関数不等式とエネルギー集約

中西賢次（数理解析研究所）

1. はじめに

数学では無限の対象から目的のものを探し出すという問題が多いが、特に極限操作や近似を駆使して目標を目指す「解析学」においては、探索範囲を制限するための様々な「不等式」がしばしば最も重要な役割を果たす。この講義では、主に偏微分方程式との関連を念頭に、一般的な関数に対する色々な不等式について紹介する。その中の関数に対する微分・積分などの極限操作を数学的に厳密に取り扱うには相応の準備または知識が必要なので、この講義では数学的厳密性は若干犠牲にして、数学的エッセンスをできるだけ平易にお伝えしたい。

2. 逐次近似法

最初に、方程式の解を求めるために不等式が活躍する典型例として、逐次近似法（または Banach の縮小写像の原理）を簡単な常微分方程式に適用する：

$$u'(t) = au(t), \quad u(0) = b, \tag{2.1}$$

ここで $a, b \in \mathbb{R}$ は実定数、$t \in \mathbb{R}$ は実変数で、$u(t)$ が求める未知関数である。逐次近似法とは、適当な近似解から出発して、方程式の一部を近似関数に置き換えて計算容易にし、そこからより良い近似解を求めることを繰り返す極限で真の解に至る。今の場合具体的には、近似関数列 $u_0(t), u_1(t), u_2(t), \dots,$ を次で定める：

$$u_0(t) = b, \quad u'_{n+1}(t) = au_n(t), \quad u_{n+1}(0) = b \quad (n = 0, 1, 2, \dots,). \tag{2.2}$$

この方程式は未知関数 $u_{n+1}(t)$ が片方にしかないから直ちに積分できて、微分を積分すれば元に戻ること（微積分学の基本定理）から n についての漸化式

$$u_{n+1}(t) = b + \int_0^t au_n(s)ds, \quad u_0(t) = b \tag{2.3}$$

を得る。すると、u_{n+1} と u_n の差は、一つずらした漸化式の差を取れば

$$u_{n+1}(t) - u_n(t) = \int_0^t a(u_n(s) - u_{n-1}(s))ds. \tag{2.4}$$

$t > 0$ では積分の中身を絶対値の最大値にした方が大きくなるから、$T > 0$ に対して

$$\max_{0\le t\le T} |u_{n+1}(t) - u_n(t)| \le \max_{0\le t\le T} |a| \int_0^t \max_{0\le s\le T} |u_n(s) - u_{n-1}(s)|ds. \tag{2.5}$$

これは $\|u\| = \max_{0\le t\le T} |u(t)|$ とおくと、次の形に簡単化できる：

$$\|u_{n+1} - u_n\| \le |a|T\|u_n - u_{n-1}\| \quad (n = 1, 2, \dots,) \tag{2.6}$$

ただし $n = 0$ では $\|u_1 - u_0\| \le |a|T\|u_0\| = |ab|T.$ 漸化不等式を解くと

$$\|u_{n+1} - u_n\| \le (|a|T)^n\|u_1 - u_0\| \le (|a|T)^{n+1}|b|. \tag{2.7}$$

更に、絶対値の三角不等式:$|x+y| \le |x|+|y|$ からノルムの三角不等式:$\|u+v\| \le \|u\|+\|v\|$ が従うことに注意すると、$T < 1/|a|$ の場合、任意の 2 つの自然数 $m > n$ に対して

$$\|u_m - u_n\| \le \sum_{k=n}^{m-1} \|u_{k+1} - u_k\| \le \sum_{k=n}^{m-1} (|a|T)^{k+1}|b| \le \frac{|a|T^{n+1}|b|}{1-|a|T}. \tag{2.8}$$

右辺は $n \to \infty$ で $\to 0$ だから、n を大きくすると、その先の全ての近似関数同士のズレはいくらでも小さくできる。これより、（実数 $\mathbb{R}$ の完備性から） $0 \le t \le T$ の範囲で $u_n(t)$ はある実数に収束する。それを $u_\infty(t)$ とおけば、上で $m \to \infty$ として

$$\|u_\infty - u_n\| \le \frac{|a|T^{n+1}|b|}{1-|a|T} \to 0 \quad (n \to \infty). \tag{2.9}$$

さらに (2.3) で $n \to \infty$ とすれば u_∞ だけの方程式を得る。

$$u_\infty(t) = b + \int_0^t a u_\infty(s) ds, \quad \therefore\ u'_\infty(t) = a u_\infty(t), \quad u_\infty(0) = b. \tag{2.10}$$

また、他に解 $u(t)$ があったとすれば、(2.3) と同様にして

$$\|u_\infty - u\| \le |a|T\|u - u_\infty\|, \tag{2.11}$$

$|a|T < 1$ より $\|u_\infty - u\| = 0.$ つまり $0 \le t \le T$ で $u(t) = u_\infty(t)$ しか解は無い。

以上から、逐次近似法により真の解 $u_\infty(t)$ が $0 \le t \le T$ でただ一つ存在することが分かった。なお、上では最初の近似を $u_0(t) = b$ と定めたが、どんな関数から出発しても同じ $u_\infty(t)$ へ収束することが分かる。また、$t > T$ でも解を求めたければ $t = 0$ の代わりに $t = T$ から再出発すれば良い。今の場合は u_n が具体的に求まり

$$u_n(t) = \sum_{k=0}^{n} b(at)^k/k! \to u_\infty(t) = \sum_{k=0}^{\infty} b(at)^k/k! \quad (n \to \infty) \tag{2.12}$$

は真の解 $u_\infty(t) = be^{at}$ の Taylor 展開に過ぎないが、この論法は u_n があまり具体的でなくても使えて、偏微分方程式を含め様々な問題に適用できる。

2.1. **２階常微分方程式.** 後で参照するためにもう一つ、２階微分の場合もやっておく。$A(t), B(t), C(t)$ を与えられた連続関数として、常微分方程式

$$u''(t) = A(t)u'(t) + B(t)u(t) + C(t), \quad u(0) = a, \quad u'(0) = b \tag{2.13}$$

に同じ論法を適用すると、近似関数 u_n に対する漸化式は

$$u''_{n+1}(t) = A(t)u'_n(t) + B(t)u_n(t) + C(t), \quad u_{n+1}(0) = a, \quad u'_{n+1}(0) = b, \tag{2.14}$$

これは２回積分（微積分学の基本定理）で解けて

$$\begin{aligned} u'_{n+1}(t) &= b + \int_0^t [A(s)u'_n(s) + B(s)u_n(s) + C(s)]ds, \\ u_{n+1}(t) &= a + bt + \int_0^t (t-s)[A(s)u'_n(s) + B(s)u_n(s) + C(s)]ds. \end{aligned} \tag{2.15}$$

