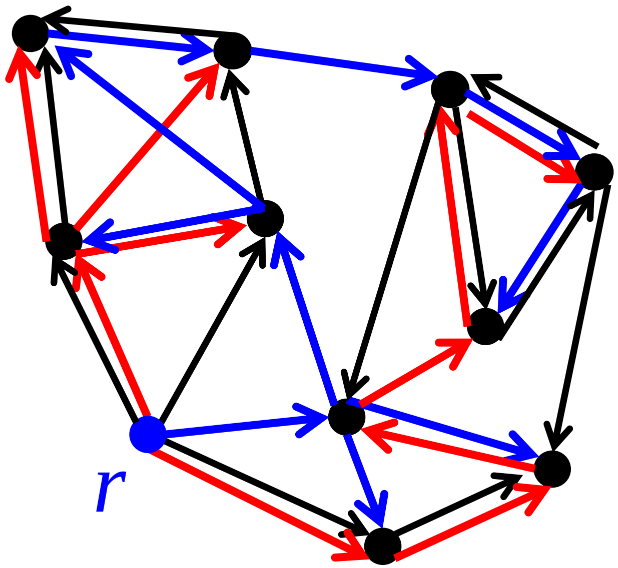


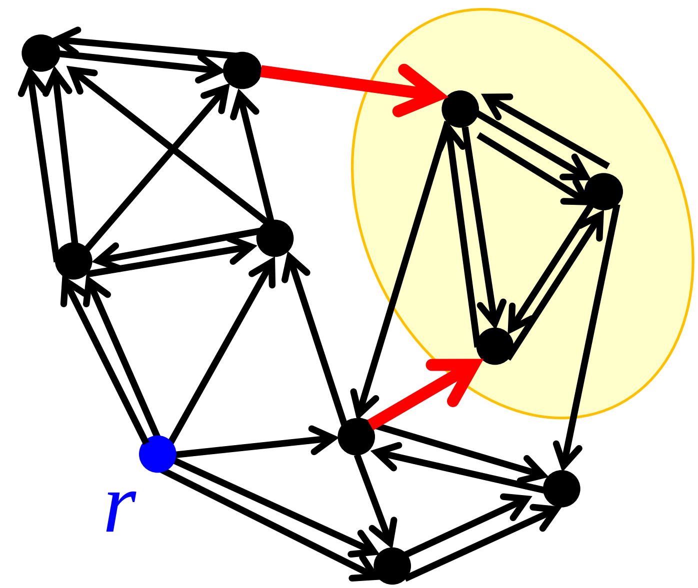
有向全域木には　に入る枝あり

(有向全域木の数) ≤ 2

有向全域木詰込みの上界

3つの有向全域木が無い証明は？





有向全域木には　に入る枝あり

r を含まない任意の　に対して

(有向全域木の数) ≤ (　に入る枝数)

有向全域木詰込みの最大最小定理

3つの有向全域木が無い証明は？

max (有向全域木の数) = min (に入る枝数)

r を含まない集合

[Edmonds, 1973]

有向全域木には に入る枝あり

<u>r を含まない任意の に対して</u>

(有向全域木の数) ≤ (に入る枝数)

1日目まとめ

目標

組合せ最適化の様々な問題において
双対性が現れることを紹介

- 双対性の例：２部グラフのマッチング
- マッチング
- Menger の定理
- 全域木
- 有向全域木

2日目に

3日目に

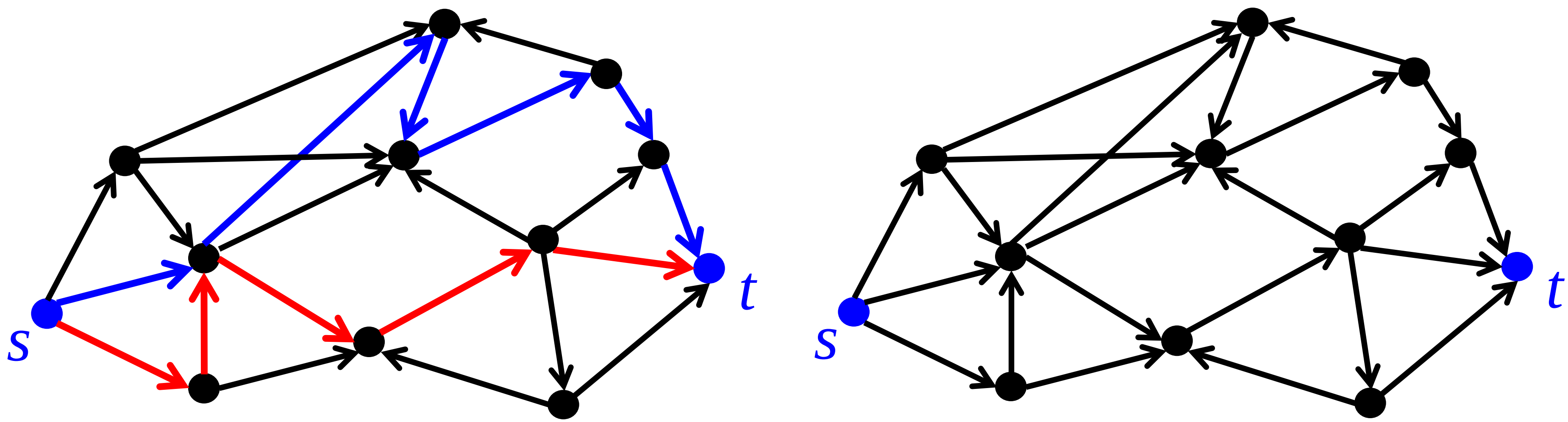
2日目

目標

- パス詰込みの双対性を示す
- 2部マッチングの双対性を示す

s-t パスの詰込み

- 有向グラフ $D = (V, A)$, 頂点 $s, t \in V$

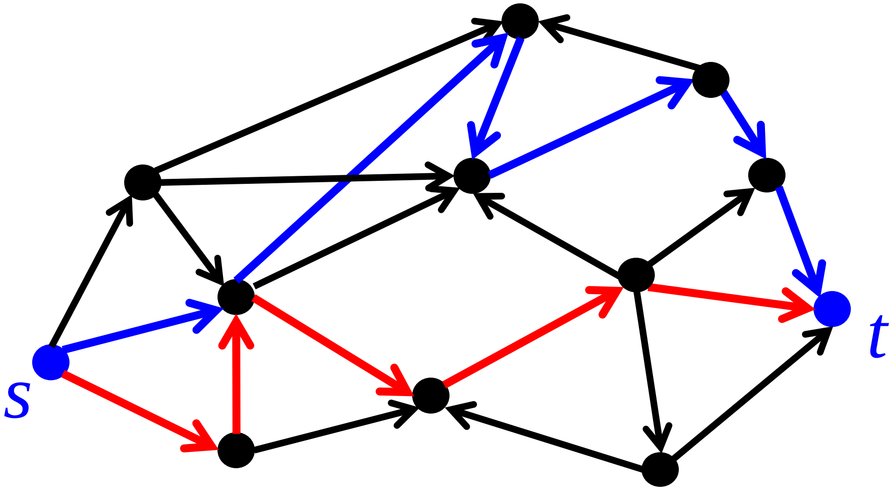


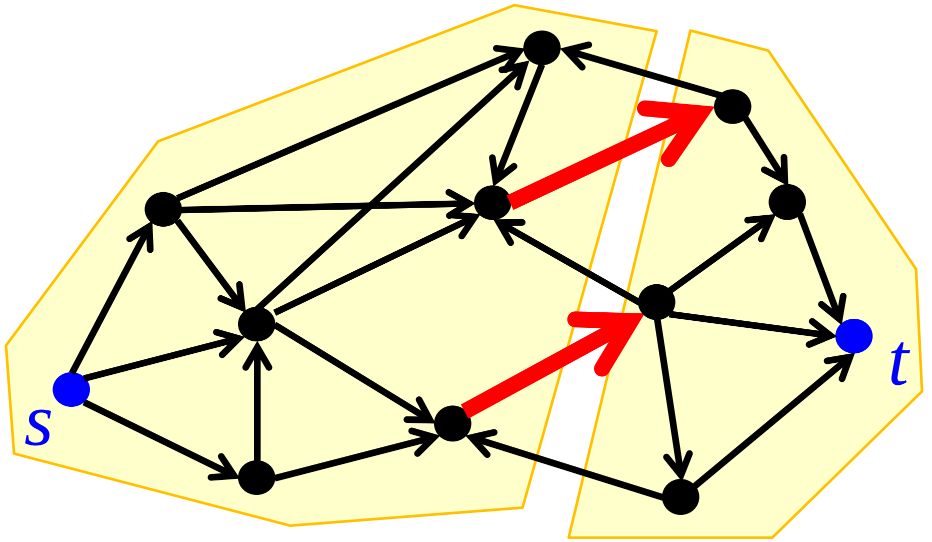
互いに枝を共有しない s-t パス をたくさん見つけたい

3つの s-t パス が無い証明は？

s-t パスの詰込み

- 有向グラフ $D = (V, A)$, 頂点 $s, t \in V$





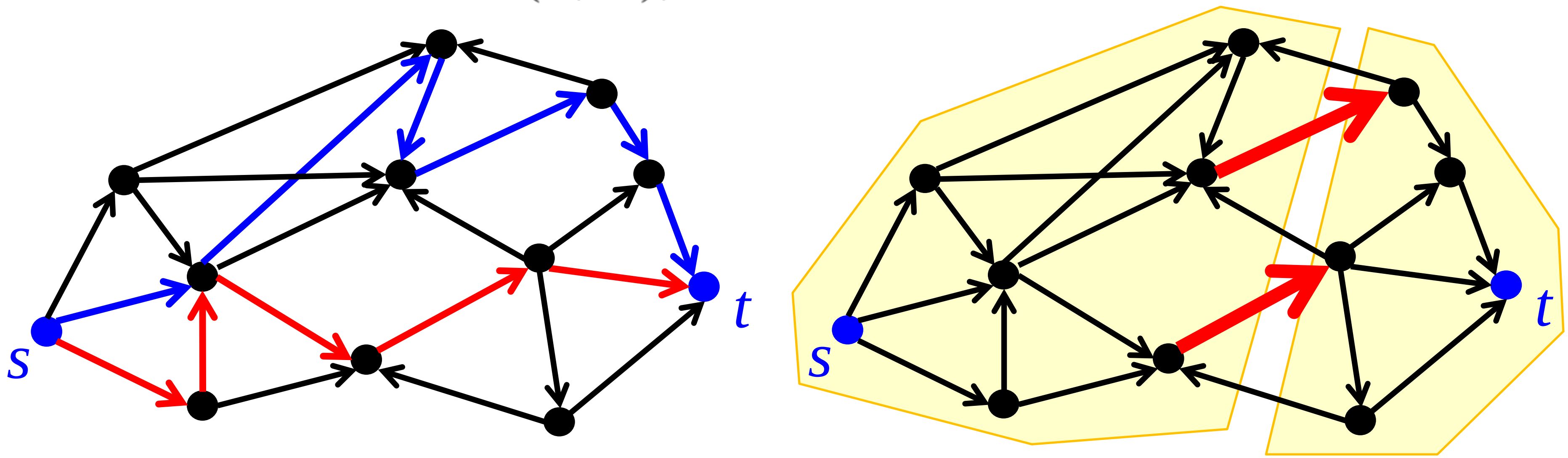
互いに枝を共有しない s-t パス をたくさん見つけたい

3つの s-t パス が無い証明は？

枝素な s-t パス の最大数 ≦ 任意の s-t カット のサイズ

Menger の定理 (最大流最小カット定理)

- 有向グラフ $D = (V, A)$, 頂点 $s, t \in V$



枝素な s-t パス の最大数 ＝ 最小の s-t カット のサイズ

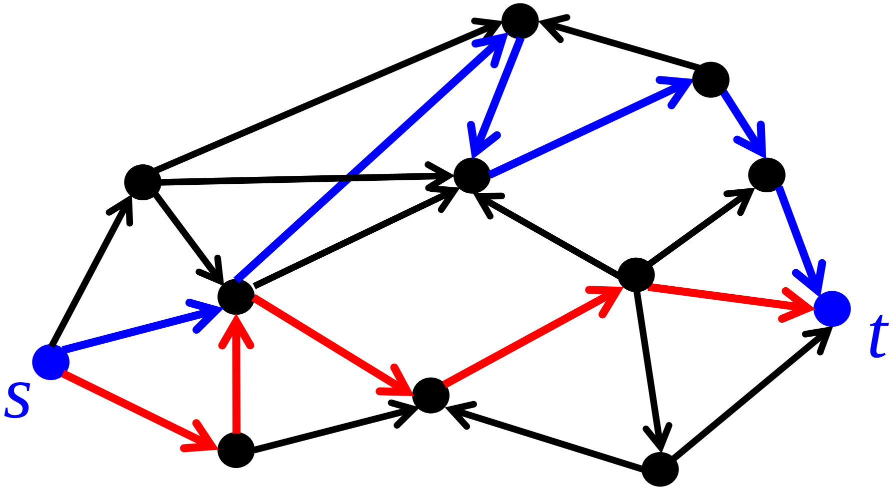
[Menger, 1927], [Ford-Fulkerson, 1956]

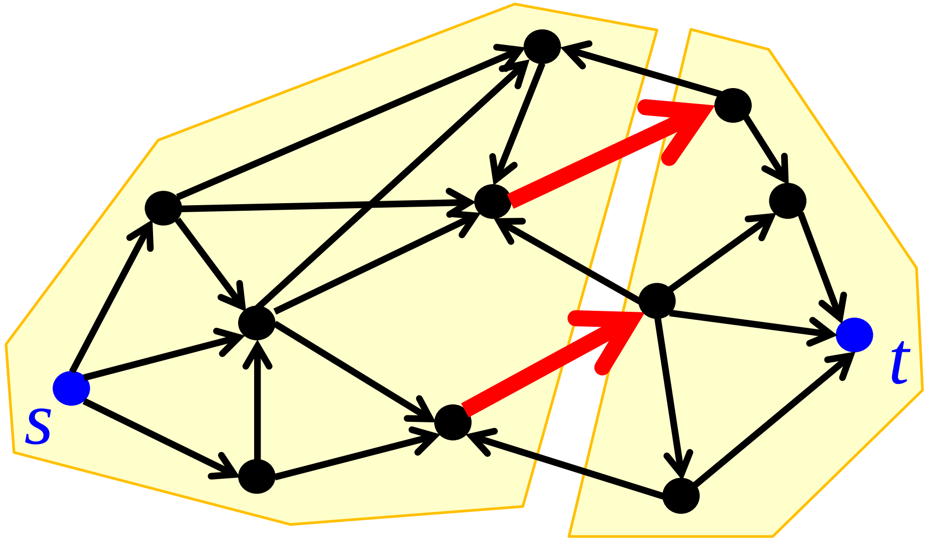
枝素な s-t パス の最大数 $\leqq$ 任意の s-t カット のサイズ