そこで微分も含めたノルムを $T > 0$ に対して $\|u\| = \max_{0\le t\le T} |u(t)| + |u'(t)|$ と定めると、前と同様の議論によって、$M = \max_{0\le t\le T} |A(t)| + |B(t)|$ とおくとき

$$\|u_{n+1} - u_n\| \le (T + T^2/2)M\|u_n - u_{n-1}\| \tag{2.16}$$

を得て、$T>0$ が十分小さければ u_n は (u_n' も) 収束し、極限を $u_\infty(t)$ と置けば唯一の解になる。$t>T$ への延長も A,B,C が連続である限り可能。

3. L^p ノルムと Hölder の不等式

前節では関数の「大きさ」を測る為に最大値を用いたが、多変数の場合は微分・積分の対応が（微積分学の基本定理のように）単純でないので、積分を直接ノルムとしてコントロールする方が便利であることが多い。その際、最も基本的なものが L^p ノルムと、それに対する Hölder の不等式である。

以下で多変数関数は m 個の独立な実変数 $x_1,x_2,\dots,x_m\in\mathbb{R}$ を持つ場合を考える。ベクトルで表すときは m 次元ベクトル $x=(x_1,x_2,\dots,x_m)\in\mathbb{R}^m$ となり、その長さ（原点からの距離）も絶対値記号で表す：$|x|=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_m^2}$. $x\in\mathbb{R}^m$ を変数とする関数 $f(x)=f(x_1,x_2,\dots,x_m)$ に対して $\mathbb{R}^m$ 上の積分は逐次積分で定められる：

$$\int_{\mathbb{R}^m} f(x)dx=\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^R\int_{-R}^R\cdots\int_{-R}^R f(x_1,x_2,\dots,x_m)dx_1dx_2\cdots dx_m. \tag{3.1}$$

正の実数 $p>0$ に対して $\mathbb{R}^m$ 上の関数 f の L^p ノルム $0\le\|f\|_p\le\infty$ は次で定まる：

$$\|f\|_p^p=\int_{\mathbb{R}^m}|f(x)|^p dx. \tag{3.2}$$

これが有限値になる関数全体の集合を $L^p(\mathbb{R}^m)$ とおく。積分範囲が無限大なので、積分値が有限になるためには $|x|\to\infty$ のとき $|f(x)|$ が適度に小さくなる必要がある。

次に、$\mathbb{R}^m$ 上の 2 つの関数 $f(x),g(x)$ の「相互作用」を表す数として内積 $\langle f|g\rangle$ を

$$\langle f|g\rangle=\int_{\mathbb{R}^d} f(x)g(x)dx \tag{3.3}$$

で定める。これも一般に有限値に定まるとは限らないが、その十分条件として

Theorem 3.1 (Hölder の不等式)**.** $1\le p,q<\infty$ が $1/p+1/q=1$ を満たすなら、任意の $f\in L^p(\mathbb{R}^m)$, $g\in L^q(\mathbb{R}^m)$ に対して

$$|\langle f|g\rangle|\le\|f\|_p\|g\|_q. \tag{3.4}$$

なお、積分範囲が $\mathbb{R}^m$ なのは全く無関係で、もっと一般の積分に対して成り立ち、特に積分の代わりに和に対しても同じ式が成り立つ。$p\ge1$ に対応する $q\ge1$ は $q=\frac{p}{p-1}$ で定まり、これを $q=p'$ とかいて Hölder 共役指数と呼ぶ。$p=q=2$ の場合は Cauchy-Schwarz の不等式である。また、$a>0$ に対して $[f]^a=|f|^{a-1}f$ とおくと

$$\langle|f||g|\rangle=\|fg\|_1,\quad \|[f]^a\|_p=\|f\|_{ap}^a \tag{3.5}$$

であることに注意すれば、次のように拡張できる

Corollary 3.2 (Hölder の不等式（拡張版）)**.** $0<p,q,r,a,b<\infty$ が $a/p+b/q=1/r$ を満たすなら、任意の $f\in L^p(\mathbb{R}^m)$, $g\in L^q(\mathbb{R}^m)$ に対して

$$\|[f]^a[g]^b\|_r\le\|f\|_p^a\|g\|_q^b. \tag{3.6}$$

実際、(3.4) で f,g を $|f|^{ar},|g|^{br}$ に置き換えれば (3.5) を用いて直ちに得られる。

Hölder の不等式 (3.4) の証明. 実数に関する不等式

$$p,q \geq 1,\ a,b>0, \quad 1/p+1/q=1 \implies a^{1/p}b^{1/q} \leq a/p+b/q \tag{3.7}$$

を使う。この証明は、両辺を a で割り $x=b/a$ とおくと $x^{1/q}$ の凸性から従う。

まず、$\|f\|_p\|g\|_q=0$ なら自明なので、$0<\|f\|_p,\|g\|_q<\infty$ として、$F=f/\|f\|_p$, $G=g/\|g\|_q$ とおくと $\|F\|_p=\|G\|_q=1$. (3.7) を使って

$$|\langle F|G\rangle| \leq \int (|F|^p)^{1/p}(|G|^q)^{1/q}dx \leq \int \frac{|F|^p}{p}+\frac{|G|^q}{q}dx = \frac{\|F\|_p^p}{p}+\frac{\|G\|_q^q}{q} = \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.$$

f,g に戻すと $\langle F|G\rangle = \langle f|g\rangle/\|f\|_p\|g\|_q$ だから (3.4) が得られた。 □

次に Hödler の不等式 (3.4) が等号の場合について考える。$f\in L^p$ が与えられて $\|f\|_p>0$ のとき、(3.5) を使うと、$g=[f]^{p/q}$ とおけば

$$\|g\|_q = \|[f]^{p/q}\|_q = \|f\|_p^{p/q}, \quad \langle f|g\rangle = \|f\|_{1+p/q}^{1+p/q} \tag{3.8}$$

だから、このとき (3.4) は等号になる。更に $G=g/\|g\|_q$ とおけば、$\langle f|G\rangle$ についても等号が成立し、かつ $\|G\|_q=1$ だから、

$$1/p+1/q=1,\ f\in L^p \implies \max_{g\in L^q,\ \|g\|_q=1} \langle f|g\rangle = \|f\|_p. \tag{3.9}$$

最大値は上の G が取り、右辺が最大であることは Hölder から従う。逆に、(3.4) はこの式に含まれている。この式を L^p ノルムの双対表現と言う。その左辺は $g\in L^q$ を動かさないといけないが、その代わりに f については線形（1次式）である所が右辺に対するアドバンテージになる。例えばこれより L^p ノルムの三角不等式が示せる：

Theorem 3.3 (Minkowski の不等式)**.** $1\leq p<\infty$ のとき、$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p+\|g\|_p$.

Proof. $p\geq 1$ の共役指数を $q=\frac{p}{p-1}$ とおけば双対表現 (3.9) より

$$\|f+g\|_p = \max_{\|h\|_q=1}\langle f+g|h\rangle \leq \max_{\|h\|_q=1}\langle f|h\rangle + \max_{\|h\|_q=1}\langle g|h\rangle = \|f\|_p+\|g\|_p. \tag{3.10}$$

なお max に対する三角不等式を使った。($p=1$ の場合 $\|h\|_\infty = \max_x |h(x)|$ とする) □

ベクトルに対する三角不等式は、有限和に対する Minkowski の $p=2$ の場合である：

$$x,y\in\mathbb{R}^m \implies |x+y|\leq|x|+|y|. \tag{3.11}$$

もっとも、$p=2$ の場合の Minkowski は内積と Cauchy-Schwarz からも示せる：

$$\begin{aligned}\|f+g\|_2^2 &= \langle f+g|f+g\rangle = \|f\|_2^2+2\langle f|g\rangle+\|g\|_2^2 \\ &\leq \|f\|_2^2+2\|f\|_2\|g\|_2+\|g\|_2^2 = (\|f\|_2+\|g\|_2)^2.\end{aligned} \tag{3.12}$$

特に、$\|f\|_2=1=\|g\|_2$ の場合、Cauchy-Schwarz で等号成立すれば

$$0\leq \|f-g\|_2^2 = \|f\|_2^2 - 2\langle f|g\rangle + \|g\|_2^2 = 2(1-\langle f|g\rangle)=0 \tag{3.13}$$

より $\|f-g\|_2=0$ だから $f=g$. 従って、一般の $f,g\in L^2$ の場合は

$$f,g\in L^2,\ \langle f|g\rangle = \|f\|_2\|g\|_2 \iff \|f\|_2\|g\|_2=0 \ \text{ or } \ f/\|f\|_2 = g/\|g\|_2. \tag{3.14}$$

4. SOBOLEV の不等式

微分方程式への応用には、微分のコントロールが不可欠だが、(偏) 微分を含めた関数の「大きさ」を L^p ノルムではかったものが Sobolev ノルムである。この講義では簡単のため、最も基本的な 1 階微分の L^2 ノルムだけ考える。まず $x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$ を変数とする関数 $f(x)$ について、各変数 x_k に関する偏微分を

$$\partial_{x_k} f(x) = f_{x_k}(x) = \frac{\partial f}{\partial x_k}(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(x + \varepsilon e_k) - f(x)}{\varepsilon} \tag{4.1}$$

で表す。ただし $e_k \in \mathbb{R}^m$ は第 k 成分のみ 1 で他は 0 のベクトル。最右辺以外はすべて偏微分を現わす記号である。変数が 1 つしかない場合も同じ記法を使う。一般の偏微分では動かす変数だけでなく、それ以外の止める変数を指定することも重要だが、この講義では複雑な変数依存は出てこないので文脈から分かる。また、勾配ベクトル $\nabla f(x) \in \mathbb{R}^m$ と Laplacian $\Delta f(x) \in \mathbb{R}$ を次で定める。

$$\nabla f(x) = (\partial_{x_1} f(x), \partial_{x_2} f(x), \dots, \partial_{x_m} f(x)), \quad \Delta f(x) = \partial_{x_1}^2 f(x) + \cdots + \partial_{x_m}^2 f(x). \tag{4.2}$$

なお ∂^2 は同じ変数での偏微分を 2 回繰り返す。関数 $F(x)$ の値がベクトル $\in \mathbb{R}^m$ のとき、発散 $\nabla \cdot F(x) \in \mathbb{R}$ を次で定める

$$\nabla \cdot F(x) = \partial_{x_1} F_1(x) + \cdots + \partial_{x_m} F_m(x) \tag{4.3}$$

と、Laplacian は次のようにも書ける：

$$\Delta f(x) = \nabla \cdot \nabla f(x). \tag{4.4}$$

Sobolev の H^1 ノルム $0 \le \|f\|_{H^1} \le \infty$ は次で定義される。

$$\|f\|_{H^1}^2 = \|f\|_2^2 + \|\nabla f\|_2^2. \tag{4.5}$$

ただしベクトル値関数の L^p ノルムは実数値と同様、関数の絶対値の代わりにベクトルの長さを用いて定義される。H^1 ノルムが有限な関数全体を $H^1(\mathbb{R}^m)$ とおく。

1 次元 $m = 1$ の場合、H^1 ノルムは関数の最大値を抑える。実際、Cauchy-Schwarz より任意の $x > y$ で

$$\begin{aligned} |u^2(x) - u^2(y)| &= \left| \int_y^x 2u(t)u'(t)dt \right| \\ &\le 2\sqrt{\int_y^x |u(t)|^2 dt \int_y^x |u'(t)|^2 dt} \le 2\|u\|_2 \|\nabla u\|_2 \le \|u\|_{H^1}^2. \end{aligned} \tag{4.6}$$

もし $u \in H^1(\mathbb{R})$ なら $\|u\|_2 < \infty$ より、ある実数列 $y_n \to \infty$ に対して $|u(y_n)| \to 0$ となる必要がある。すると、上で $y = y_n \to \infty$ とした後、平方根を取れば

$$\max_{x \in \mathbb{R}} |u(x)| \le \|u\|_{H^1}. \tag{4.7}$$

多次元 $m \ge 2$ の場合にはこのような不等式は成り立たず、H^1 ノルムで最大値を制御することはできないが、代わりに L^p ノルムを抑えることができる。これらの不等式を Sobolev の不等式と総称する。

Theorem 4.1 (Sobolev の不等式 ($H^1(\mathbb{R}^m)$, $m \ge 3$ の場合))**.** $m \ge 3$ のとき、$2^* = \frac{2m}{m-2}$ とおくと、$2 \le p \le 2^*$ の範囲で各 p に対して正定数 C_p が存在して次が成り立つ：

$$u \in H^1(\mathbb{R}^m) \implies \|u\|_p \le C_p \|u\|_{H^1}. \tag{4.8}$$

この不等式は p が最大のとき（$p=2^*$）最強で、他の場合は Hölder から従う。実際、$2\le p\le 2^*$ は $1/p=1/2-\theta/m$ とおくとき $0\le\theta\le 1$ の条件になるが、$0<\theta<1$ のとき Hölder の拡張版 (3.6) より

$$\|u\|_p \le \|u\|_2^{1-\theta}\|u\|_{2^*}^{\theta} \tag{4.9}$$

が得られる ($f=g=u$, $a=1-\theta$, $b=\theta$ とおく)。$\|u\|_2\le\|u\|_{H^1}$ は定義から明らかなので、$\|u\|_{2^*}$ さえ抑えられれば間の L^p も全て抑えられることになる。上のような不等式を一般に補間不等式と呼ぶ。

この講義では Sobolev の不等式を一般には証明せず、関数 $u(x)$ が原点周りに球対称

$$u(x)=u(|x|,0,\dots,0) \tag{4.10}$$

の場合だけ考える。記号の簡単のため、$r=|x|$ とおき、上の右辺を 1 変数 r だけの関数として $u(r)$ とも書く。このような特別な場合に限っても、Sobolev の不等式の本質が失われないのは次の事実に依る：任意の関数 $u(x)$ に対して、以下を満たすような球対称関数 $u^*(r)$ が一意的に定められる（球対称再配分）：

(1) 非負かつ r について非増加： $u^*(r)\ge 0$, $\partial_r u^*(r)\le 0$.
(2) $\|u\|_p=\|u^*\|_p$ かつ $\|\nabla u^*\|_p\le\|\nabla u\|_p$.