Menger の定理の証明

<u>目標</u>

- ➢ k 本の枝素な s-t パス
- ➢ サイズ k の s-t カット　を見つける



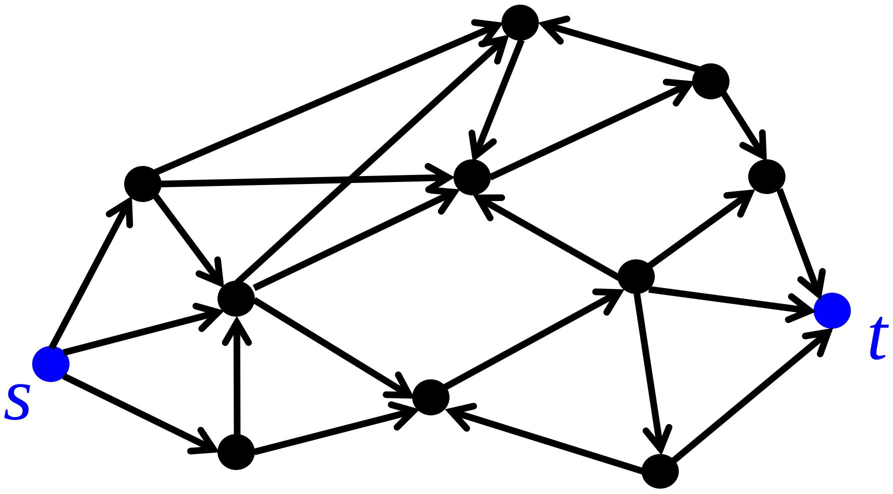


枝素な s-t パスの最大数 $\leqq$ 任意の s-t カットのサイズ

Menger の定理の証明

<u>目標</u>

- ➢ k 本の枝素な s-t パス
- ➢ サイズ k の s-t カット　を見つける

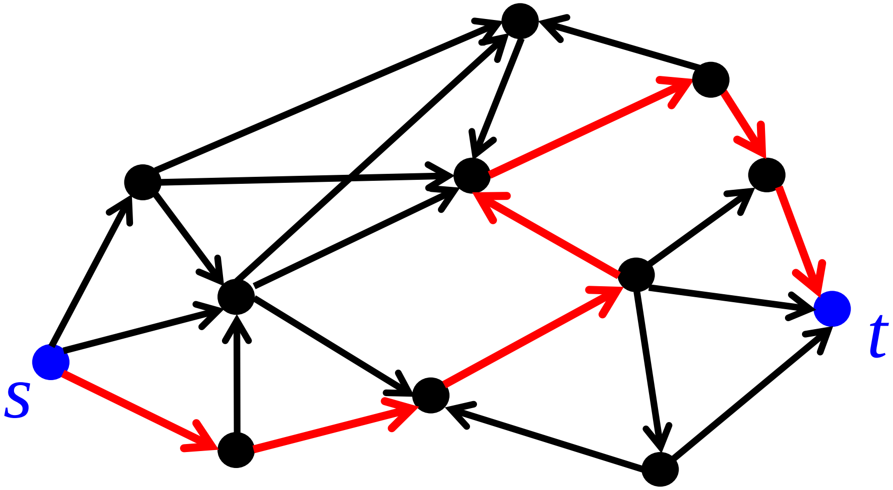


枝素な s-t パス の最大数 ≦ 任意の s-t カット のサイズ

Menger の定理の証明

目標

- k 本の枝素な s-t パス
- サイズ k の s-t カット　を見つける

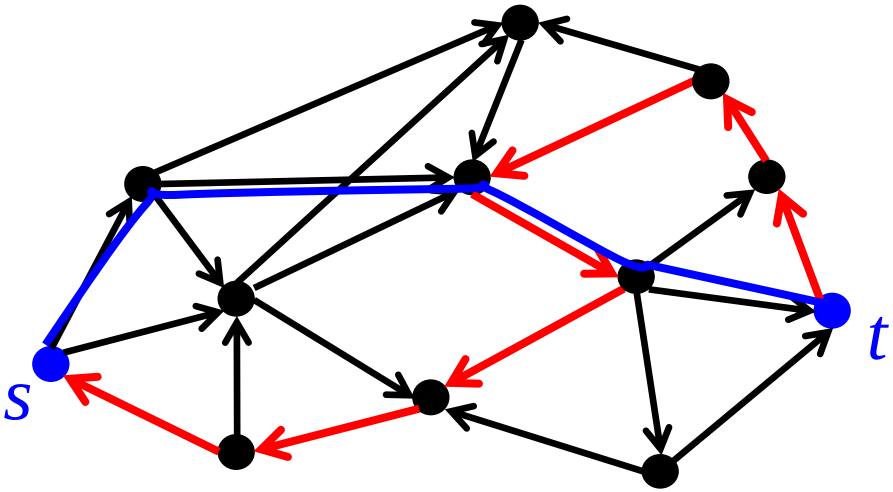


1. s-t パス を１つ探す
2. 使っている枝を逆向きにして s-t パス を１つ探す
3. 2を繰り返しパスを増やす

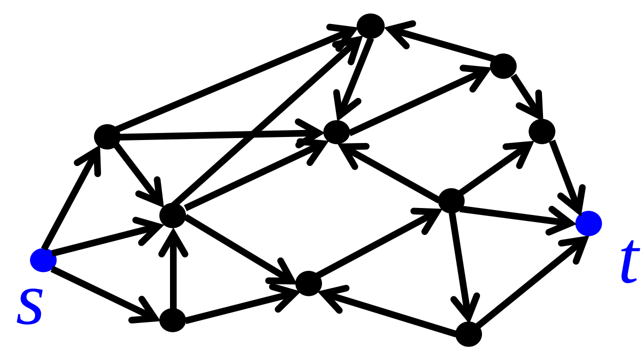
Menger の定理の証明

目標

- k 本の枝素な s-t パス
- サイズ k の s-t カット　を見つける

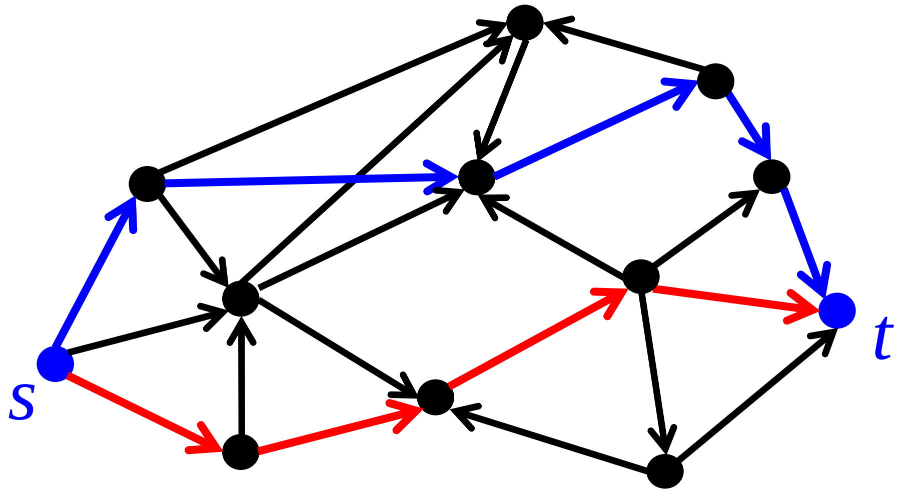


1. s-t パス を１つ探す
2. 使っている枝を逆向きにして s-t パス を１つ探す
3. 2を繰り返しパスを増やす

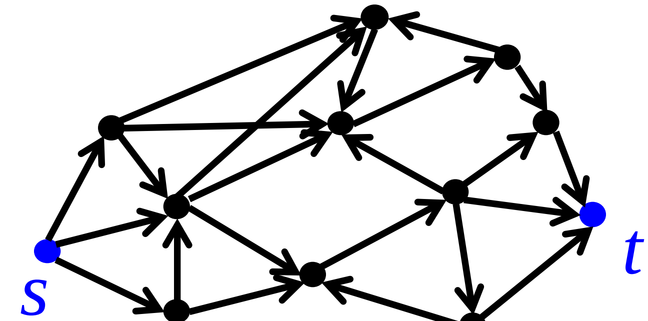


Menger の定理の証明

目標
- k 本の枝素な s-t パス
- サイズ k の s-t カット　を見つける

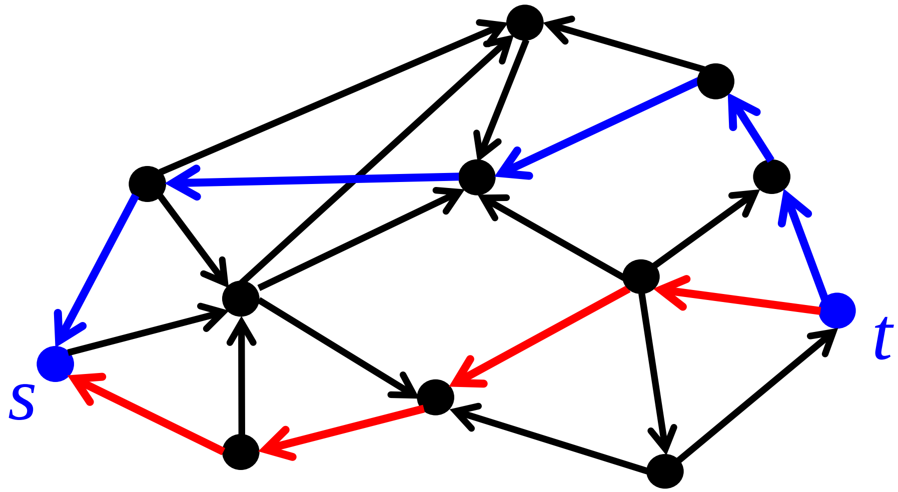


1. s-t パス を１つ探す
2. 使っている枝を逆向きにして s-t パス を１つ探す
3. 2を繰り返しパスを増やす

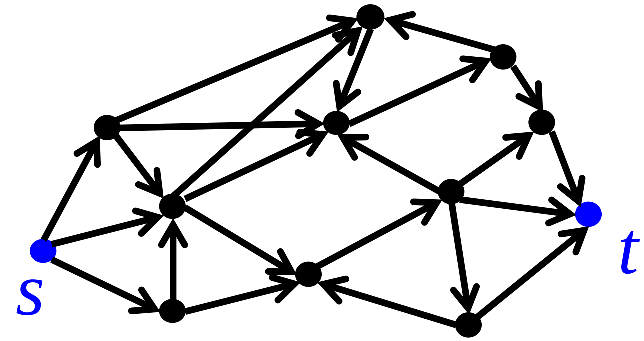


Menger の定理の証明

目標
- ➢ k 本の枝素な s-t パス
- ➢ サイズ k の s-t カット　を見つける



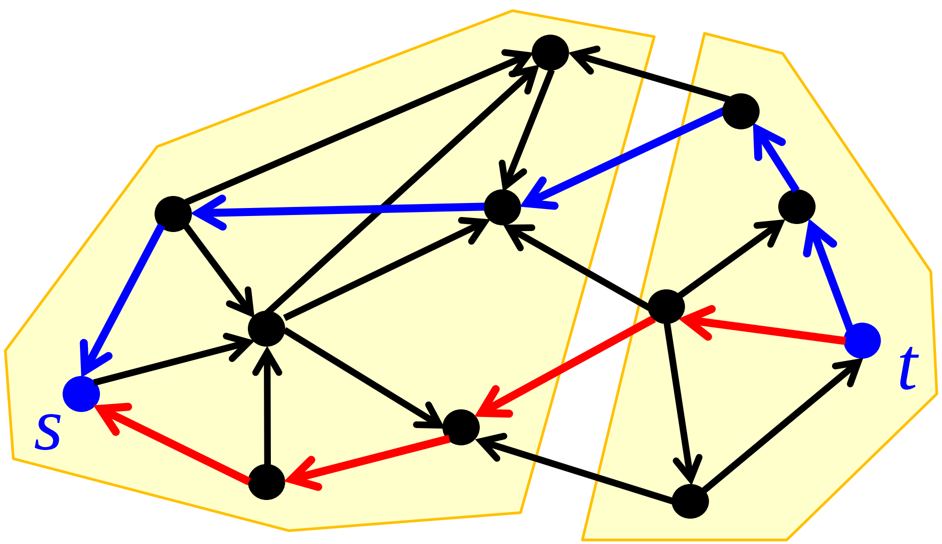
1. s-t パスを１つ探す
2. 使っている枝を逆向きにして s-t パスを１つ探す
3. 2を繰り返しパスを増やす



Menger の定理の証明

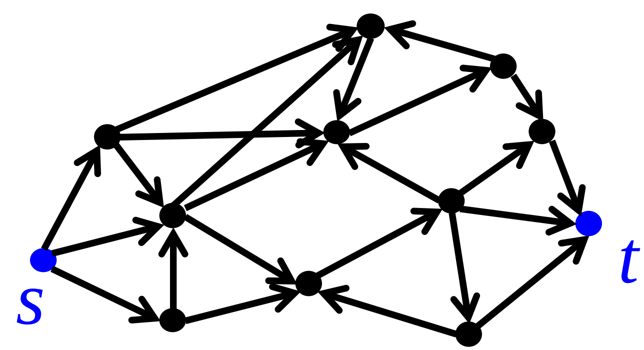
<u>目標</u>

- k 本の枝素な s-t パス
- サイズ k の s-t カット　を見つける



s から到達可能　　s から到達不可能

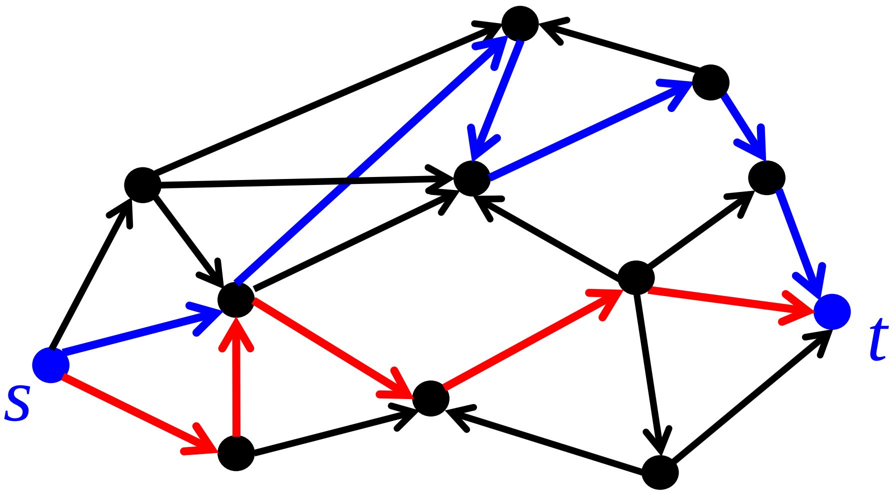
1. s-t パス を１つ探す
2. 使っている枝を逆向きにして s-t パス を１つ探す
3. 2を繰り返しパスを増やす

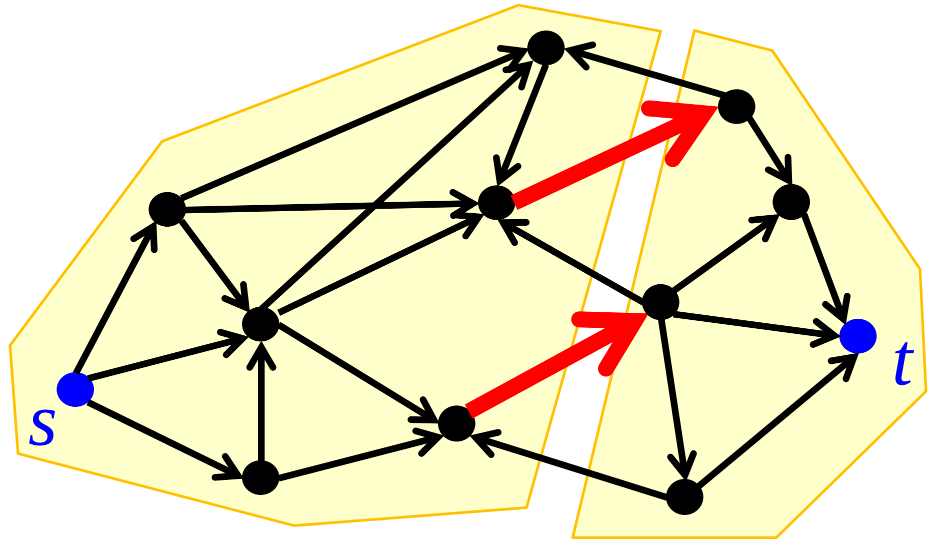


カットのサイズ ＝ パスの数

Menger の定理（最大流最小カット定理） 再掲

- 有向グラフ $D=(V,A)$, 頂点 $s,t \in V$





枝素な s-t パス の最大数 ＝ 最小の s-t カット のサイズ

[Menger, 1927], [Ford-Fulkerson, 1956]

枝素な s-t パス の最大数 ≦ 任意の s-t カット のサイズ

2部マッチングの最大最小定理

再掲

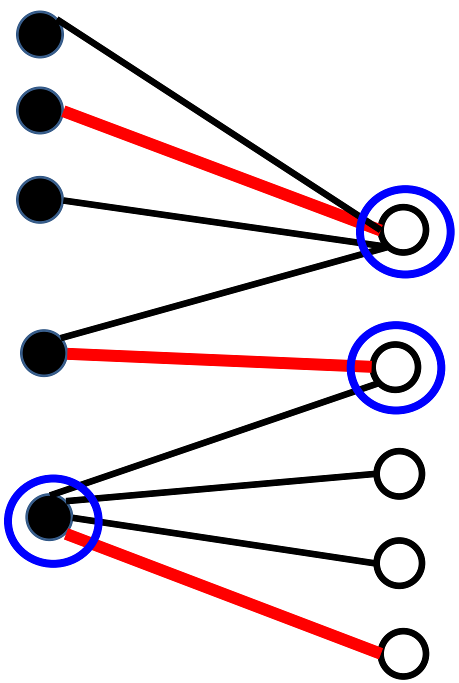
入力:　２部グラフ $G=(U, V; E)$

問題:　完全マッチングがあるか？

（最大サイズのマッチングは？）

どの点にも
丁度１本の枝が接続

１本以下の枝が接続



最大の マッチングのサイズ

~~≦~~　=

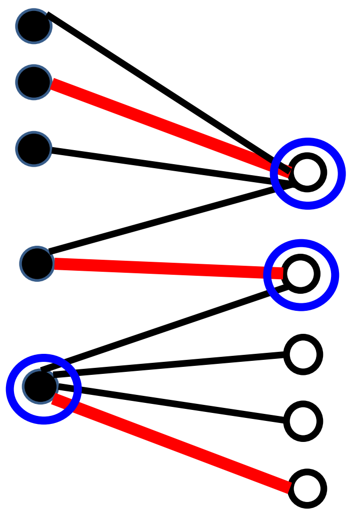
最小の 頂点被覆のサイズ

[Kőnig, 1931]

意味

うまく マッチング と 頂点被覆 を
選べば最適性が保証できる

Menger の定理 ⇒ 2部マッチング

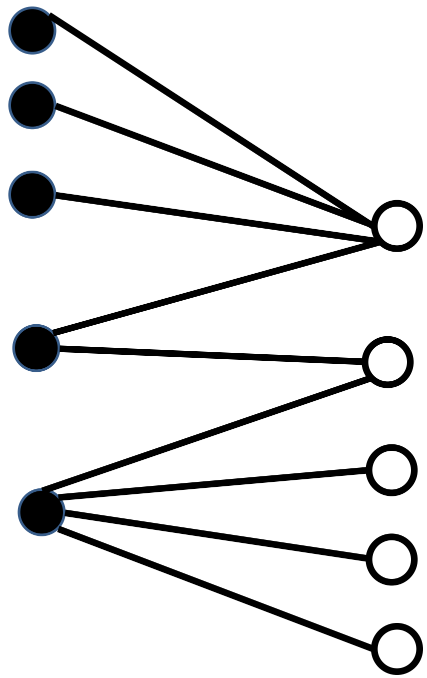


最大の マッチングのサイズ

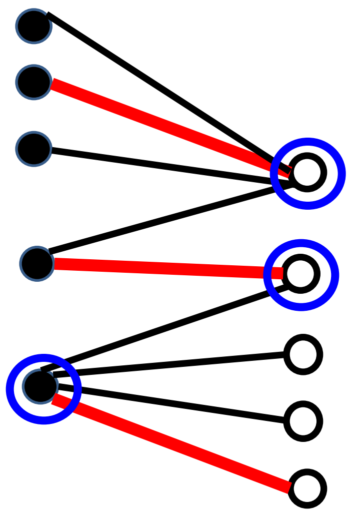
=

最小の 頂点被覆のサイズ

[Kőnig, 1931]



Menger の定理 ⇒ 2部マッチング

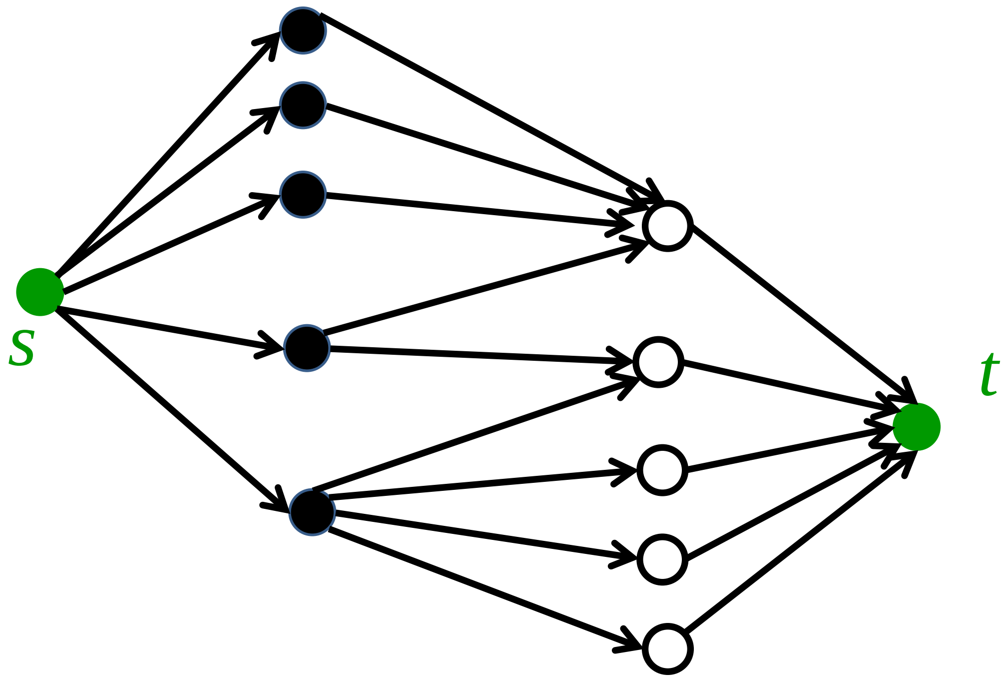


最大の マッチングのサイズ

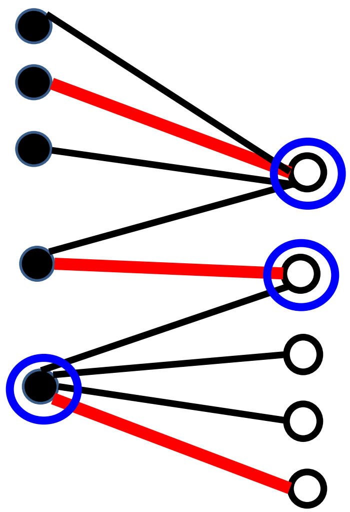
=

最小の 頂点被覆のサイズ

[Kőnig, 1931]