特に (2) より、Sobolev の不等式は球対称の場合の方が「成り立ち難い」。実際、球対称関数で Sobolev の不等式が成り立つなら、上の事より

$$\|u\|_p=\|u^*\|_p\le C_p\|u^*\|_{H^1}\le C_p\|u\|_{H^1}. \tag{4.11}$$

なお (2) の最後の不等式は Pólya-Szegő の不等式と呼ばれる。

さて、動径 $r=|x|$ 方向の微分は、合成関数の微分公式より $r>0$ で

$$\partial_r u=u_r=\frac{x}{r}\cdot\nabla u \tag{4.12}$$

(この $\cdot$ は $\mathbb{R}^m$ ベクトルの内積) だから、$|x/r|=1$ より $|u_r|\le|\nabla u|$. 積分については、$R>0$ に対して　$\mathbb{R}^m$ 上の関数 $B_R(x)$ を

$$|x|<R \implies B_R(x)=1,\quad |x|\ge R \implies B_R(x)=0 \tag{4.13}$$

と定める（球の定義関数）と、積分変数変換 $y_k=Rx_k$ $(k=1,\dots,m)$ により

$$\|B_R\|_1=\int_{\mathbb{R}^m}B_1(x/R)dx=\int_{\mathbb{R}^m}B_1(y)R^m dy=R^m\|B_1\|_1. \tag{4.14}$$

これを半径 R で微分すると $\partial_R\|B_R\|_1=mR^{m-1}\|B_1\|_1$, その $R=1$ での値を

$$S_m=m\|B_1\|_1 \tag{4.15}$$

とおく（$m-1$ 次元の単位球面の表面積）。$r\to\infty$ のとき $u(r)\to 0$ なら

$$\int_{\mathbb{R}^m}u(x)dx=-\int_{\mathbb{R}^m}\int_r^\infty u'(t)dtdx. \tag{4.16}$$

ここで t の範囲は $r=|x|<t$ とも書けるから、$B_t(x)=1$ となる範囲なので、

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^m}u(x)dx&=-\int_{\mathbb{R}^m}\int_0^\infty B_t(x)u'(t)dtdx=-\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^m}B_t(x)u'(t)dxdt\\&=-\int_0^\infty\|B_t\|_1u'(t)dt=-\int_0^\infty t^m\|B_1\|_1u'(t)dt,\end{aligned} \tag{4.17}$$

ただし途中で積分順序を入れ替えた。部分積分すると

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^m} u(x)dx &= [-t^m\|B_1\|_1 u(t)]_0^\infty + \int_0^\infty mt^{m-1}\|B_1\|_1 u(t)dt \\
&= S_m\int_0^\infty u(r)r^{m-1}dr.
\end{aligned}
\tag{4.18}
$$

つまり 1 変数 r だけの積分で表せる。S_m の値を求めるには、$u(x)=e^{-|x|^2}$ を選ぶと

$$
\int_{\mathbb{R}^m} e^{-|x|^2} = \int_{\mathbb{R}} e^{-x_1^2}dx_1\cdots\int_{\mathbb{R}} e^{-x_m^2}dx_m = S_m\int_0^\infty e^{-r^2}r^{m-1}dr \tag{4.19}
$$

これを G_m とおくと、$G_m=G_1^m$ かつ $s=r^2$ の変数変換で

$$
G_m = \frac{S_m}{2}\int_0^\infty e^{-s}s^{m/2-1}ds = \frac{S_m}{2}\Gamma(m/2), \tag{4.20}
$$

ここでガンマ関数 Γ の定義は上の積分による。特に $m=2$ では積分 $=1$ だから $G_2=2\pi/2=\pi$. ゆえに $G_m=\pi^{m/2}$ で、

$$
S_m = 2\pi^{m/2}/\Gamma(m/2). \tag{4.21}
$$

$\Gamma(m/2)$ の値は、上の計算から $\Gamma(1/2)=G_1=\sqrt{\pi}$, $\Gamma(1)=G_2/\pi=1$ と部分積分で

$$
\lambda>0 \implies \lambda\Gamma(\lambda) = [e^{-s}s^\lambda]_0^\infty + \int_0^\infty e^{-s}s^\lambda ds = \Gamma(\lambda+1) \tag{4.22}
$$

から具体的に求められる。

さて球対称の場合、Sobolev の不等式 (4.8) は次の 2 つの不等式から導出できる。

Theorem 4.2 (Hardy の不等式)**.** $m\geq 3$, $u\in H^1(\mathbb{R}^m)$ のとき

$$
\|u/r\|_2 \leq \frac{2}{m-2}\|u_r\|_2. \tag{4.23}
$$

Theorem 4.3 (球対称 Sobolev の不等式)**.** $m\geq 3$, $u\in H^1(\mathbb{R}^m)$ が球対称のとき

$$
\max_{r>0}|r^{m/2-1}u(r)| \leq [(m-2)S_m]^{-1/2}\|u_r\|_2. \tag{4.24}
$$

球対称の場合の (4.8) の証明. $p=2^*$ で示せば良い事は既に見た。このとき、$u\in H^1(\mathbb{R}^m)$ が球対称なら (4.23), (4.24) より、

$$
\begin{aligned}
\|u\|_{2^*}^{2^*} &= \int |r^{m/2-1}u|^{\frac{4}{m-2}}|u/r|^2dx \\
&\leq \max_{r>0}|r^{m/2-1}u|^{\frac{4}{m-2}}\|u/r\|_2^2 \leq [(m-2)S_m]^{-\frac{2}{m-2}}\frac{4}{(m-2)^2}\|u_r\|_2^{2^*}.
\end{aligned}
\tag{4.25}
$$

両辺 2^* 乗根を取ってから右辺の係数を C_{2^*} とすれば良い。 □

従って球対称関数の場合は、Hardy と球対称 Sobolev の不等式を示せば良い。

(4.23) の証明. u が球対称の場合、(4.18) と部分積分より

$$
\frac{1}{S_m}\|u/r\|_2^2 = \int_0^\infty u^2r^{m-3}dr = \left[u^2\frac{r^{m-2}}{m-2}\right]_0^\infty - \int_0^\infty 2uu_r\frac{r^{m-2}}{m-2}dr, \tag{4.26}
$$