Menger の定理 ⇒ 2部マッチング

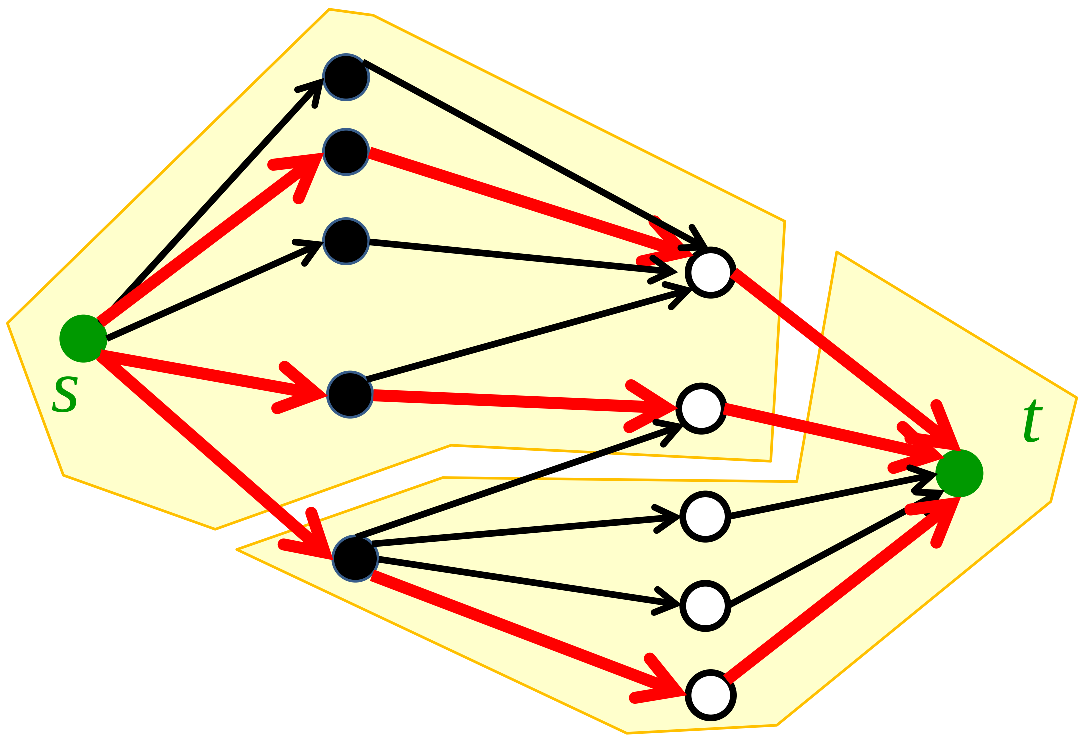


最大の マッチングのサイズ

=

最小の 頂点被覆のサイズ

[Kőnig, 1931]



3日目

目標

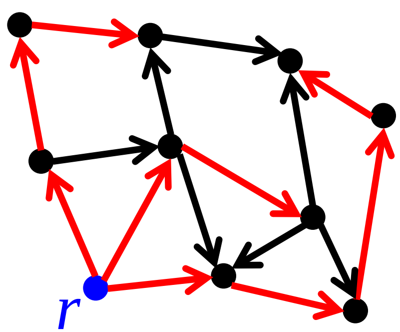
有向全域木詰込みの双対性を示す

有向全域木

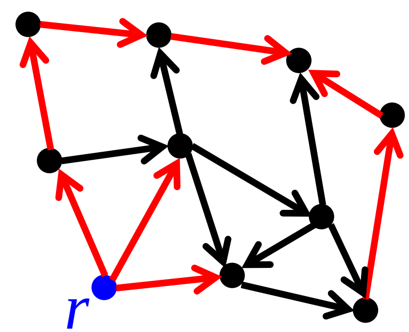
- 有向グラフ $D = (V, A)$, 頂点 $r \in V$

r-有向全域木 (r-arborescence)

= { ・向きを無視すると全域木
　 ・すべての点に r から到達可能



OK

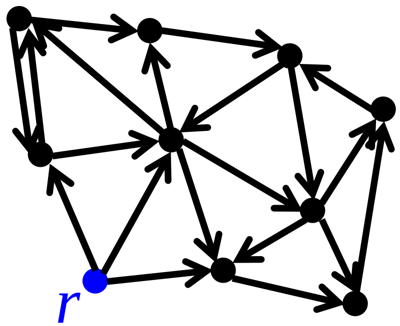


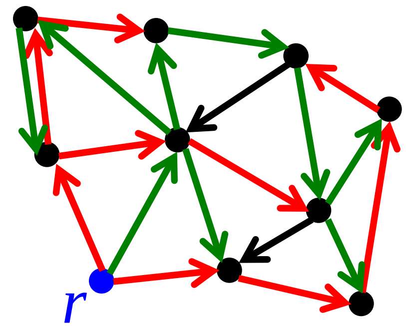
NG

（例．すべての点への通信，避難場所への経路）

有向全域木の詰込み

互いに枝を共有しない k 個の r-有向全域木を見つけたい





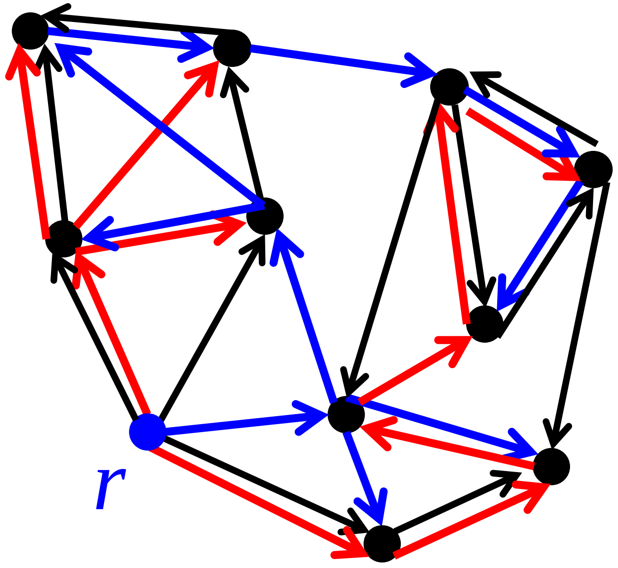
$k = 2$

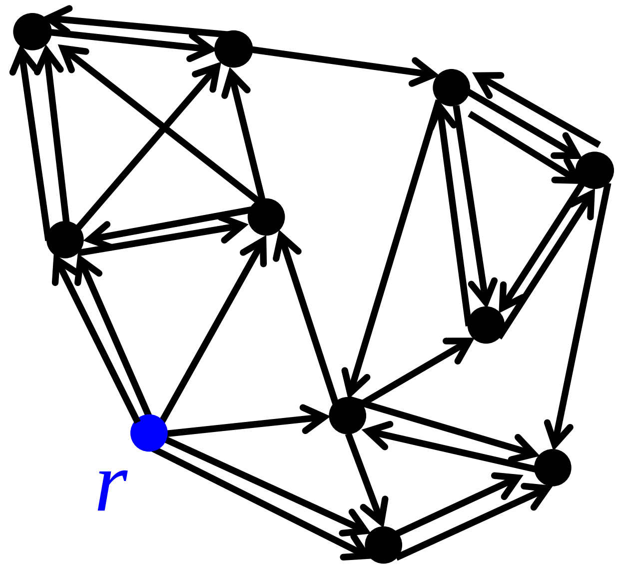
問題

最大で何個見つけられるか？

有向全域木詰込みの上界

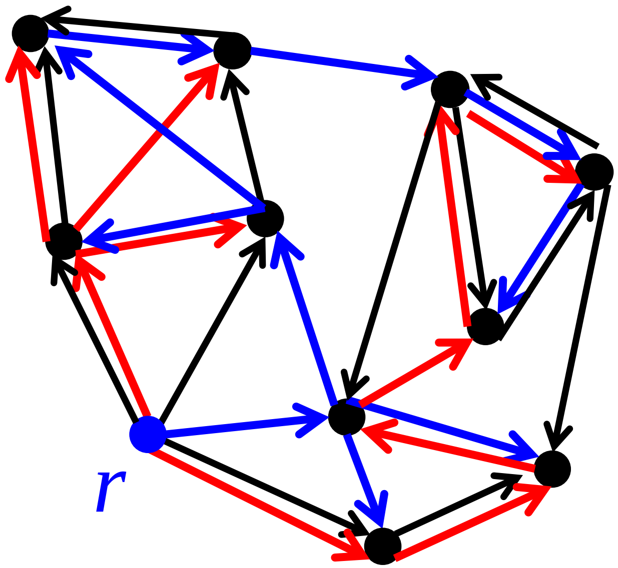
3つの有向全域木が無い証明は？

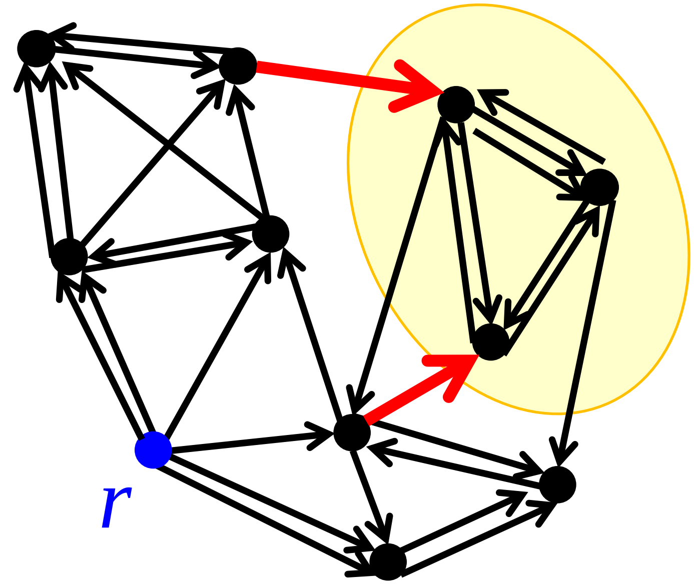




有向全域木詰込みの上界

3つの有向全域木が無い証明は？



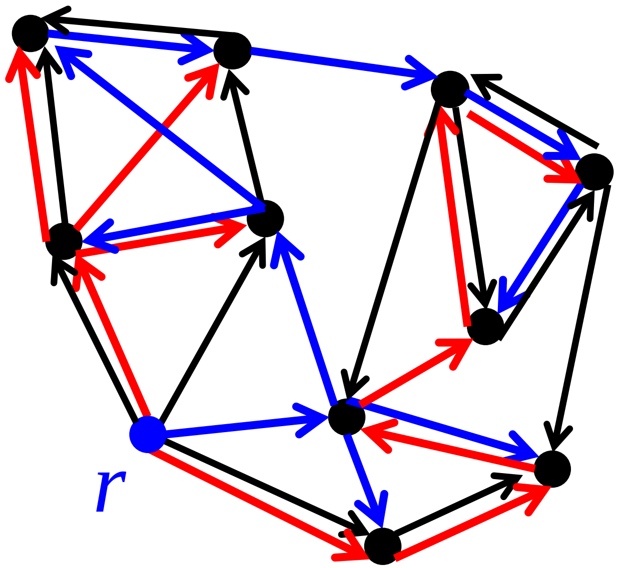


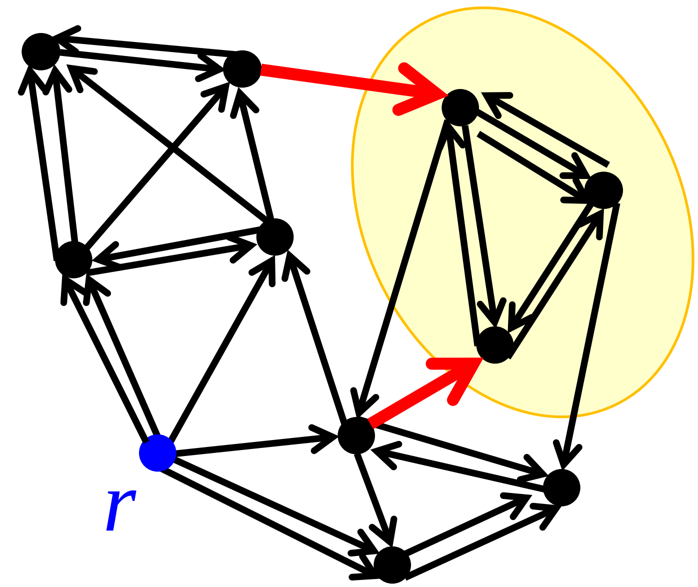
有向全域木には ◯ に入る枝あり

⇒ (有向全域木の数) ≤ 2

有向全域木詰込みの上界

3つの有向全域木が無い証明は？





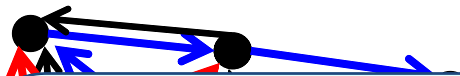
有向全域木には に入る枝あり

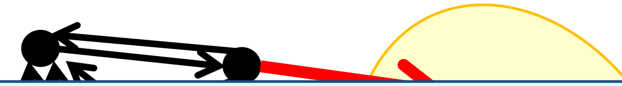
r を含まない任意の に対して

(有向全域木の数) ≤ (に入る枝数)

有向全域木詰込みの最大最小定理

3つの有向全域木が無い証明は？





max (有向全域木の数) = min (◯ に入る枝数)

r を含まない集合

[Edmonds, 1973]

有向全域木には ◯ に入る枝あり

r を含まない任意の ◯ に対して

(有向全域木の数) $\leq$ (◯ に入る枝数)

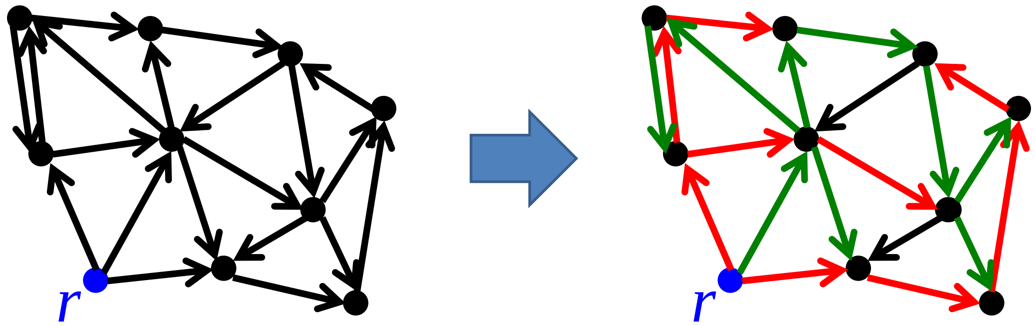
証明の方針

目標

X に入る本数

枝素な k 個の r-有向全域木 ⇐ $\rho(X) \geq k \quad (\emptyset \neq \forall X \subseteq V - r)$

1本ずつ枝を根付き木に加えていく



$k = 2$

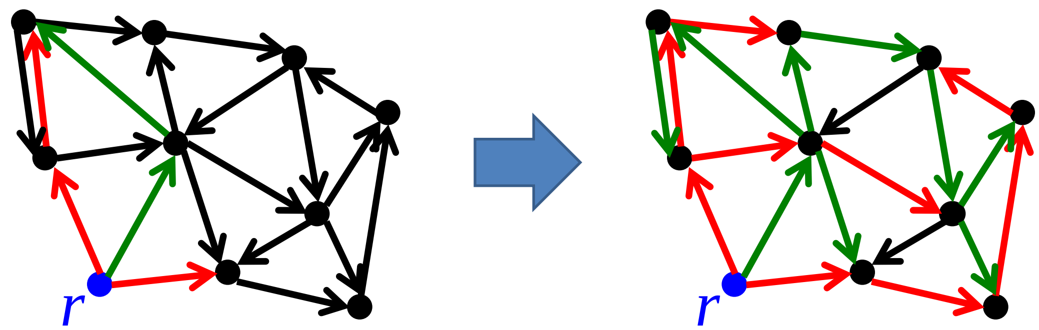
証明の方針

目標

枝素な k 個の r-有向全域木 ⇐ $\underline{\rho(X)} \geq k \quad (\emptyset \neq \forall X \subseteq V - r)$

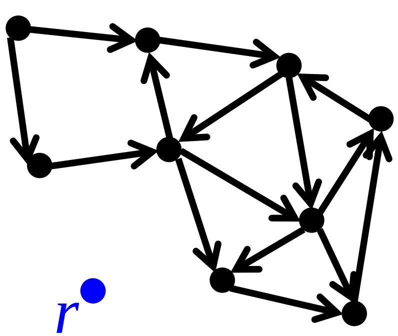
X に入る本数

1本ずつ枝を根付き木に加えていく

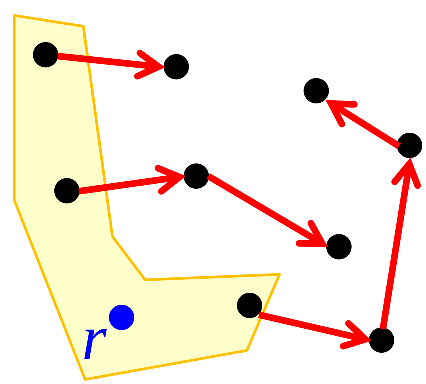


$k = 2$

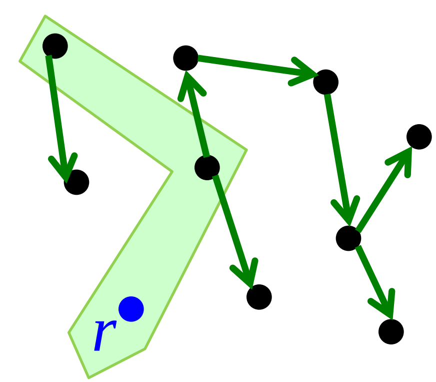
Find



中に



と



R-有向全域森
(R を縮約すると r-有向全域木)

R'-有向全域森

Edmonds の有向全域木定理 (strong ver.)

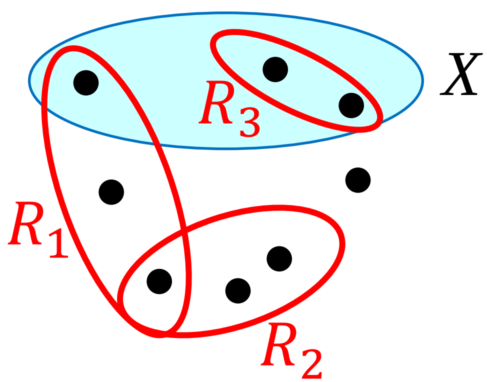
定理 (Edmonds 1973)

頂点集合 $R_1, R_2, \dots, R_k \subseteq V$

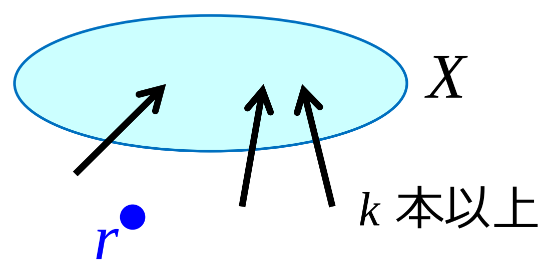
枝素な k 個の R_i-有向全域森 が存在

$\Leftrightarrow \quad \rho(X) \ \geq \ |\{i \mid R_i \cap X = \emptyset\}| \qquad (\emptyset \neq \forall X \subseteq V)$

X に入る本数



cf. r-有向全域木の場合



注. $R_i = \{r\}$ とすると weak ver.

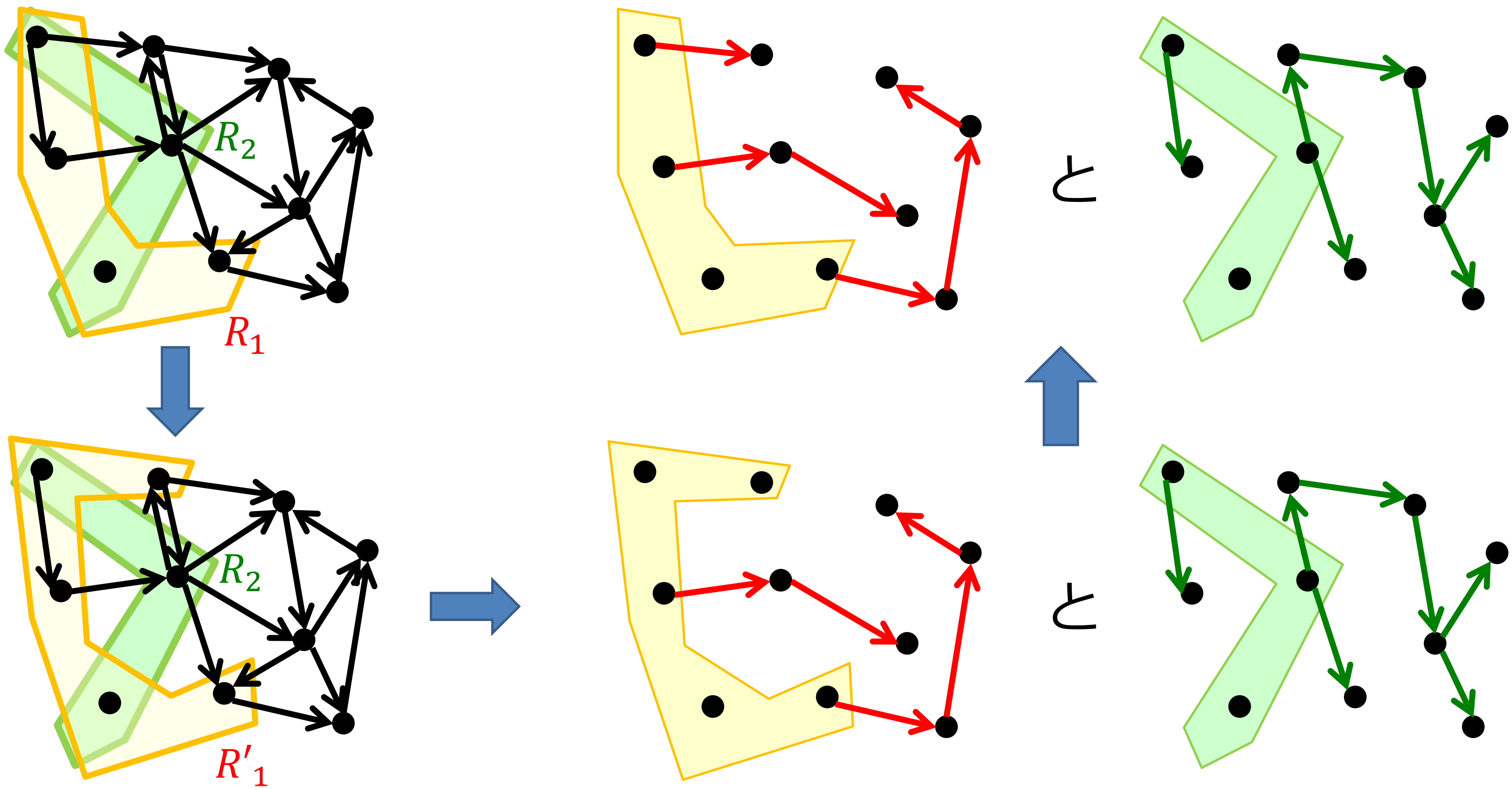
証明の方針

目標（改）

枝素な k 個の R_i-有向全域森 ⇐ $\rho(X) \ge |\{i \mid R_i \cap X = \emptyset\}|$

X に入る本数

1本ずつ枝を森に加えていく



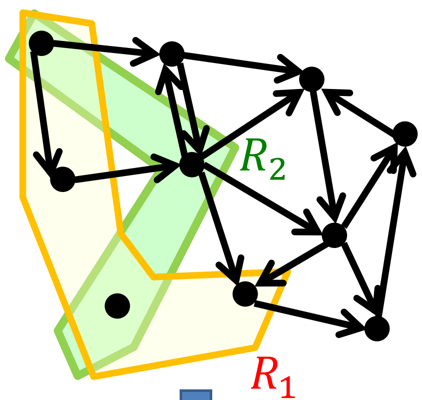
証明の方針

目標（改）

X に入る本数

枝素な k 個の R_i-有向全域森 ⇐ $\rho(X) \;\geq\; |\{i \mid R_i \cap X = \emptyset\}|$

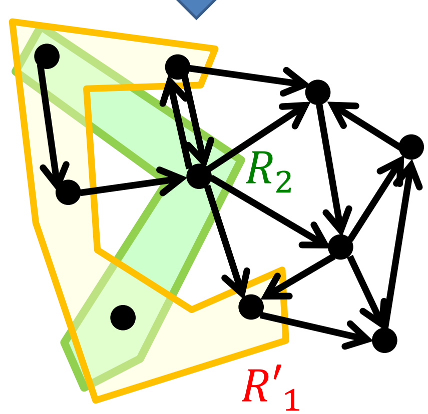
1本ずつ枝を森に加えていく

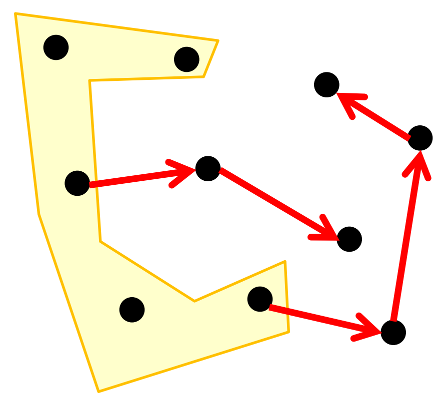


うまく枝を R_i に割り当てて，更新後も

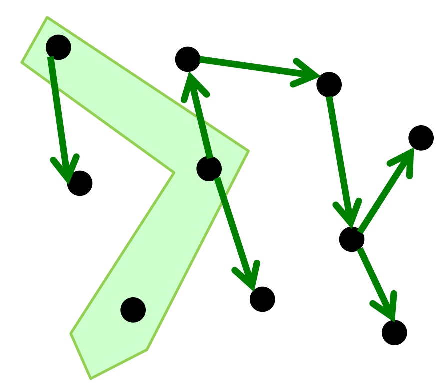
$$\rho(X) \;\geq\; |\{i \mid R_i \cap X = \emptyset\}|$$

が成り立つようにしたい

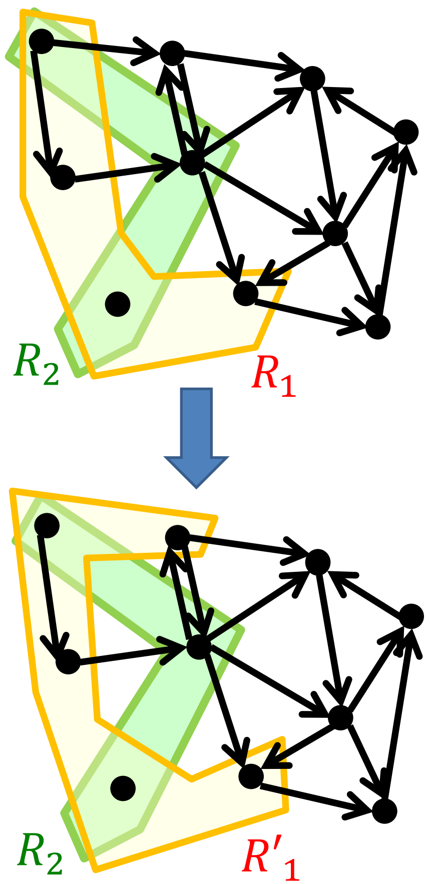




と



証明：枝 と R_i の選び方

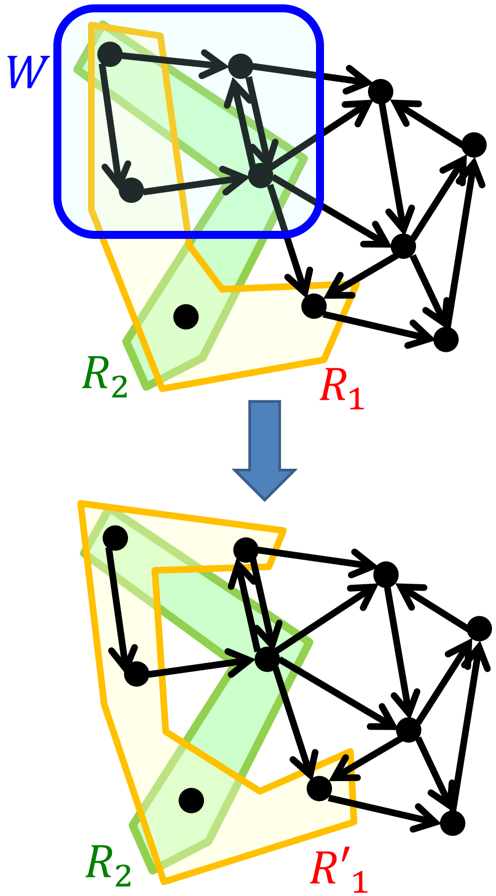


うまく枝を R_i に割り当てて，更新後も

$$\rho(X) \;\geq\; |\{i \mid R_i \cap X = \emptyset\}|$$

が成り立つようにしたい

証明：枝 ~~と R_i~~ の選び方



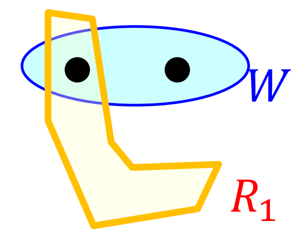
うまく枝を R_1 に割り当てて，更新後も

$$\rho(X) \geq |\{i \mid R_i \cap X = \emptyset\}|$$

が成り立つようにしたい

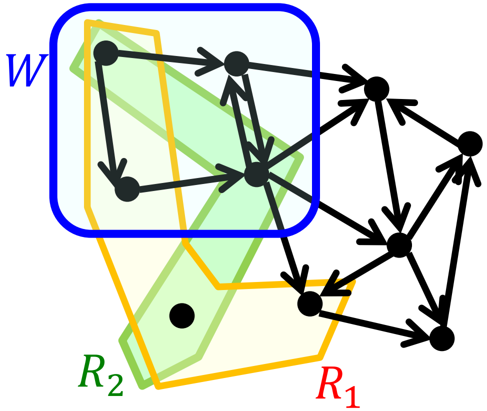
不等号がギリギリ

$$\begin{cases} \bullet\ \rho(W) = |\{i \mid R_i \cap W = \emptyset\}| \\ \bullet\ R_1 \cap W \neq \emptyset \\ \bullet\ W - R_1 \neq \emptyset \end{cases}$$



をみたす，極小の W を取る

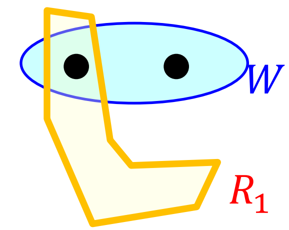
⇒ $\boxed{R_1 \cap W \text{ から } W - R_1 \text{ への枝を選べば良い}}$



うまく枝を R_1 に割り当てて，更新後も

$$\rho(X) \ \geq \ |\{i \mid R_i \cap X = \emptyset\}|$$

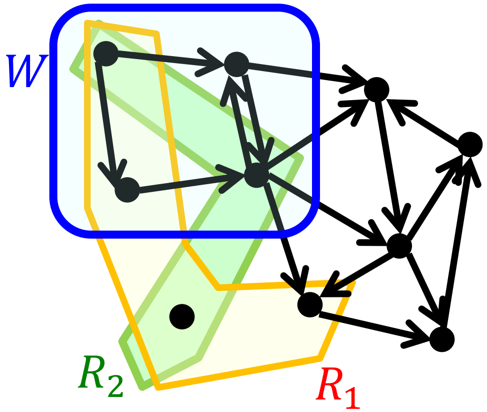
- $\rho(W) = |\{i \mid R_i \cap W = \emptyset\}|$
- $R_1 \cap W \neq \emptyset$
- $W - R_1 \neq \emptyset$ 　をみたす，極小の W



$\Rightarrow$ $\boxed{R_1 \cap W \text{ から } W - R_1 \text{ への枝を選べば良い}}$

(1) 枝の存在

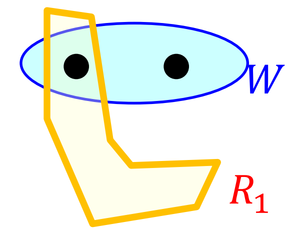
(2) 不等式の成立



うまく枝を R_1 に割り当てて，更新後も

$$\rho(X) \ge |\{i \mid R_i \cap X = \emptyset\}|$$

- $\rho(W) = |\{i \mid R_i \cap W = \emptyset\}|$
- $R_1 \cap W \neq \emptyset$
- $W - R_1 \neq \emptyset$　　をみたす，極小の W



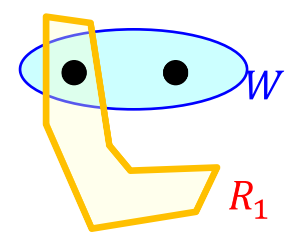
$\boxed{R_1 \cap W \text{ から } W - R_1 \text{ への枝を選べば良い}}$

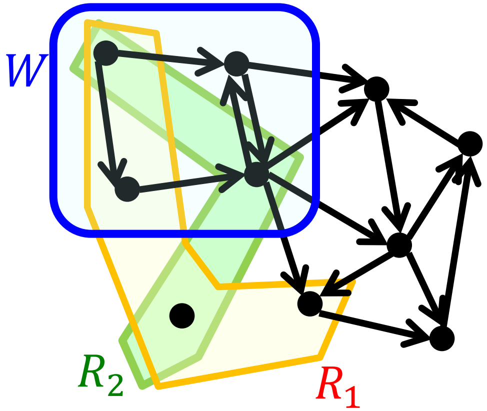
(1) 枝の存在

$\rho(W)$ ＝ W と交わらない R_i の数

∧

$\rho(W - R_1)$ ≥ $W - R_1$ と交わらない R_i の数



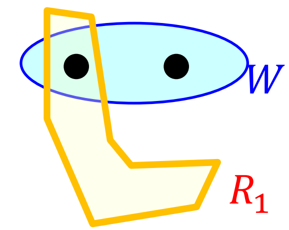


うまく枝を R_1 に割り当てて，更新後も

$$\rho(X) \geq |\{i \mid R_i \cap X = \emptyset\}|$$

- $\rho(W) = |\{i \mid R_i \cap W = \emptyset\}|$
- $R_1 \cap W \neq \emptyset$
- $W - R_1 \neq \emptyset$

をみたす，極小の W



$R_1 \cap W$ から $W - R_1$ への枝を選べば良い

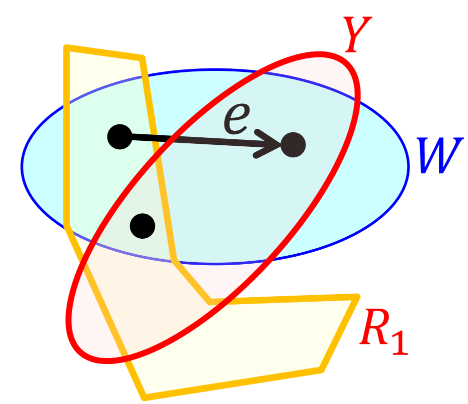
$$\rho(Y \cap W) = |\{i \mid R_i \cap (Y \cap W) = \emptyset\}|$$

(2) 不等式の成立

不等式が壊れるとすると…

- $\rho(Y) = |\{i \mid R_i \cap Y = \emptyset\}|$
- e は Y に入る枝
- $R_1 \cap Y \neq \emptyset$

なる Y が存在

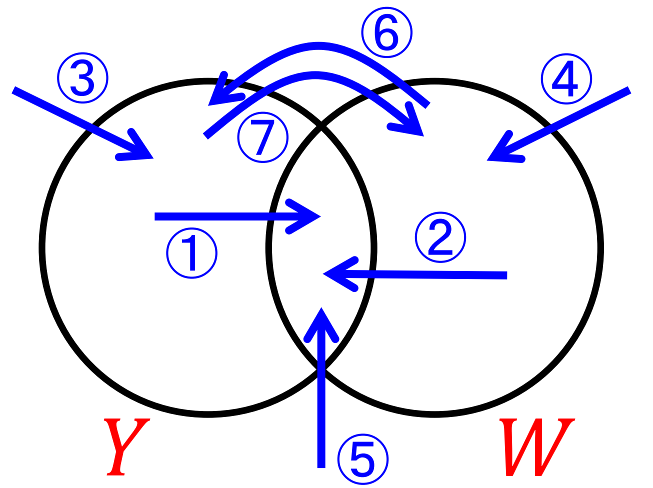


W の極小性に矛盾

追加スライド

$$\rho(Y) + \rho(W) \geq \rho(Y \cap W) + \rho(Y \cup W)$$ （劣モジュラ性）

$\rho(Y)$	$\rho(W)$	$\rho(Y \cap W)$	$\rho(Y \cup W)$
②	①	①	③
③	④	②	④
⑤	⑤	⑤	⑤
⑥	⑦		