$u \in L^2(\mathbb{R}^m)$ より境界値は消える。最後の積分に Cauchy-Schwarz を適用して

$$\|u/r\|_2^2 \le \frac{2S_m}{m-2}\sqrt{\int_0^\infty u_r^2 r^{m-1}dr \int_0^\infty u^2 r^{m-3}dr}, \tag{4.27}$$

両辺を最後の積分で割れば望みの不等式を得る。球対称でない関数でも、角度 x/r を固定する毎に同じ議論を r 方向の積分に適用すれば同じ結論を得る。 □

(4.24) の証明. $r>0$ に対して $u \in L^2(\mathbb{R}^m)$ および Cauchy-Schwarz より

$$u(r) = \int_\infty^r u_r(t)dt \le \sqrt{\int_r^\infty u_r^2(t)t^{m-1}dt \int_r^\infty t^{1-m}dt} \le \sqrt{\|u_r\|_2^2 \frac{r^{2-m}}{S_m(m-2)}}, \tag{4.28}$$

最後の因子で両辺割れば望みの不等式を得る。ここでは球対称性が本質的に必要。 □

簡単な応用例として、次の偏微分方程式（定常 Schrödinger 方程式）を解いてみる。

$$-\Delta u(x) + u(x) + V(x)u(x) = f(x), \quad (x \in \mathbb{R}^m,\ m \ge 3). \tag{4.29}$$

ただし $u \in H^1(\mathbb{R}^m)$ が求める未知関数で、$V \in L^{m/2}(\mathbb{R}^m)$, $f \in L^{2_*}(\mathbb{R}^m)$ が与えられているとする。ここで $2_* = \frac{2m}{m+2}$ は 2^* の Hölder 共役指数。

まず $V=0$ の場合は、Fourier 変換を用いて具体的に解が表示できる：

$$u = \mathcal{F}^{-1}\left[\langle\xi\rangle^{-2}\mathcal{F}f(\xi)\right], \quad \langle\xi\rangle = \sqrt{1+|\xi|^2}, \tag{4.30}$$

ただし Fourier 変換 $\mathcal{F}$ と逆 Fourier 変換 $\mathcal{F}^{-1}$ は次で定義され

$$\mathcal{F}f(\xi) = \int_{\mathbb{R}^m} f(x)e^{-ix\cdot\xi}dx, \quad \mathcal{F}^{-1}g(x) = (2\pi)^{-m}\int_{\mathbb{R}^m} g(\xi)e^{ix\cdot\xi}d\xi, \tag{4.31}$$

逆変換公式 $\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}f = \mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}f = f$ が成り立つ。(4.30) が実際に解であることは、

$$(2\pi)^m\partial_{x_k}\mathcal{F}^{-1}g(x) = \int g(\xi)\partial_{x_k}e^{ix\cdot\xi}d\xi = \int i\xi_k g(\xi)e^{ix\cdot\xi}d\xi \tag{4.32}$$

つまり $\partial_{x_k}\mathcal{F}^{-1}g = \mathcal{F}^{-1}[i\xi_k g]$ より

$$(-\Delta+1)\mathcal{F}^{-1}g(x) = \mathcal{F}^{-1}[(-(i\xi_1)^2 - \cdots - (i\xi_m)^2 + 1)g] = \mathcal{F}^{-1}[\langle\xi\rangle^2 g] \tag{4.33}$$

から従う。また、(4.30) が解であることから、方程式の両辺に u を掛けて積分すると

$$\langle f|u\rangle = \langle -\Delta u|u\rangle + \langle u|u\rangle = \langle\nabla u|\nabla u\rangle + \|u\|_2^2 = \|u\|_{H^1}^2. \tag{4.34}$$

ただし第 2 等式では $\Delta u = \sum_k \partial_{x_k}^2 u$ の各項について x_k 方向で部分積分した。Hölder と Sobolev の不等式 (4.8) より

$$\|u\|_{H^1}^2 = \langle f|u\rangle \le \|f\|_{2_*}\|u\|_{2^*} \le C_{2^*}\|f\|_{2_*}\|u\|_{H^1} \tag{4.35}$$

従って、(4.30) の u を $(-\Delta+1)^{-1}f$ で表すと、

$$\|(-\Delta+1)^{-1}f\|_{H^1} \le C_{2^*}\|f\|_{2_*}. \tag{4.36}$$

これを使えば $V \ne 0$ の場合 (4.29) の解 u は

$$u = (-\Delta+1)^{-1}(f - Vu) \tag{4.37}$$

を満たすものとして求めることができる。実際、上の不等式と Hölder, Minkowski より

$$\begin{aligned}\|(-\Delta+1)^{-1}(f-Vu)\|_{H^1} &\le C_{2^*}\|f-Vu\|_{2_*} \le C_{2^*}[\|f\|_{2_*}+\|V\|_{m/2}\|u\|_{2^*}] \\ &\le C_{2^*}\|f\|_{2_*}+C_{2^*}^2\|V\|_{m/2}\|u\|_{H^1}\end{aligned} \tag{4.38}$$

なので、$C_{2^*}^2\|V\|_{m/2}<1$ なら §2 の逐次近似法で一意解 u が求められる。

他方、C_{2^*} が Sobolev の不等式で最良（最小）の定数ならば、$\|V\|_{m/2}>C_{2^*}^{-2}$ の場合は一般に解 $u\in H^1(\mathbb{R}^m)$ が存在するとは限らないことを後で示す（§5.1）。

5. 不等式の最良定数と最大化元

§3 で Hölder の不等式に対する等号成立を調べたが、ここでは前節の Sobolev の不等式などについて等号成立を調べる。例えば (4.8) の右辺に定数 C_p があるが、不等式の成立するような最良（最小）の定数でない限り等号は成立しないことは明らかである。従って、同時に最良定数を調べることにもなる。また、等号を満たす u があるなら

$$C_p = \max_{u\in H^1\setminus\{0\}} \|u\|_p/\|u\|_{H^1}, \tag{5.1}$$

で最良定数が与えられ、右辺の最大値を取る u に対して等号が成立する。つまり、右辺の比の最大値と、最大値を取る関数（最大化元）を求める問題になる。

まず Sobolev の不等式 (4.8) で $p=2,2^*$ の場合は最大化元が無いことが以下の議論から分かる。任意の $u\in H^1(\mathbb{R}^m)$ について、$p=2$ なら $\lambda\to+0$ に対して $u_\lambda=\lambda^{m/2}u(\lambda x)$, $p=2^*$ なら $\nu\to\infty$ に対して $u_\nu=\nu^{m/2-1}u(\nu x)$ とおくと、変数変換 $y=\lambda x$ により

$$\begin{aligned}\|u_\lambda\|_2^2 &= \int \lambda^m|u(\lambda x)|^2dx = \int |u(y)|^2dy = \|u\|_2^2, \\ \|\nabla u_\lambda\|_2^2 &= \int \lambda^{m+2}|\nabla u(\lambda x)|^2dx = \lambda^2\|\nabla u\|_2^2,\end{aligned} \tag{5.2}$$