追加スライド

$$\rho(Y) + \rho(W) \geq \rho(Y \cap W) + \rho(Y \cup W)$$ （劣モジュラ性）

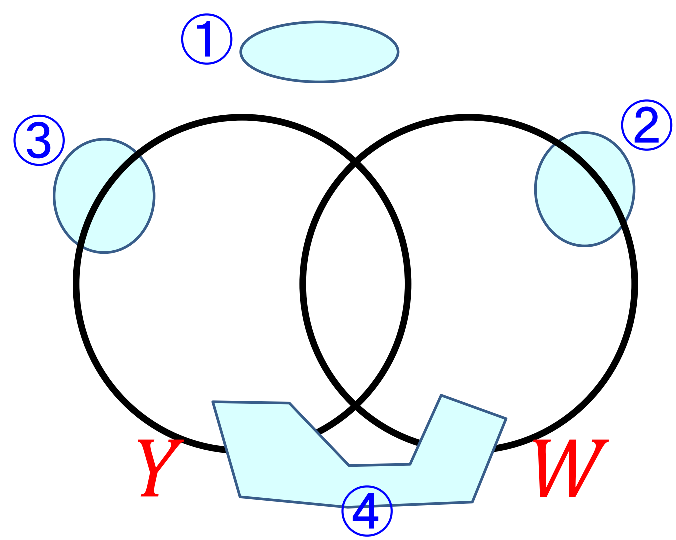
$$|\{i \mid R_i \cap Y = \emptyset\}| + |\{i \mid R_i \cap W = \emptyset\}|$$

① ② ① ③

$$\leq |\{i \mid R_i \cap (Y \cap W) = \emptyset\}| + |\{i \mid R_i \cap (Y \cup W) = \emptyset\}|$$

① ② ③ ④ ①

（優モジュラ性）



追加スライド

$$\rho(Y \cap W) + \rho(Y \cup W)$$

$$\leq \rho(Y) + \rho(W) \qquad \text{（劣モジュラ性）}$$

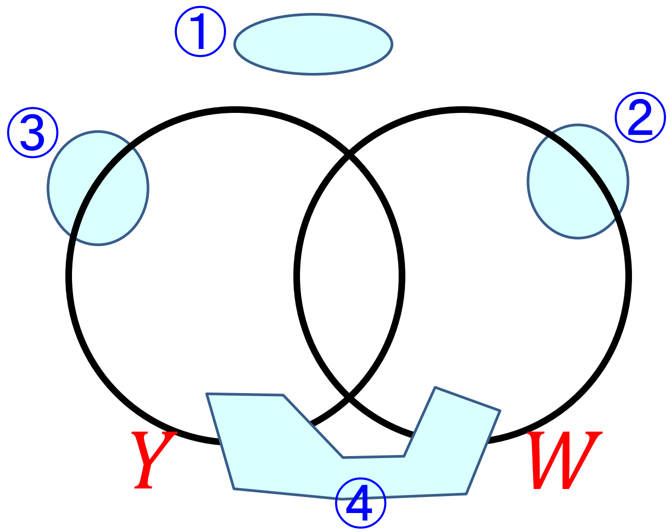
$$= |\{i \mid R_i \cap Y = \emptyset\}| + |\{i \mid R_i \cap W = \emptyset\}|$$

$$\leq |\{i \mid R_i \cap (Y \cap W) = \emptyset\}| + |\{i \mid R_i \cap (Y \cup W) = \emptyset\}| \qquad \text{（優モジュラ性）}$$

$$\leq \rho(Y \cap W) + \rho(Y \cup W)$$

- $\rho(Y \cap W) = |\{i \mid R_i \cap (Y \cap W) = \emptyset\}|$
- （④の集合がないので）

$$R_1 \cap (Y \cap W) \neq \emptyset$$



4日目

目標

双対性に関するその他のトピックを紹介

- 有向全域木詰込みの一般化
  - 一般化１：部分的な頂点のカバー
  - 一般化２：マトロイド制約への拡張
- 有向カットとダイジョイン
- 円板型損傷モデルにおけるネットワーク評価

Edmonds の有向全域木定理 (strong ver.)

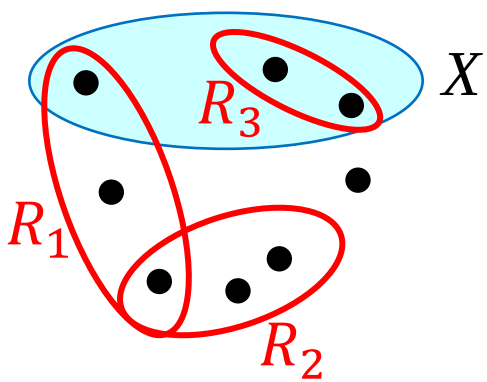
定理 (Edmonds 1973)

頂点集合 $R_1, R_2, \ldots, R_k \subseteq V$

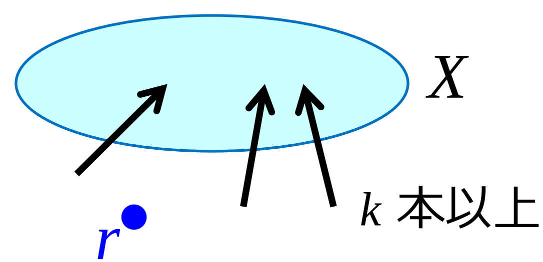
枝素な k 個の R_i-有向全域森 が存在

$\Longleftrightarrow$ $\underline{\rho(X)} \ \geq \ |\{i \mid R_i \cap X = \emptyset\}| \qquad (\emptyset \neq \forall X \subseteq V)$

X に入る本数



cf. r-有向全域木の場合



注. $R_i = \{r\}$ とすると weak ver.

部分的な頂点のカバー

定理 (Kamiyama et al. 2009, Fujishige 2010)

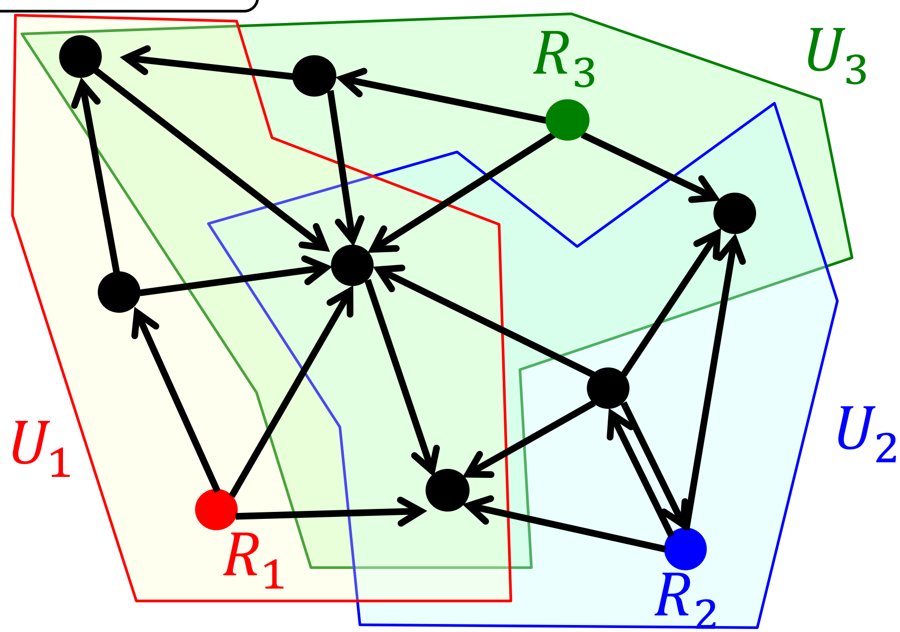
頂点集合 $R_1, R_2, \dots, R_k \subseteq V$

枝素な k 個の R_i-有向森 で

R_i **から到達可能な点** U_i **をカバーするもの** が存在

⟺ $\rho(X) \ \geq \ |\{i \mid R_i \cap X = \emptyset,\ U_i \cap X \neq \emptyset\}|$ $(\emptyset \neq \forall X \subseteq V)$

X に入る本数



部分的な頂点のカバー

定理 (Kamiyama et al. 2009, Fujishige 2010)

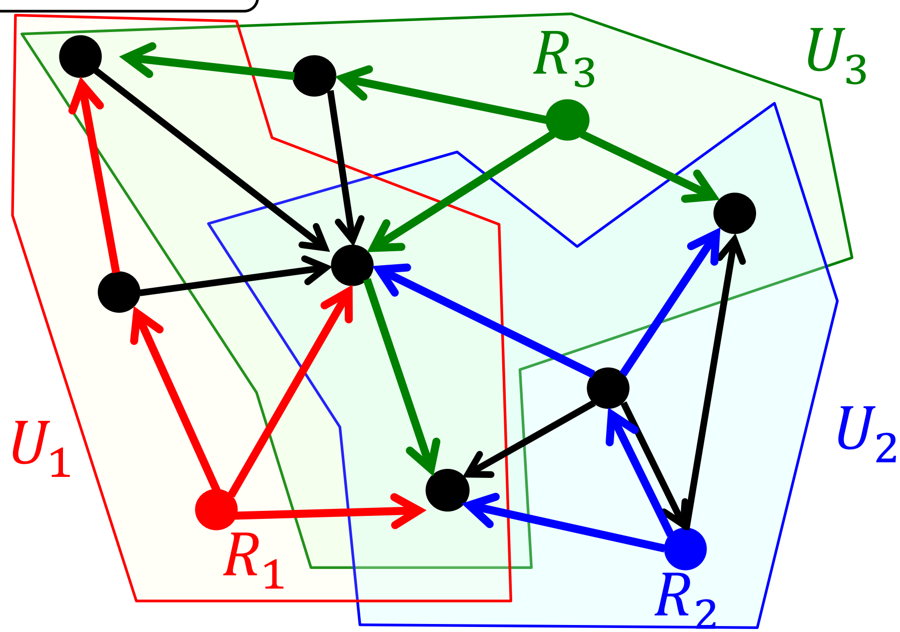
頂点集合 $R_1, R_2, \ldots, R_k \subseteq V$

枝素な k 個の R_i-有向森 で

R_i **から到達可能な点** U_i **をカバーするもの** が存在

⇔ $\rho(X) \geq |\{i \mid R_i \cap X = \emptyset,\ U_i \cap X \neq \emptyset\}|$ $(\emptyset \neq \forall X \subseteq V)$

X に入る本数



部分的な頂点のカバー

定理 (Kamiyama et al. 2009, Fujishige 2010)

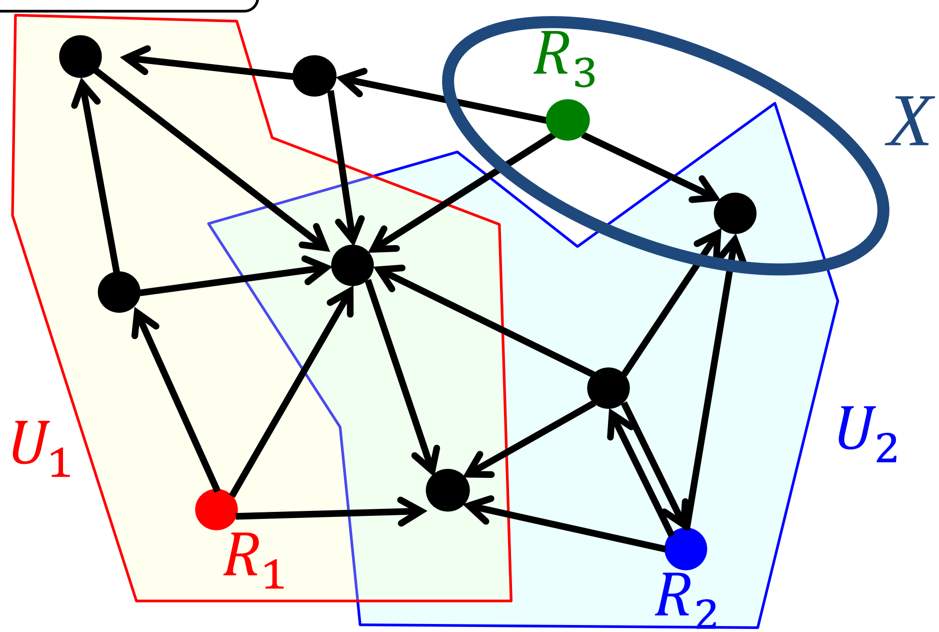
頂点集合 $R_1, R_2, \ldots, R_k \subseteq V$

枝素な k 個の R_i-有向森 で

R_i **から到達可能な点** U_i **をカバーするもの** が存在

⟺ $\rho(X) \geq |\{i \mid R_i \cap X = \emptyset,\ U_i \cap X \neq \emptyset\}|$ $(\emptyset \neq \forall X \subseteq V)$

X に入る本数



4日目

目標

双対性に関するその他のトピックを紹介

- 有向全域木詰込みの一般化
  - 一般化１：部分的な頂点のカバー
  - 一般化２：マトロイド制約への拡張
- 有向カットとダイジョイン
- 円板型損傷モデルにおけるネットワーク評価

Edmonds の有向全域木定理 (strong ver.)

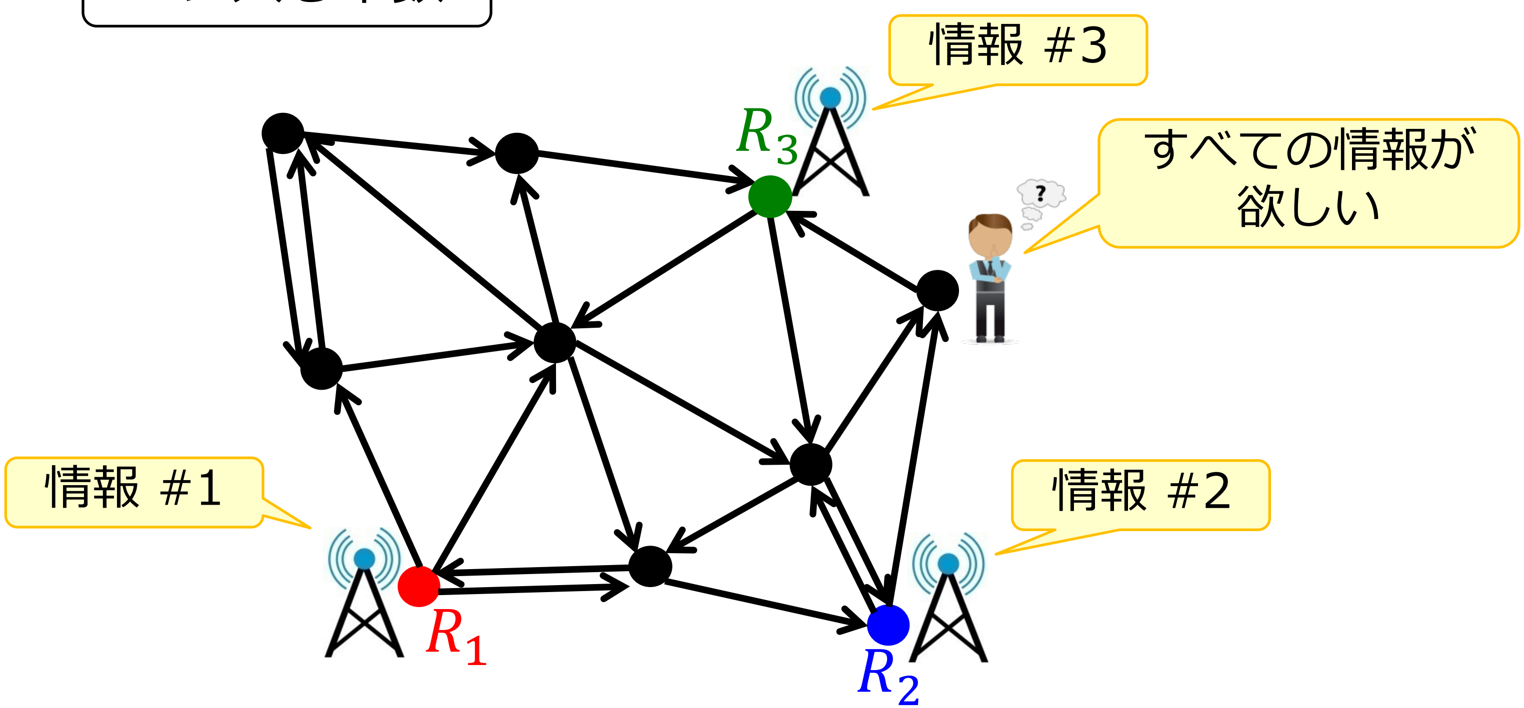
<u>定理 (Edmonds 1973)</u>

頂点集合 $R_1, R_2, \ldots, R_k \subseteq V$

枝素な k 個の R_i-有向全域森 が存在

$\Leftrightarrow$ $\rho(X) \geq |\{i \mid R_i \cap X = \emptyset\}| \quad (\emptyset \neq \forall X \subseteq V)$

X に入る本数



マトロイド制約への拡張

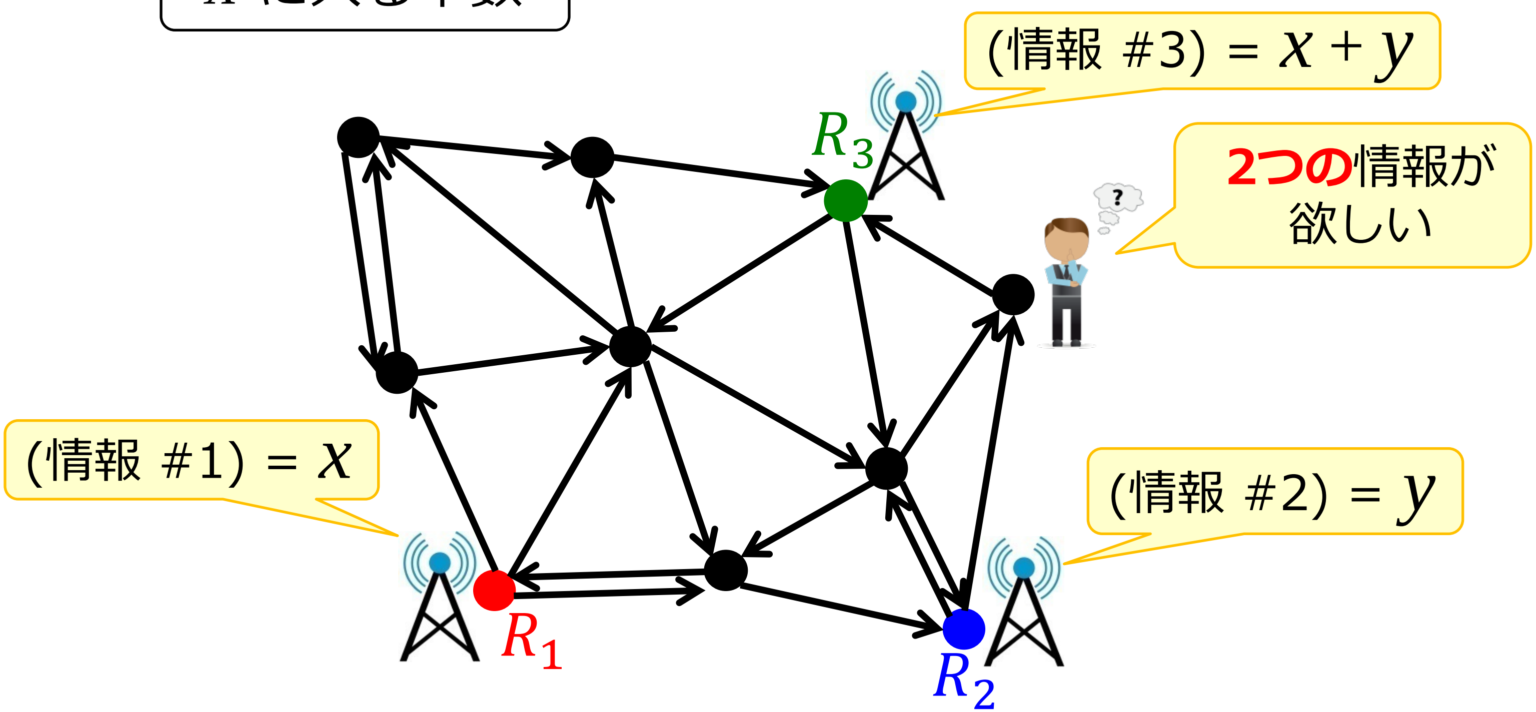
定理 (Edmonds 1973)

頂点集合 $R_1, R_2, \ldots, R_k \subseteq V$

枝素な k 個の R_i-有向全域森 が存在

$\Longleftrightarrow \quad \rho(X) \;\geq\; |\{i \mid R_i \cap X = \emptyset\}| \qquad (\emptyset \neq \forall X \subseteq V)$

X に入る本数



マトロイド制約への拡張

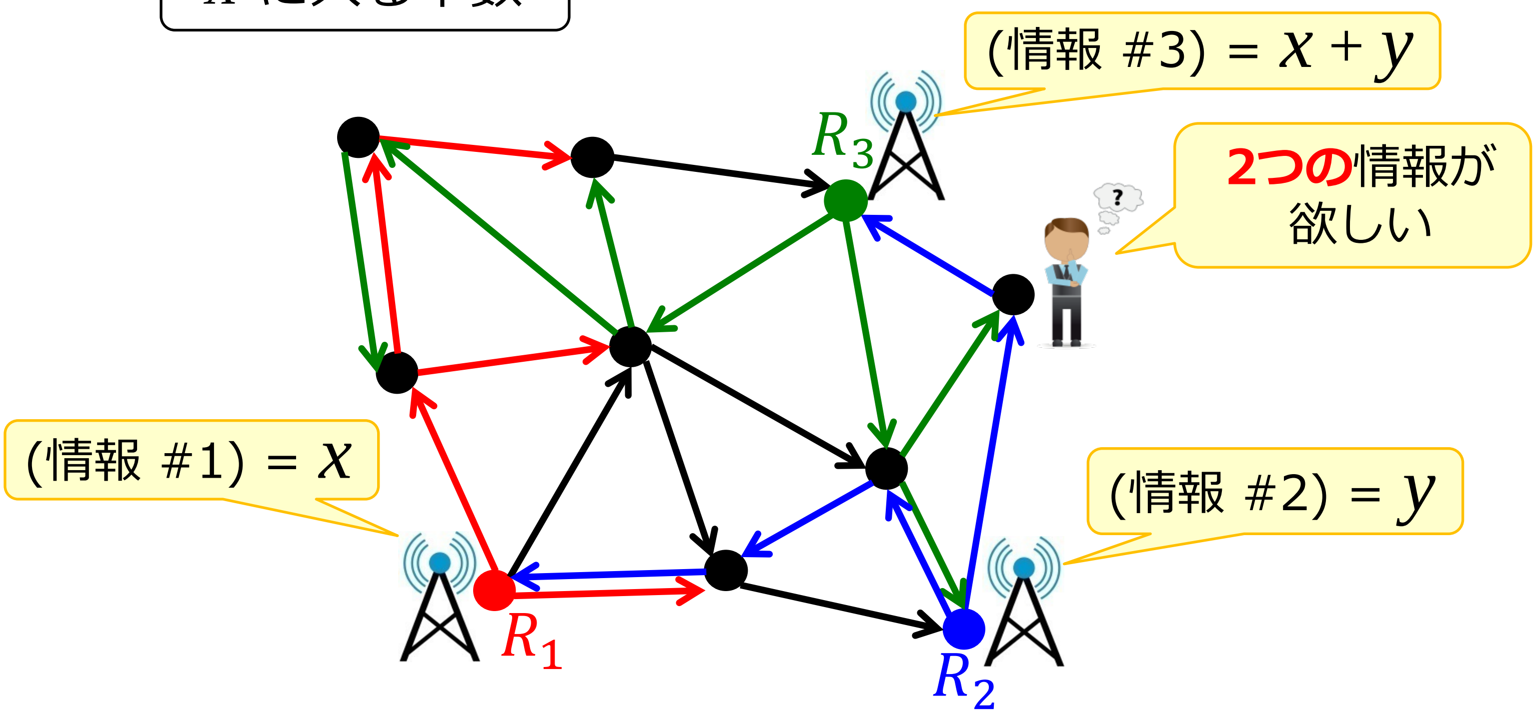
定理 (Edmonds 1973)

頂点集合 $R_1, R_2, \ldots, R_k \subseteq V$

枝素な k 個の R_i-有向全域森 が存在

$\Leftrightarrow \quad \rho(X) \ \geq \ |\{i \mid R_i \cap X = \emptyset\}| \qquad (\emptyset \neq \forall X \subseteq V)$

X に入る本数



マトロイド制約への拡張

Durand de Gevigney et al. 2013

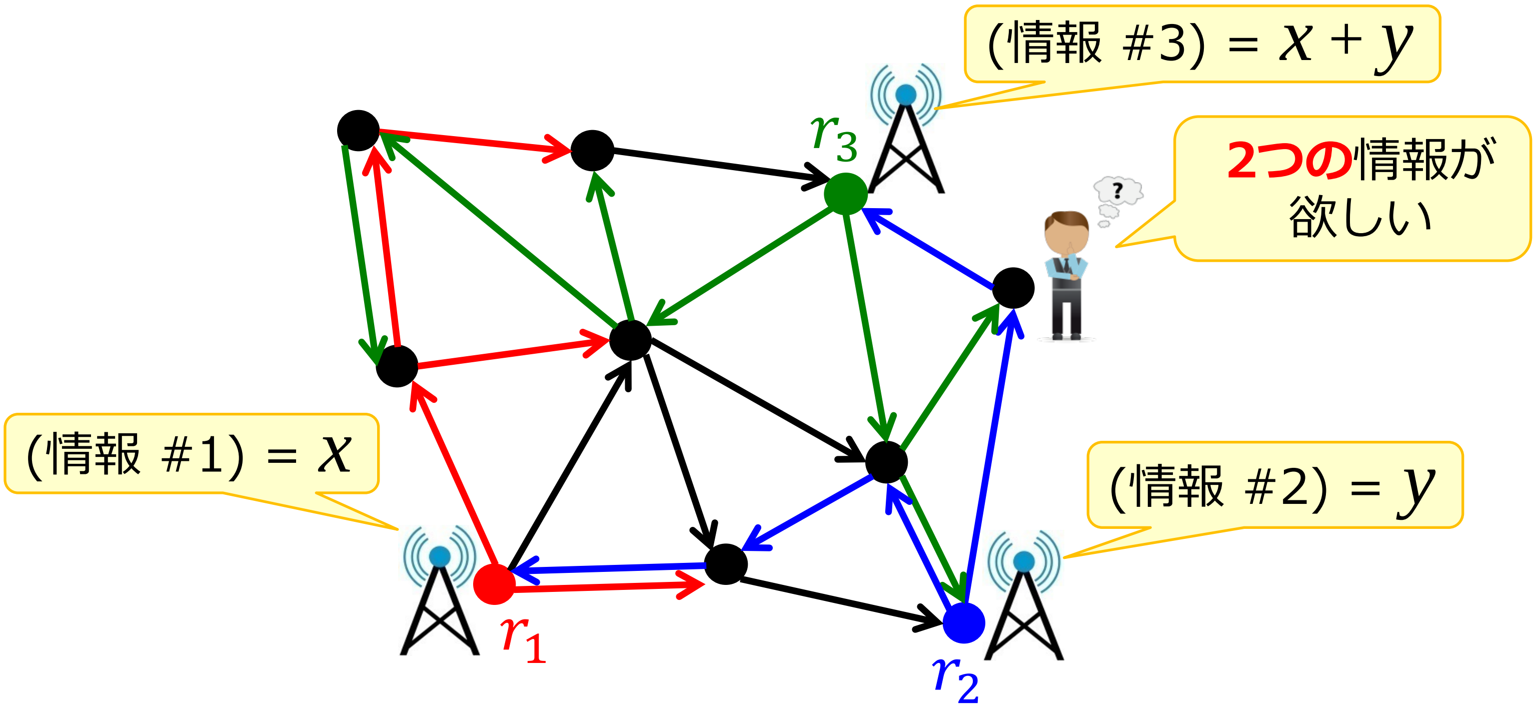
- 頂点 $r_1, r_2, \ldots, r_k \in V$
- $\{1, 2, \ldots, k\}$ 上のマトロイド

∃枝素な k 個の r_i-有向 ~~全域~~ 木

s.t. 各頂点に到達可能な集合が マトロイドの基

⇔ $\rho(X) \geq \mathrm{rank}(\{1, 2, \ldots, k\}) - \mathrm{rank}(\{i \mid r_i \in X\})$

$(\emptyset \neq \forall X \subseteq V)$



マトロイド制約への拡張

Durand de Gevigney et al. 2013

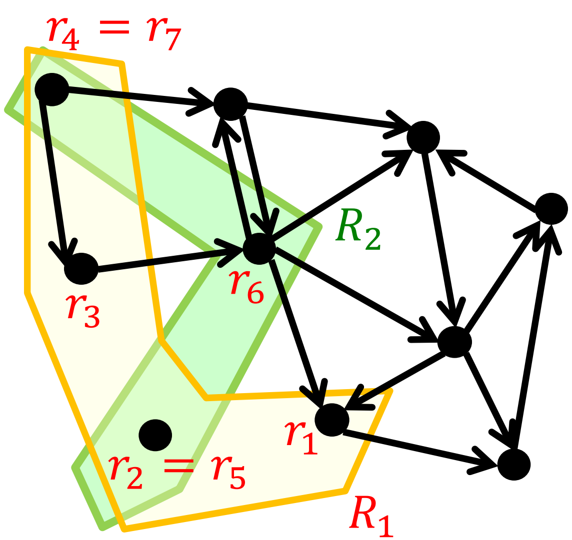
- 頂点 $r_1, r_2, \ldots, r_k \in V$
- $\{1, 2, \ldots, k\}$ 上のマトロイド

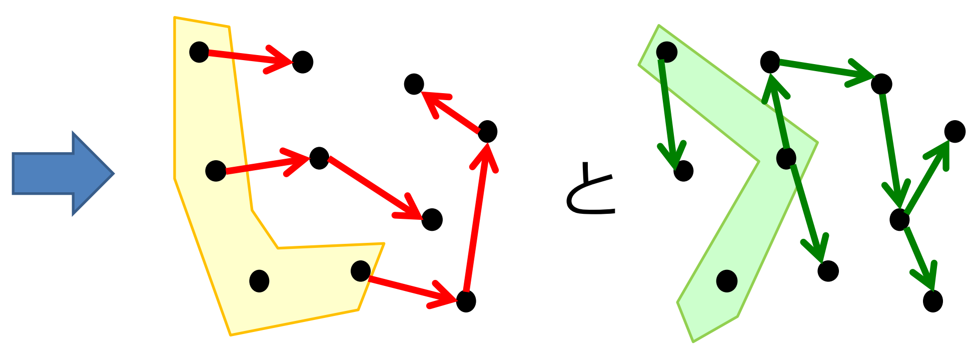
∃枝素な k 個の r_i-有向 ~~全域~~ 木
s.t. 各頂点に到達可能な集合が マトロイドの基

$$\Leftrightarrow \quad \rho(X) \geq \operatorname{rank}(\{1, 2, \ldots, k\}) - \operatorname{rank}(\{i \mid r_i \in X\})$$

$(\emptyset \neq \forall X \subseteq V)$

Edmonds の定理を含むこと (cf. $\rho(X) \geq |\{i \mid R_i \cap X = \emptyset\}|$)





r_1, r_2, r_3, r_4 : 従属
r_5, r_6, r_7 : 従属

4日目

目標

双対性に関するその他のトピックを紹介

- 有向全域木詰込みの一般化
- 有向カットとダイジョイン
- 円板型損傷モデルにおけるネットワーク評価

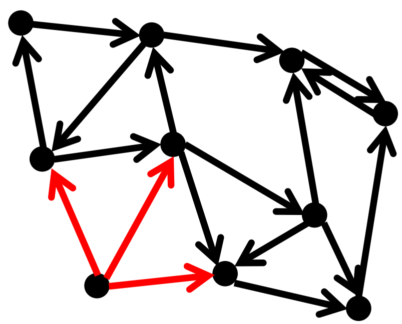
有向カット

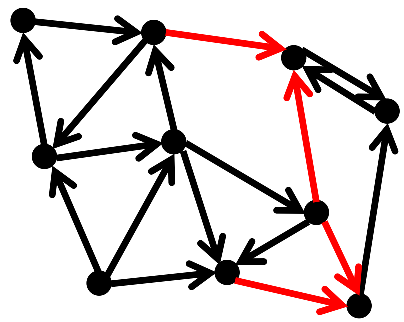
- 有向グラフ $G = (V, A)$

$C \subseteq A$ が 有向カット

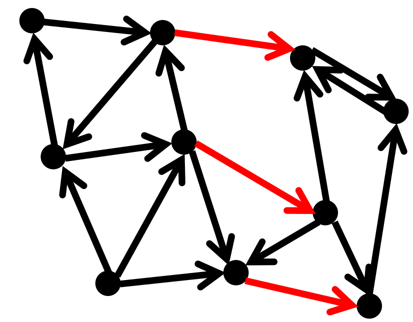
$\Leftrightarrow$ $\underline{\Delta^{-}(U)} = C,\ \underline{\Delta^{+}(U)} = \emptyset$ となる $\emptyset \neq U \subsetneq V$ が存在

U に入る枝全体　　U から出る枝全体





有向カット



有向カットでない

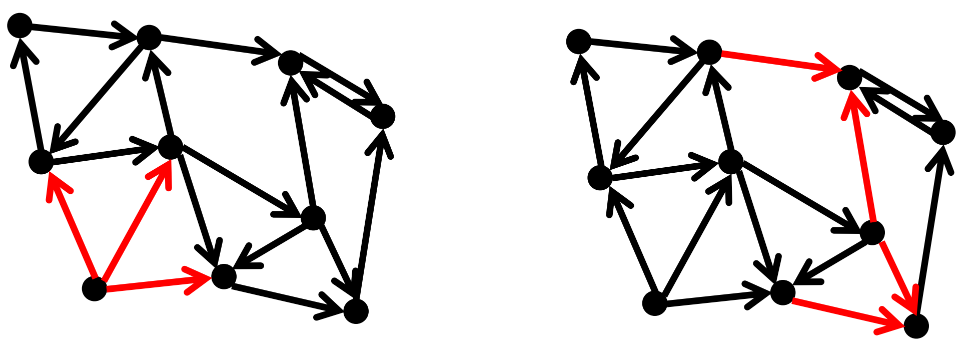
有向カットの詰込み

- 有向グラフ $G = (V, A)$

$C \subseteq A$ が 有向カット

⟺ $\underbrace{\Delta^{-}(U)}_{U\text{ に入る枝全体}} = C,\ \underbrace{\Delta^{+}(U)}_{U\text{ から出る枝全体}} = \emptyset$ となる $\emptyset \neq U \subsetneq V$ が存在

- 辺素な有向カットの最大数は？



有向カット

3つ取れない証明は？

有向カット と ダイジョイン

- 有向グラフ $G = (V, A)$

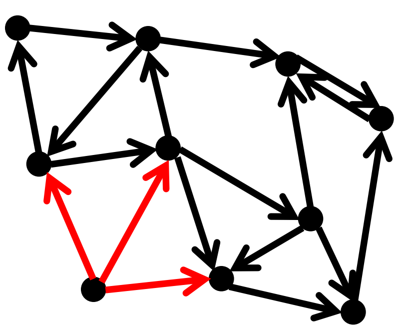
$C \subseteq A$ が 有向カット

⇔ $\Delta^- (U) = C,\ \Delta^+ (U) = \emptyset$ となる $\emptyset \neq U \subsetneq V$ が存在

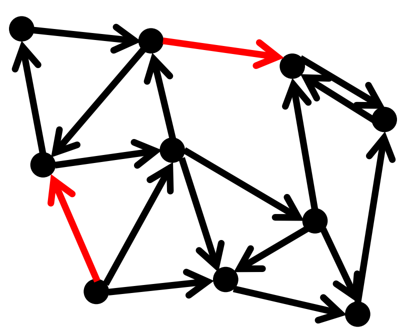
$B \subseteq A$ が ダイジョイン (dijoin)

⇔ 任意の有向カットと共通部分をもつ

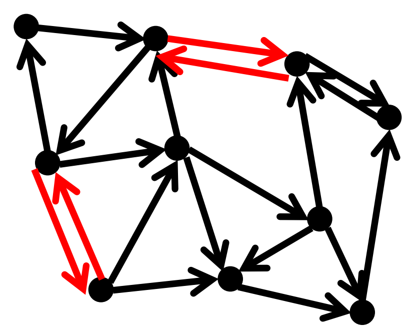
⇔ B の逆向き枝を付け加えるとグラフが強連結



有向カット



ダイジョイン



強連結

有向カット詰込みの上界

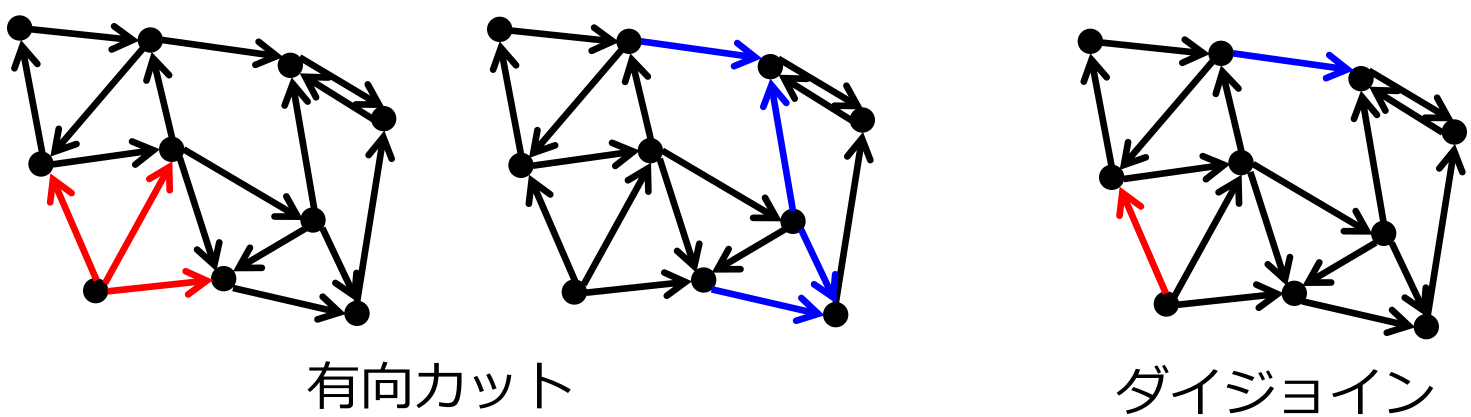
$C \subseteq A$ が 有向カット

⟺ $\Delta^-(U) = C,\ \Delta^+(U) = \emptyset$ となる $\emptyset \neq U \subsetneq V$ が存在