同様にして $\|u_\nu\|_2=\nu^{-1}\|u\|_2$, $\|u_\nu\|_{2^*}=\|u\|_{2^*}$, $\|\nabla u_\nu\|_2=\|\nabla u\|_2$ だから

$$\begin{aligned}&\|u\|_2=\|u_\lambda\|_2<\|u_\lambda\|_{H^1}\searrow\|u\|_2 \quad (\lambda\to+0), \\ &\|u\|_{2^*}=\|u_\nu\|_{2^*}\le C_{2^*}\|u_\nu\|_{H^1}\searrow C_{2^*}\|\nabla u\|_2 \quad (\nu\to\infty).\end{aligned} \tag{5.3}$$

つまり (5.1) 右辺の比が $\lambda\to+0$ または $\nu\to\infty$ とするほど大きくなるが、これらの極限で対応する関数は 0 になってしまうので、最大化元は存在しない。

$p=2$ では Sobolev 不等式に意味は無いが、$p=2^*$ の場合、$\nu\to\infty$ で関数 u_ν は各積分量が $|x|\lesssim 1/\nu\to+0$ に集中している。正確には例えば L^{2^*} ノルムについて、

$$\int_{|x|>R/\nu}|u_\nu|^{2^*}dx = \int_{|x|>R}|u|^{2^*}dx \to 0 \quad (R\to\infty). \tag{5.4}$$

これを Sobolev の不等式におけるエネルギー集約と言う。このように最大化元を探そうとしても関数が「極限の無い方へ逃げてしまう」と最大化元が無い可能性がある。これを最大化問題におけるコンパクト性の破れと言うが、逆にある集合内の関数が「どこにも逃げられない」ときコンパクトと言って、その場合は最大化元が極限として求まる。一般に、集合 X の中の任意の列 $u_1,u_2,\dots,\in X$ に対して適当な増加自然数列 $n_1<n_2<\cdots$ をとると、部分列 u_{n_k} が $k\to\infty$ である $u\in X$ に収束するとき、X は（点列）コンパクトと言う。

$2<p<2^*$ の場合、球対称関数に限れば以下のようにコンパクト性から最大化元を得られる。なお、球対称に限った最大値が全体での最大値と一致するのは球対称再配分の性質から従う。コンパクト性のためにまず、上の u_λ や u_ν のように $|x|\to\infty$

や $|x| \to 0$ へ関数が逃げることはできないことを示す。実際、Hardy (4.23) と球対称 Sobolev (4.24) より、$R > 0$ に対して

$$\begin{aligned}&\int_{|x|<R} |u(x)|^p dx = S_m \int_0^R |r^{m/2-1}u|^{p-2}|u/r|^2 r^{(2^*-p)(m/2-1)} r^{m-1} dr \\ &\le [(m-2)S_m]^{-p/2+1}\|u_r\|_2^{p-2} 4(m-2)^{-2}\|u_r\|_2^2 R^{(2^*-p)(m/2-1)} \to 0 \quad (R \to +0),\end{aligned} \tag{5.5}$$

$$\begin{aligned}&\int_{|x|>R} |u(x)|^p dx = S_m \int_R^\infty |r^{m/2-1}u|^{p-2}|u|^2 r^{(2-p)(m/2-1)} r^{m-1} dr \\ &\le [(m-2)S_m]^{-p/2+1}\|u_r\|_2^{p-2}\|u\|_2^2 R^{(2-p)(m/2-1)} \to 0 \quad (R \to \infty).\end{aligned} \tag{5.6}$$

これらより、例えば $\|u\|_{H^1} \le 1$ に制限しておくと、$|x|$ が小さい所と大きい所で L^p ノルムが一様に小さい。特に u_λ や u_ν のように $|x| \to 0$ や $|x| \to \infty$ へ逃げると L^p ノルムが減衰するので最大値には近づけない。$|x|$ が 0 と ∞ から離れた範囲では、球対称 Sobolev により $|u(r)|$ の大きさは一様に抑えられ、その振動幅も $0 < r_1 < r_2$ のとき

$$\begin{aligned}|u(r_1) - u(r_2)| \le \int_{r_1}^{r_2} |u_r(t)| dt &\le \sqrt{\int_{r_1}^{r_2} |u_r(t)|^2 t^{m-1} \int_{r_1}^{r_2} t^{1-m} dt} \\ &\le [(m-2)S_m]^{-1/2}\|u_r\|_2 \sqrt{r_2^{m-2} - r_1^{m-2}}\end{aligned} \tag{5.7}$$

と抑えられる。これと Ascoli-Arzela の定理により、球対称関数列 $u_n \in H^1(\mathbb{R}^m)$ が $\|u_n\|_{H^1} \le 1$ を満たすなら、任意の $b > a > 0$ に対して $a \le r = |x| \le b$ の範囲で、ある極限 u_∞ へ一様収束するような部分列 $u_{n_1}, u_{n_2}, \ldots,$ が存在する：

$$\lim_{k\to\infty} \max_{a \le r \le b} |u_{n_k}(r) - u_\infty(r)| = 0. \tag{5.8}$$

このときこの範囲の L^p ノルムでも収束する。他方 a を 0 に、b を ∞ へ近づけると (5.5)–(5.6) より $|x| \le a$, $|x| \ge b$ での L^p ノルムは幾らでも小さくできるので、このような関数全体の集合は $L^p(\mathbb{R}^m)$ の意味でコンパクトであると結論される。特に関数列 u_n として (5.1) がなるべく大きくなるよう取れば、その部分列 u_{n_k} の極限が最大化元となる。なお、この議論で H^1 ノルムは収束するか分からないが、L^2 の双対表現 (3.9) における内積は収束するので、L^2 ノルムは極限で増加しない：

$$\|u_\infty\|_2 = \max_{g\in L^2,\ \|g\|_2=1} \langle u_\infty|g\rangle = \max_{g\in L^2,\ \|g\|_2=1} \lim_{k\to\infty} \langle u_{n_k}|g\rangle \le \lim_{k\to\infty} \|u_{n_k}\|_2. \tag{5.9}$$

$\|\nabla u_\infty\|_2$ についても同様の不等式が次の双対表現から従う：

$$\|\nabla u\|_2 = \sup_{g\in H^1,\ \|g\|_2=1} \langle \nabla u|g\rangle = \sup_{g\in H^1,\ \|g\|_2=1} \langle u|\nabla g\rangle \tag{5.10}$$