$B \subseteq A$ が ダイジョイン (dijoin)

⟺ 任意の有向カットと共通部分をもつ

- 辺素な有向カットの最大数は？



辺素な有向カットの数 ≦ ダイジョインの枝数

有向カット詰込みの上界

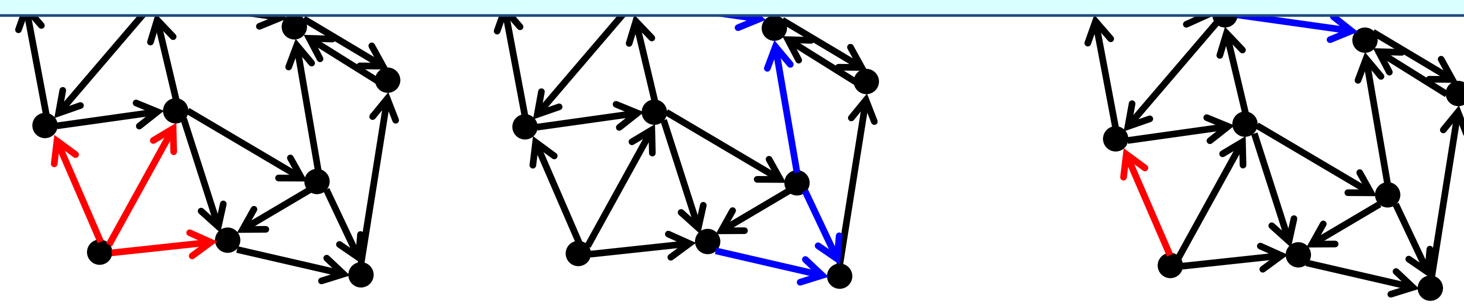
$C \subseteq A$ が 有向カット

$\Leftrightarrow$ $\Delta^{-}(U) = C,\ \Delta^{+}(U) = \emptyset$ となる $\emptyset \neq U \subseteq V$ が存在

定理　（枝の向きを無視すると連結となる有向グラフにおいて）

max (辺素有向カットの数) = min (ダイジョインの枝数)

[Lucchesi-Younger, 1978]



有向カット　　　　ダイジョイン

辺素な有向カットの数　≦　ダイジョインの枝数

ダイジョイン詰込みの上界

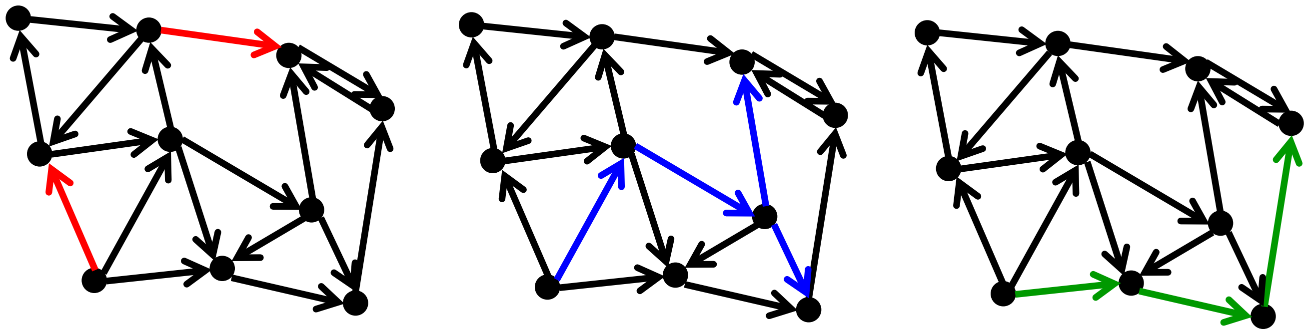
$C \subseteq A$ が 有向カット

⇔ $\Delta^-(U) = C,\ \Delta^+(U) = \emptyset$ となる $\emptyset \neq U \subsetneq V$ が存在

$B \subseteq A$ が ダイジョイン (dijoin)

⇔ 任意の有向カットと共通部分をもつ

- 辺素なダイジョインの最大数は？



ダイジョイン

ダイジョイン詰込みの上界

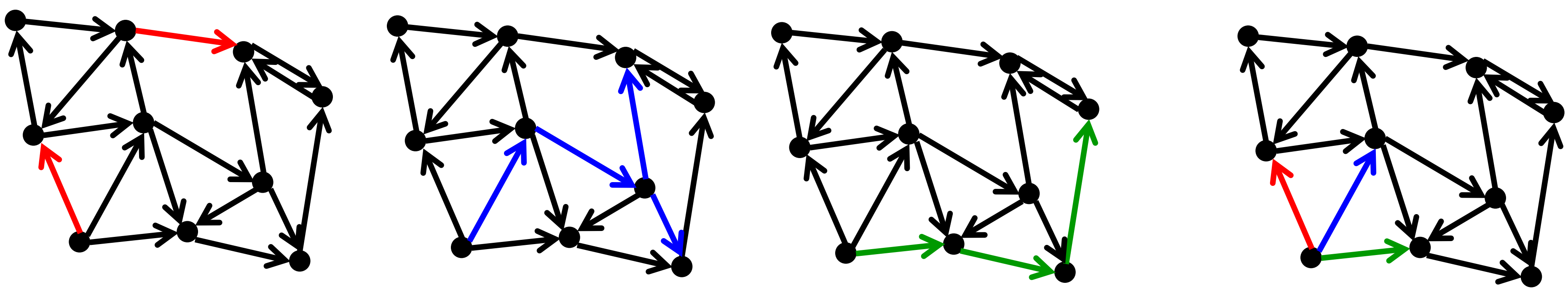
$C \subseteq A$ が 有向カット

⟺ $\Delta^-(U) = C,\ \Delta^+(U) = \emptyset$ となる $\emptyset \neq U \subsetneq V$ が存在

$B \subseteq A$ が ダイジョイン (dijoin)

⟺ 任意の有向カットと共通部分をもつ

- 辺素なダイジョインの最大数は？



ダイジョイン　　　　有向カット

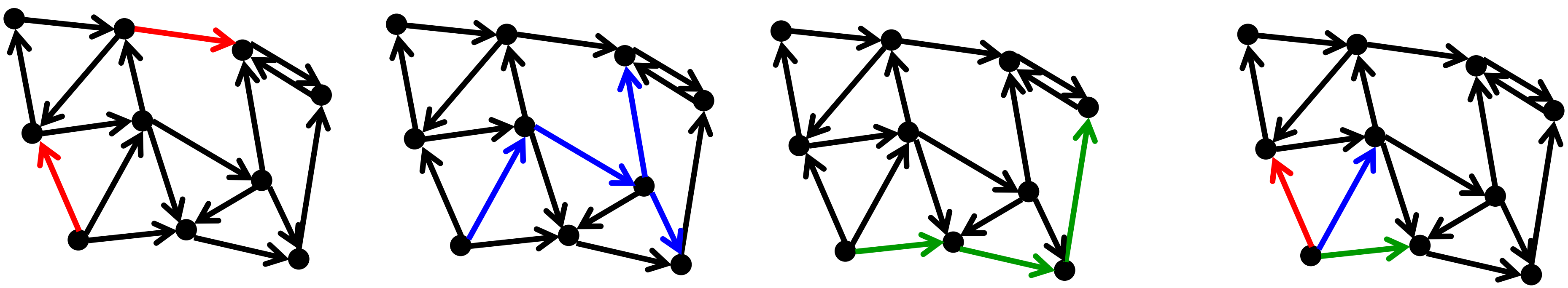
辺素なダイジョインの数 ≦ 有向カットの枝数

未解決問題： Woodall の予想

Woodall の予想

max (辺素ダイジョインの数) = min (有向カットの枝数)

- 辺素なダイジョインの最大数は？



ダイジョイン　　有向カット

辺素なダイジョインの数 ≦ 有向カットの枝数

4日目

目標

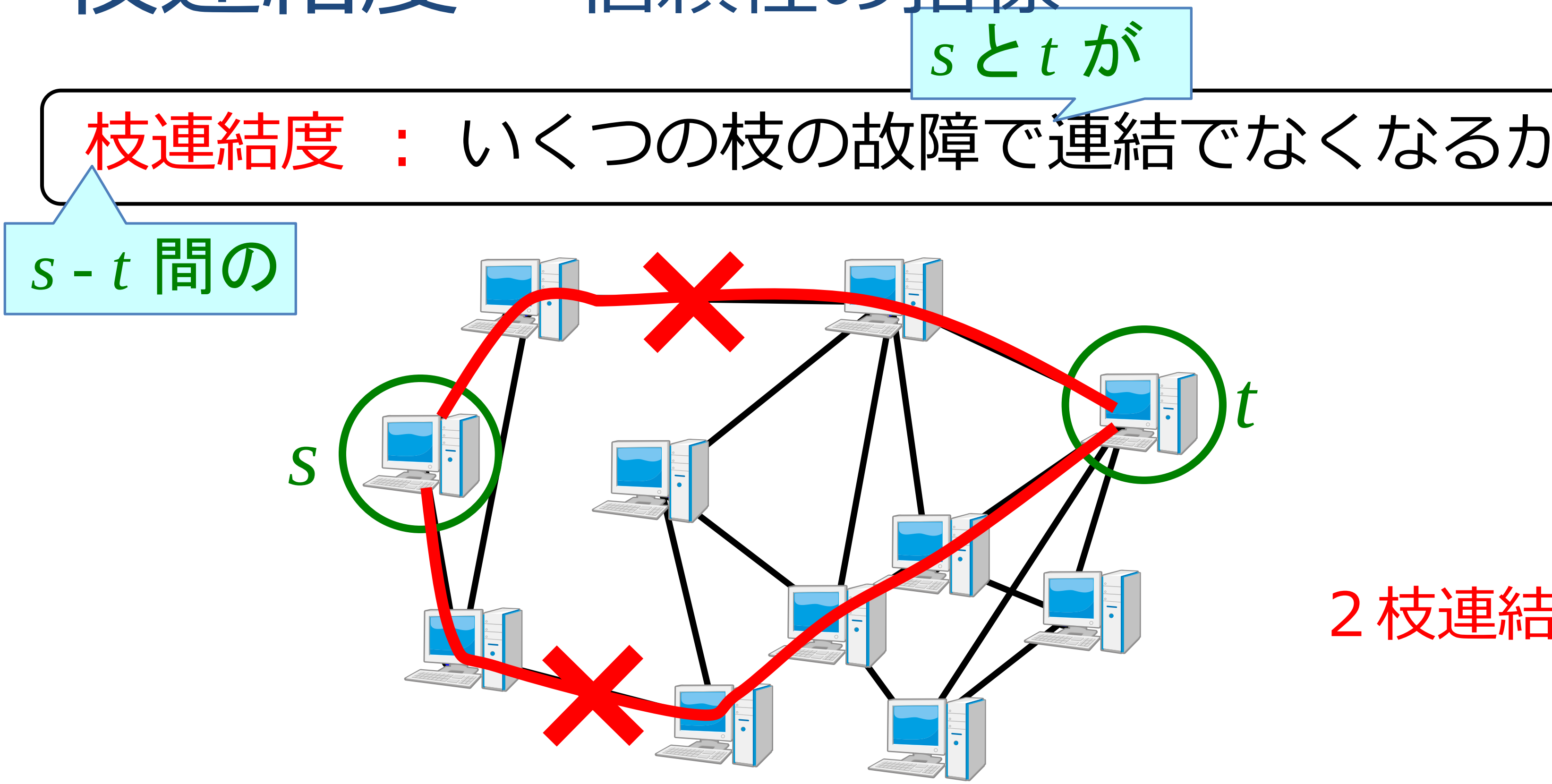
双対性に関するその他のトピックを紹介

- 有向全域木詰込みの一般化
- 有向カットとダイジョイン
- 円板型損傷モデルにおけるネットワーク評価

Yusuke Kobayashi and Kensuke Otsuki:
Max-flow min-cut theorem and faster algorithms in a circular disk failure model, INFOCOM 2014.

枝連結度 ～信頼性の指標～

枝連結度 ： いくつの枝の故障で連結でなくなるか？



- ネットワークの信頼性の指標
- グラフの基本的な特徴量
  - 最大流最小カット定理 [Menger 1927] [Ford-Fulkerson 1956]
  - 高速なアルゴリズム [Ford-Fulkerson 1956] 以来 多数の研究

円板形領域損傷モデル

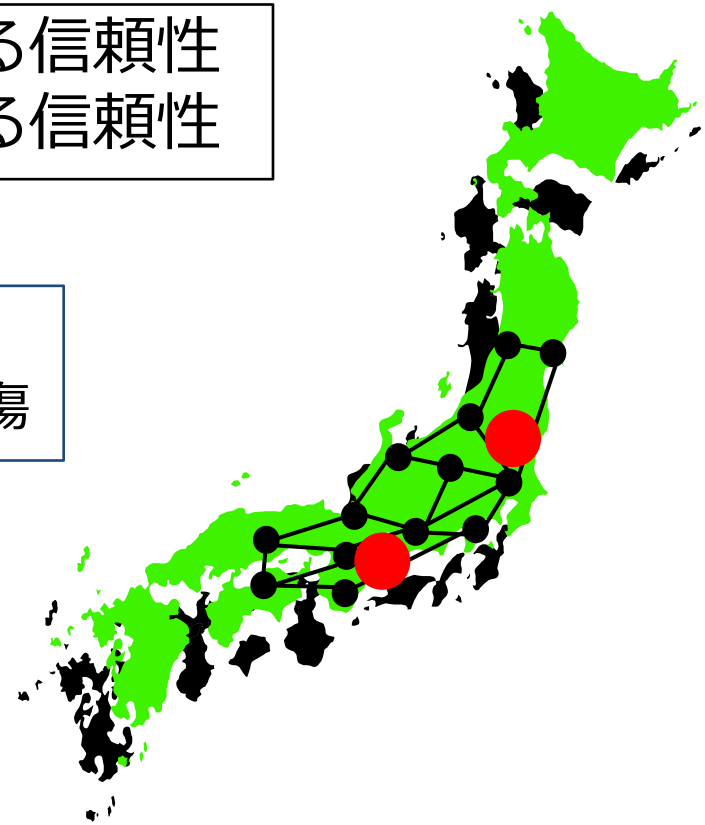
Neumayer-Efrat-Modiano
(INFOCOM 2012)

枝連結度： リンクの故障に対する信頼性
点連結度： ノードの故障に対する信頼性

地理的な情報を考慮

円板形領域損傷モデル:
円板 ● 中の枝・頂点がすべて損傷

- 自然災害や攻撃による影響
- 集積回路の物理的損傷 etc.

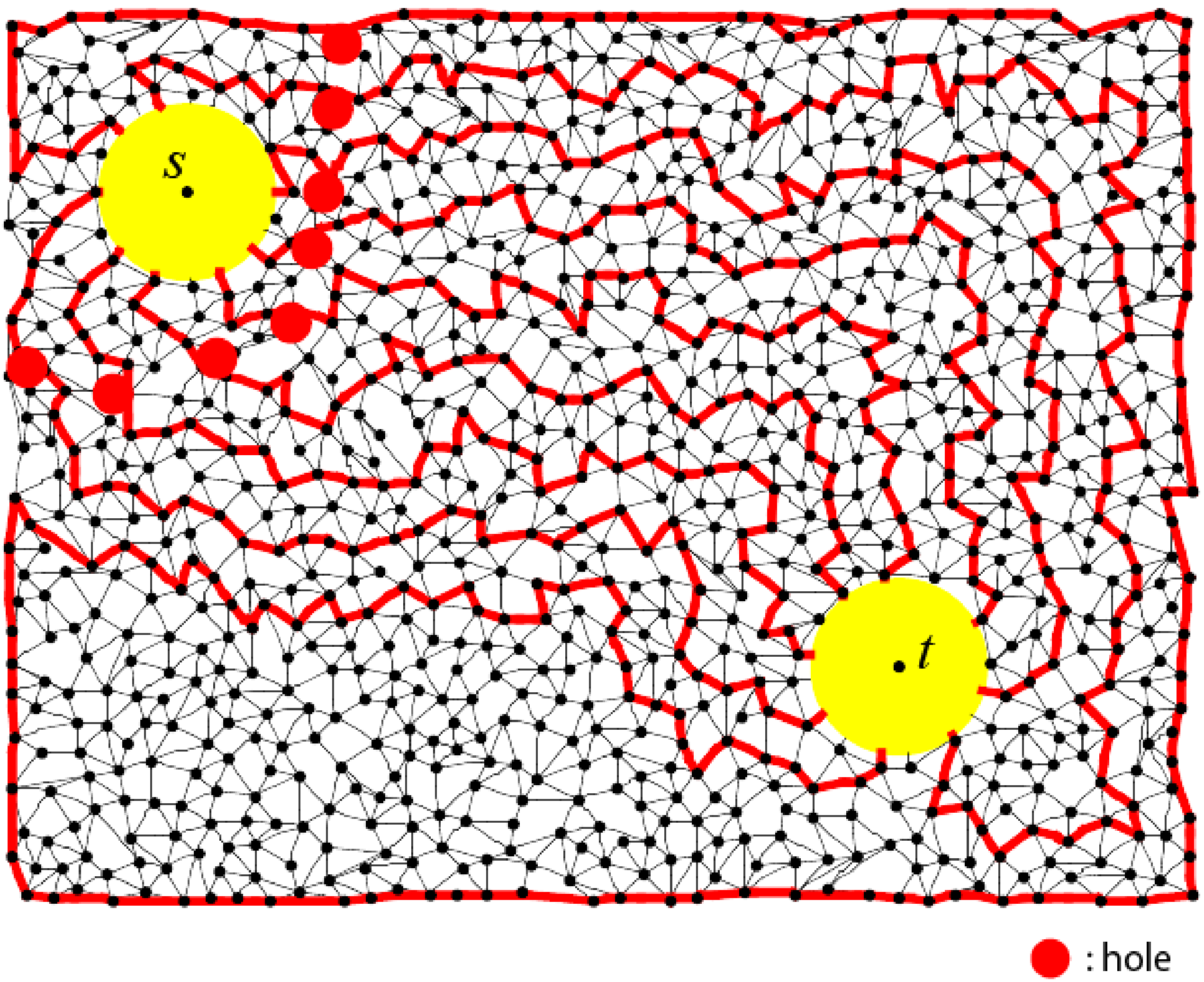


研究対象

円板形領域損傷モデルにおける
「最大流・最小カット問題」

円板による２点の分離

- 1000 頂点 （ランダム）
- ● ： 半径7， ● ：半径30



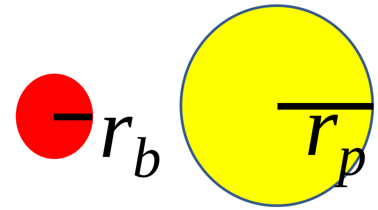
最小カット： 8

円板形領域損傷モデル

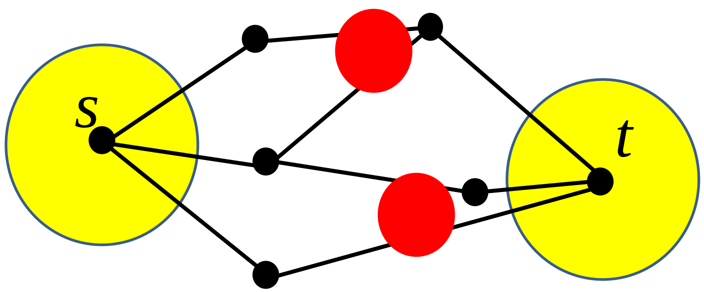
円板最小カット問題　(Min-Cut)

入力:　平面グラフ $G=(V, E)$

$s, t \in V$, 長さ r_b, r_p



出力:　s と t を分離する　最小個数の円板



中心は　の外側

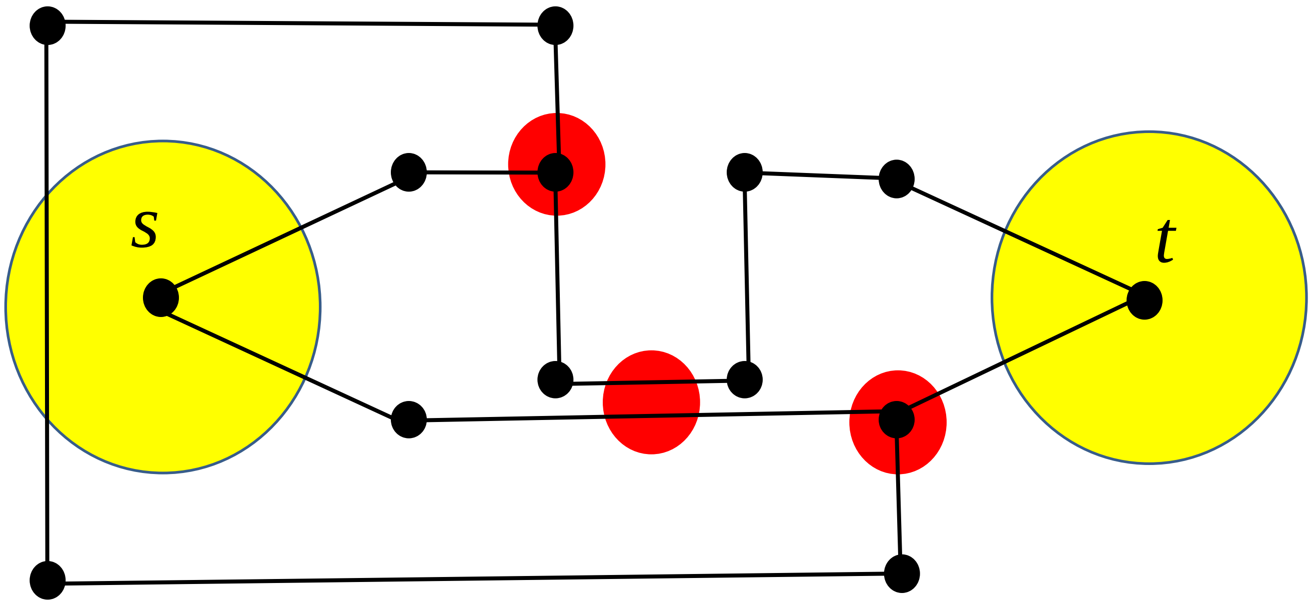
円板最大流問題　(Max-Flow)

出力:　最大本数の s-t パス

s.t.　どの2本のパスも同じ円板　で損傷しない

注：　Max-Flow　≦　Min-Cut を確認せよ

Max-Flow = Min-Cut ??



Max-Flow = 1
Min-Cut = 2

本研究の成果

アルゴリズム

Max-Flow と Min-Cut を求める高速アルゴリズム

初の多項式アルゴリズム

Neumayer et al. (2012) より高速

最大最小定理

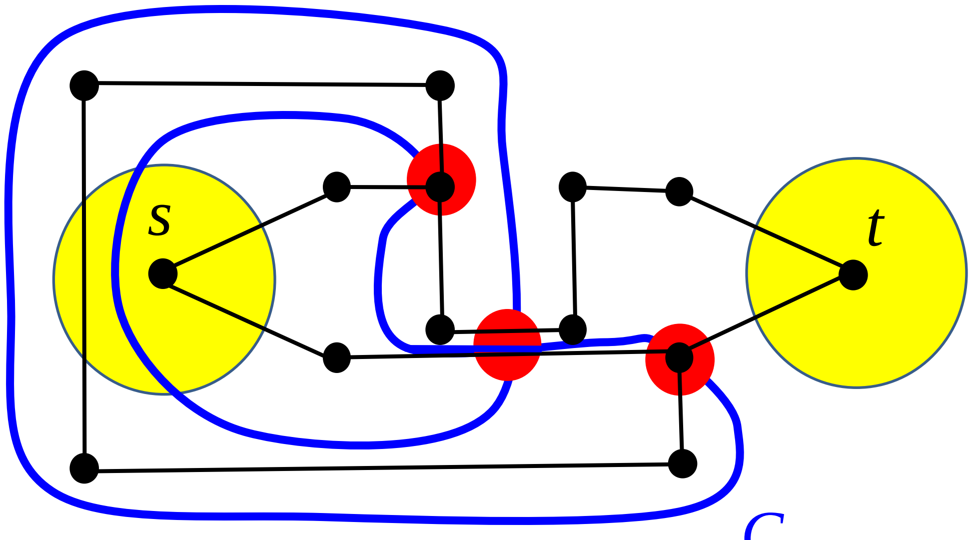
- Max-Flow = $\min \left\{ \left\lfloor \left| \frac{l(C)}{w(C)} \right| \right\rfloor \;\middle|\; C : \text{閉曲線} \right\}$
- Max-Flow + 1 ≥ Min-Cut ≥ Max-Flow

cf. リンク故障モデル： Max-Flow = Min-Cut

計算機実験

頂点数20万程度のグラフで Max-Flow, Min-Cut を高速に計算

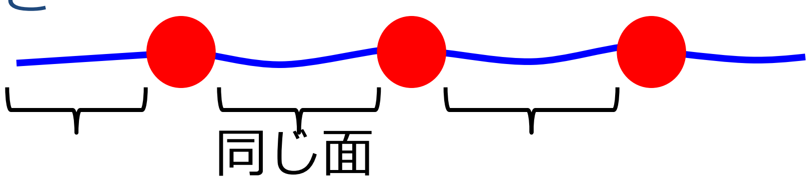
最大最小定理



$w(C)$：回転数

C が s と t を分離する回数

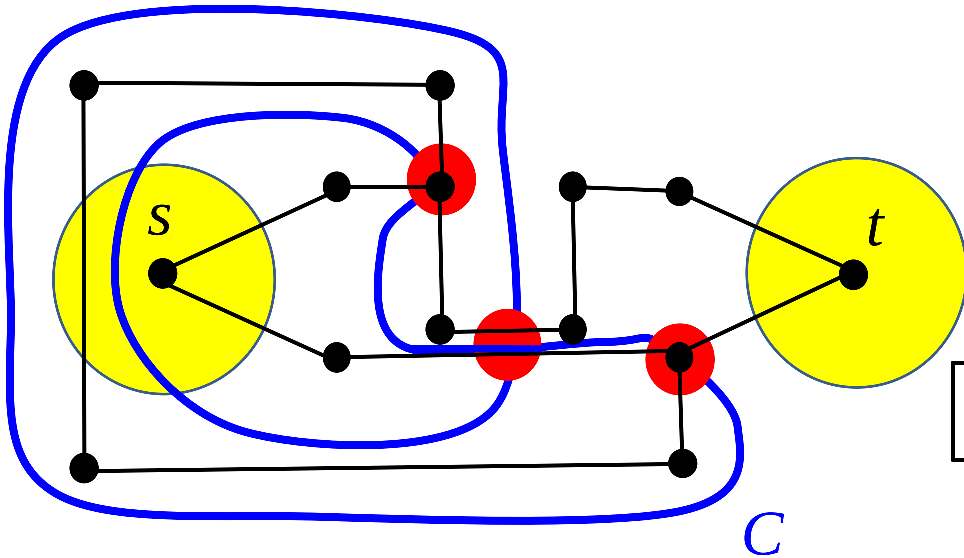
$l(C)$：長さ



<u>最大最小定理</u>

- Max-Flow $= \min\left\{ \left| \dfrac{l(C)}{w(C)} \right| \;\middle|\; C：\text{閉曲線} \right\}$

最大最小定理



Max-Flow = 1
Min-Cut = 2

2 3

$w(C)$ ・ Max-Flow ≤ $l(C)$

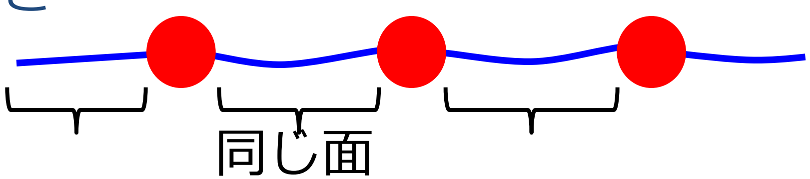
1

$$\text{Max-Flow} \le \left\lfloor \frac{l(C)}{w(C)} \right\rfloor$$

$w(C)$：回転数

C が s と t を分離する回数

$l(C)$：長さ



Based on [McDiarmid, et al., 1994]

<u>最大最小定理</u>

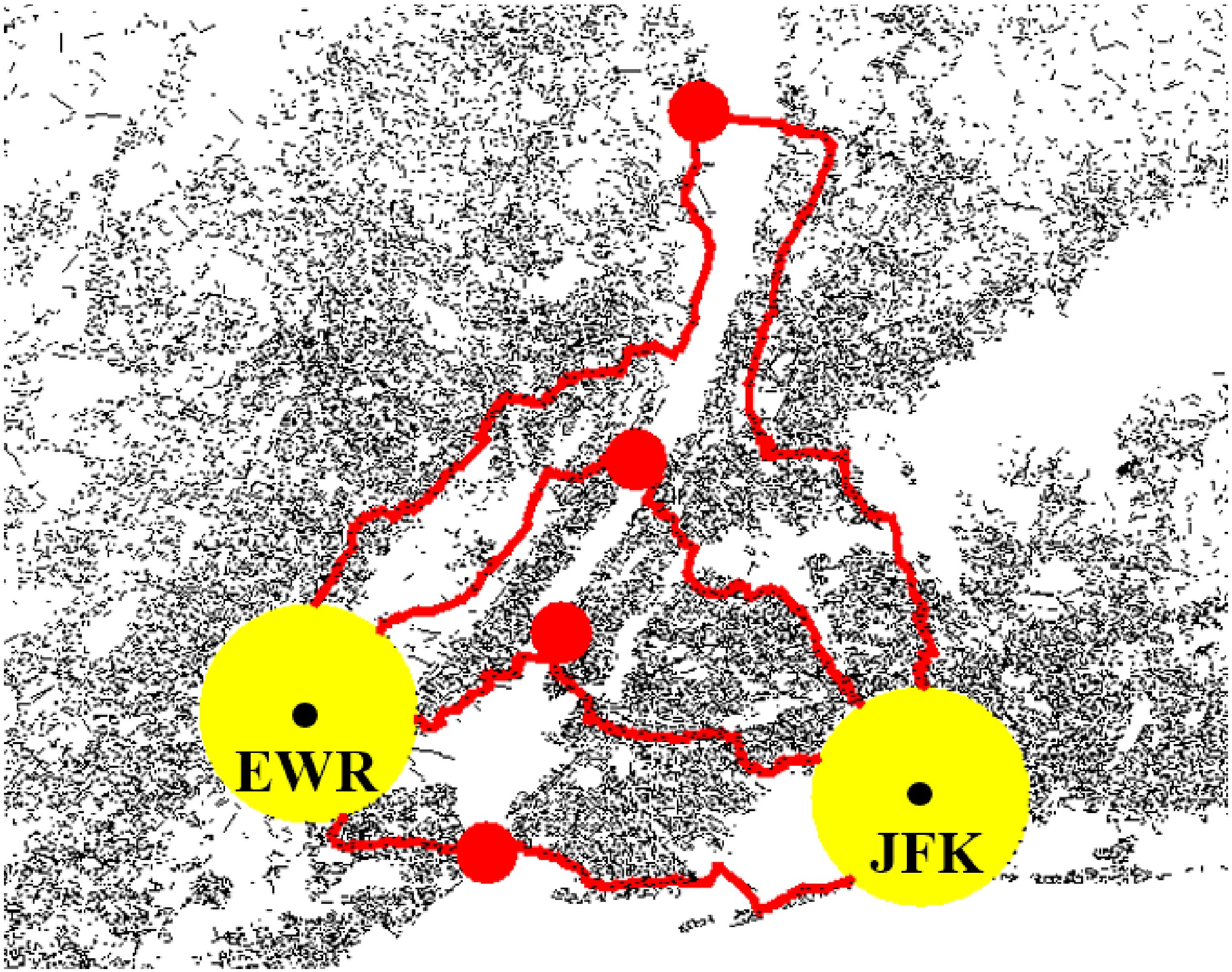
➢ $\text{Max-Flow} = \min \left\{ \left\lfloor \frac{l(C)}{w(C)} \right\rfloor \,\middle|\, C：\text{閉曲線} \right\}$

ニューヨーク道路網への適用

(http://www.dis.uniroma1.it/challenge9/download.shtml)

計算時間：30秒

- 頂点数 ： 264346
- 円板半径 ： 約2km，保護半径 ： 約7km



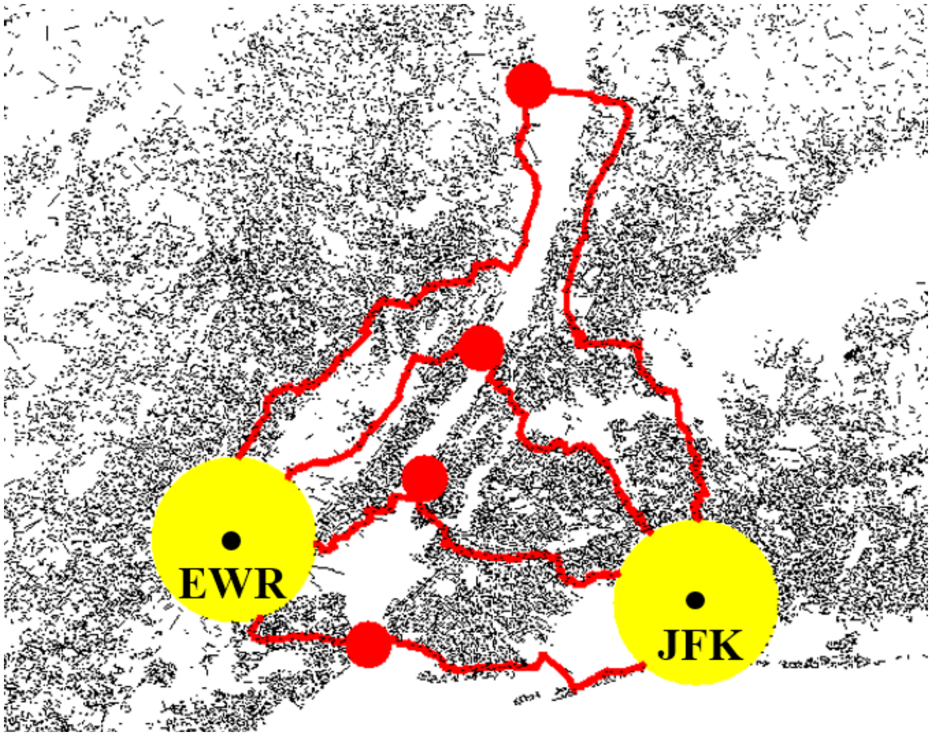
最小カット：4

ニューヨーク道路網への適用 （２）

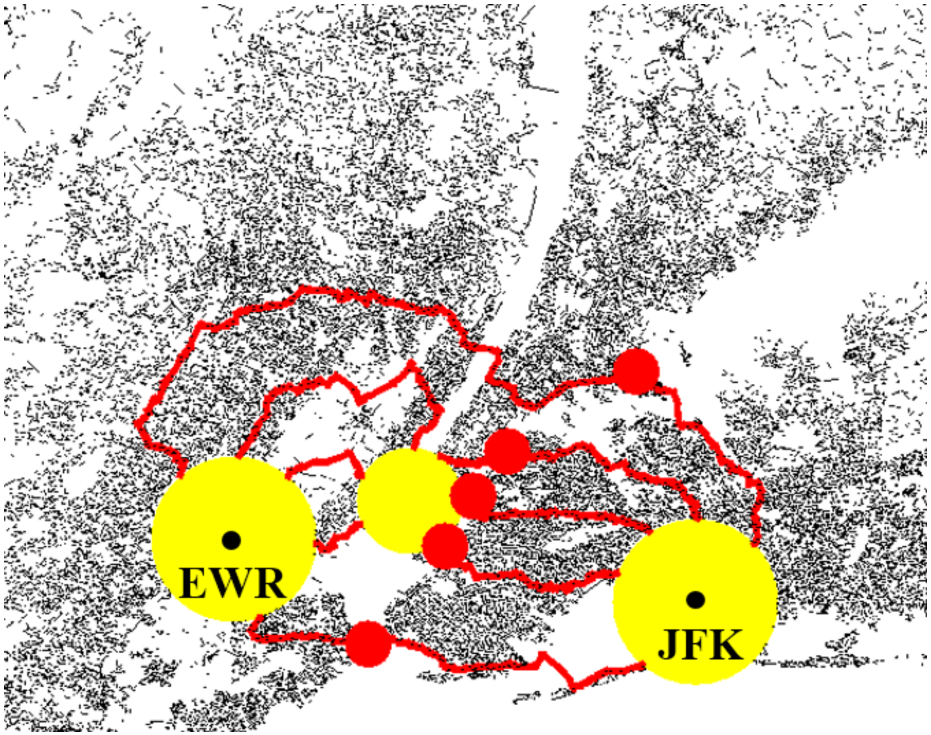
(http://www.dis.uniroma1.it/challenge9/download.shtml)

計算時間：30秒

- 頂点数 ： 264346
- 円板半径 ： 約2km，保護半径 ： 約7km



最小カット：4



最小カット：5

4日目

目標

双対性に関するその他のトピックを紹介

- 有向全域木詰込みの一般化
- 有向カットとダイジョイン
- 円板型損傷モデルにおけるネットワーク評価

まとめ

目標

組合せ最適化の様々な問題において
双対性が現れることを紹介

双対性の意義

- 理論的興味：
  一見関係ない値が等しくなる
- 最適性の保証に使える
  ➡ アルゴリズムの設計