なお第 2 等号は部分積分による。ここでは $g \in H^1$ の条件を付けているので必ずしも最大値が無いため、max の代わりに上限 sup (集合内のどの値よりも大きな数の内で最小のもの) を用いている。以上より、極限 u_∞ の H^1 ノルムは増えないが、もし減ってしまうと C_p の最大性に反するので、$\|u_{n_k}\|_{H^1} \to \|u_\infty\|_{H^1}$ が分かる。

次に Hardy (4.23) と球対称 Sobolev (4.24) について最良定数と最大化元を考える。これらについては証明中の不等号が全て等号になる場合を調べれば良い。Hardy の場合は Cauchy-Schwarz の不等式を 1 つ使っただけだから、その等号成立条件 (3.14) より、$0 \ne u \in L^2(\mathbb{R}^m)$ も考慮すると、ある定数 $c < 0$ に対して

$$u_r = cu/r \tag{5.11}$$

が必要十分である。このとき $\partial_r[r^{-c}u]=0$ より $u(r)=r^c u(1)$, $u_r(r)=cr^{c-1}u(1)$ となるが、これでは $c<0$ が何であっても $u(1)=0$ でない限り $\|u_r\|_2=\infty$ なので不適、即ち Hardy (3.14) に最大化元は無い。

球対称 Sobolev についても同様の議論で、$r=R>0$ において (4.28) の第 1 不等式が等号になるにはある定数 $c\in\mathbb{R}$ について $u_r=cr^{1-d}$ $(r>R)$ となることが必要十分で、更に第 2 不等式も等号になるには $r<R$ では $u_r=0$ つまり $u=cR^{1-d}$ となることが必要十分。従って球対称 Sobolev では (4.24) の定数が最良で、その最大化元は上記の形のものだけである。

Hardy の不等式 (4.23) では最大化元は無いが、(4.23) の定数が最良であることは以下のように示せる。$\chi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を 2 階微分可能で $|t|\le 1$ では $\chi(t)=1$, $|t|\ge 2$ では $\chi(t)=0$ を満たす関数として固定し、パラメータ $\varepsilon\to+0$ に対して $u(r)=r^{1-m/2}\chi(\varepsilon\log r)$ とおく。すると $t=\varepsilon\log r$ への変数変換で

$$\int_0^\infty |u/r|^2 r^{m-1}dr=\int_0^\infty |\chi(\varepsilon\log r)|^2 r^{-1}dr=\varepsilon^{-1}\int_{\mathbb{R}}|\chi(t)|^2dt\to\infty\quad(\varepsilon\to+0). \tag{5.12}$$

他方、微分については

$$u_r=(1-m/2)r^{-m/2}\chi(\varepsilon\log r)+r^{-m/2}\chi'(\varepsilon\log r)\varepsilon=v_1+v_2 \tag{5.13}$$

とおくと同様の計算から

$$\int_0^\infty |v_1|^2 r^{m-1}dr=\frac{(m/2-1)^2}{\varepsilon}\|\chi\|_2^2,\quad \int_0^\infty |v_2|^2 r^{m-1}dr=\varepsilon\|\chi'\|_2^2. \tag{5.14}$$

従って、Minkowski より $|\|u_r\|_2-\|v_1\|_2|\le\|v_2\|_2$ に注意すると、

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\|u/r\|_2/\|u_r\|_2=\lim_{\varepsilon\to+0}\|u/r\|_2/\|v_1\|_2=\frac{2}{m-2}, \tag{5.15}$$

だからこれが Hardy の不等式 (4.23) の最良定数である。

さて、$p=2^*$ の Sobolev 不等式 (4.8) には最大化元が無かったが、証明から分かるように $p=2^*$ の場合は右辺に $\|u\|_2$ が無くとも不等式は成り立つ：

$$\|u\|_{2^*}\le C_{2^*}\|\nabla u\|_2. \tag{5.16}$$

この不等式に対しては最大化元が存在する（ただし $d=3,4$ では $L^2(\mathbb{R}^m)$ に属さない）。ここでは最大化元の存在は証明せずに、その具体形と最良定数を求めてみる。まず、最大化元があれば最良定数は

$$C_{2^*}^{2^*}=\max_{\|\nabla u\|_2=1}\|u\|_{2^*}^{2^*} \tag{5.17}$$

で与えられる。u を球対称な最大元として、その周りで関数を動かしたときの微分を調べる。φ を $\mathbb{R}^m$ 上の 2 回微分可能な球対称関数で r が十分大きくなると 0 になる任意の関数として、$\varepsilon\in\mathbb{R}$ に対して u から少しずらした関数 $u_\varepsilon=u+\varepsilon\varphi$ を考えると、

$$\begin{aligned}\partial_\varepsilon\|u_\varepsilon\|_{2^*}^{2^*}&=\int\partial_\varepsilon|u_\varepsilon(x)|^{2^*}dx=2^*\langle[u_\varepsilon]^{2^*-1}|\varphi\rangle,\\ \partial_\varepsilon\|\nabla u_\varepsilon\|_2^2&=\int\partial_\varepsilon|\nabla u_\varepsilon(x)|^2dx=2\langle\nabla u_\varepsilon|\nabla\varphi\rangle=2\langle-\Delta u_\varepsilon|\varphi\rangle,\end{aligned} \tag{5.18}$$

但し最後は部分積分した。$\varepsilon\to 0$ とすると $u_\varepsilon\to u$ となり、u を φ 方向に動かしたときの微分が得られる。このとき、u が (5.17) のように条件付きの最大値問題の解であ

ることから、φ に依らない定数 $c \geq 0$ (Lagrange 乗数) が存在して、2 つの微分は比例関係になる。つまり

$$2\langle -\Delta u|\varphi\rangle = c\langle 2^*[u]^{2^*-1}|\varphi\rangle. \tag{5.19}$$

なぜ $c \geq 0$ かと言えば、もし $c < 0$ だとすると $\varepsilon > 0$ または $\varepsilon < 0$ に動かしたときに $\|u_\varepsilon\|_{2^*}$ は増加するが $\|\nabla u_\varepsilon\|_2$ は減少して、u が最大化元であることに反する。また c が φ に依らないのは、もし異なる φ_1, φ_2 に対して異なる値を取ったとすれば、その線形結合 $\varphi = a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2$ を考えると、適当な $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ で $c < 0$ となってしまう。

全ての φ で (5.19) が成り立つには、$c' = 2^*c/2$ とおくとき

$$-\Delta u = c'[u]^{2^*-1} \tag{5.20}$$

でなければならない。更に $W = (c')^{(m-2)/4}u$ とおくと、W も (5.16) の最大化元で、

$$-\Delta W = [W]^{2^*-1}. \tag{5.21}$$

W が球対称なので、合成関数の微分を繰り返すと変数 $r = |x|$ の微分方程式を得る：

$$-\partial_r^2 W - \frac{m-1}{r}\partial_r W = [W]^{2^*-1}. \tag{5.22}$$

この常微分方程式を解こう。まず $\alpha = m/2 - 1$ とおいて $t = \log r$, $v = r^\alpha W$ と変数変換すると、それに応じて方程式は次のように変換される：

$$-\partial_t^2 W - 2\alpha\partial_t W = r^2[W]^{2^*-1}, \quad \partial_t^2 v - \alpha^2 v + [v]^{2^*-1} = 0. \tag{5.23}$$

ちなみに同様の変換は他の冪でも可能だが、右の式に $\partial_t v$ が出ないのは $2^* - 1$ の場合に限る。右の式に $\partial_t v$ を掛ければ

$$\partial_t[|v_t|^2/2 - \alpha^2|v|^2/2 + |v|^{2^*}/2^*] = 0. \tag{5.24}$$

つまりカッコの中身は t に依らないが、$\|W\|_{2^*} < \infty$, $\|W_r\|_2 < \infty$ となるにはその定数は 0 である必要がある。それを平方根で解けば

$$\partial_t v = \pm\alpha v\sqrt{1 - \beta|v|^{2^*-2}}, \tag{5.25}$$

ただし $\beta = \frac{2}{2^*\alpha^2} = \frac{4}{m(m-2)}$ とおいた。$r \to \infty$ すなわち $t \to \infty$ で $W \to 0$ となるには符合は $-$ でなければならない。ここで $s = \sqrt{\beta|v|^{2^*-2}}$ とおくと、

$$s_t = (2^*/2 - 1)sv_t/v = -s\sqrt{1 - s^2}, \tag{5.26}$$

ただし $2^*/2 - 1 = 1/\alpha$ を使った。これは $0 < s < 1$ の範囲で変数分離法により具体的に解けて、ある定数 $t_0 \in \mathbb{R}$ に対して

$$s = \operatorname{sech}(t - t_0) = \frac{2}{e^{t-t_0} + e^{t_0-t}}. \tag{5.27}$$

なお $t < t_0$ で (5.25) の符号は反転する。元の変数へ戻すと、$r_0 = e^{t_0}$ とおいて

$$W = r^{-\alpha}(s^2/\beta)^{(m-2)/4} = [m(m-2)]^{\alpha/2}(r^2/r_0 + r_0)^{-\alpha}. \tag{5.28}$$

$r_0 = 1$ の場合を W とすれば、他の $r_0 > 0$ での解は $W_{1/r_0}(x) = r_0^{1-m/2}W(x/r_0)$ で与えられ、特に $\|W_{1/r_0}\|_{2^*}$ と $\|\nabla W_{1/r_0}\|_2$ は r_0 に依らない定数。また方程式 (5.21) に W を掛けて積分すれば、部分積分より

$$\|\nabla W\|_2^2 = \|W\|_{2^*}^{2^*} \tag{5.29}$$

だから、最良定数は

$$C_{2^*} = \|W\|_{2^*}/\|\nabla W\|_2 = \|W\|_{2^*}^{1-2^*/2} = \|W\|_{2^*}^{-2^*/m} \tag{5.30}$$

から求まるので、$\|W\|_{2^*}^{2^*}$ を計算すれば良い。上で求めた具体形より

$$\|W\|_{2^*}^{2^*}/S_m = [m(m-2)/4]^{m/2} \int_0^\infty [2/(r^2+1)]^m r^{m-1} dr. \tag{5.31}$$

最後の積分を I_m と置くと、$r = \tan(\theta/2)$ の変数変換より

$$I_m = \int_0^\pi \sin^{m-1}\theta d\theta. \tag{5.32}$$

これは $I_1 = \pi$, $I_2 = 2$ と部分積分による漸化式

$$I_{m+2} = [-\sin^m\theta\cos\theta]_0^\pi + \int_0^\pi m\sin^{m-1}\theta\cos^2\theta d\theta = m(I_m - I_{m+2}) \tag{5.33}$$

から計算できて、$I_m = 2^{m-1}\Gamma(m/2)^2/\Gamma(m)$. ゆえに (4.21) と共に上に代入すると

$$\begin{aligned} &\|W\|_{2^*}^{2^*} = [m(m-2)/4]^{m/2} S_m I_m = [\pi m(m-2)]^{m/2}\Gamma(m/2)/\Gamma(m), \\ &C_{2^*} = [\pi m(m-2)]^{-1/2}[\Gamma(m)/\Gamma(m/2)]^{1/m}. \end{aligned} \tag{5.34}$$

5.1. **方程式の可解性閾値.** 最大化元 W を使うと、定常 Schrödinger 方程式 (4.29) を解くためにポテンシャルに課した上限 $\|V\|_{m/2} < C_{2^*}^{-2}$ が実際に限界であることが示せる。W の方程式 (5.21) は $V_1 = -W^{4/(m-2)}$ とおけば $-\Delta W + V_1 W = 0$ と書けて、しかも

$$\|V_1\|_{m/2} = \|W\|_{2^*}^{4/(m-2)} = C_{2^*}^{-2}. \tag{5.35}$$

パラメータ $a > 1$, $\lambda > 0$ に対して $V_\lambda = \lambda^2 V_1(\lambda x)$, $V = aV_\lambda$ とおくと、$\|V\|_{m/2} = a\|V_1\|_{m/2} = aC_{2^*}^{-2}$. Schrödinger 方程式の最小エネルギーレベル

$$S = \min_{u\in H^1,\ \|u\|_2=1} \|\nabla u\|_2^2 + \langle Vu|u\rangle \tag{5.36}$$

を考えると、まず

$$\langle Vu|u\rangle \geq -\max|V|\|u\|_2^2 = -aW(0)^{4/(m-2)} > -\infty \tag{5.37}$$

より有限値 $S \in \mathbb{R}$ であり、$W_\lambda = \lambda^{m/2-1}W(\lambda x)$ とおくと

$$-\Delta W_\lambda + VW_\lambda = -\Delta W_\lambda - aW_\lambda^{2^*-1} = -(a-1)W_\lambda^{2^*-1} < 0 \tag{5.38}$$

より $W \in H^1(\mathbb{R}^m)$ なら $u = W_\lambda$ とすることで $S < 0$ が分かる。$m = 3, 4$ では $W_\lambda \notin L^2$ だが、十分大きな $|x|$ で値を切り落とした関数を考えれば良い。

最小値 S を取る u （最小化元）が存在することは、$2 < p < 2^*$ の Sobolev 不等式と同様のコンパクト性の議論による。この場合、$\langle Vu_{n_k}|u_{n_k}\rangle$ が極限で収束し、$\|u_{n_k}\|_2$ と $\|\nabla u_{n_k}\|_2$ は極限で増加しないが、もしどちらかが減少すると $S < 0$ より S の最大性に反するため、これらの L^2 ノルムも収束することが分かる。

$\varphi \in H^1$ が S の最小化元とすると、W の場合 (5.20) と同様にして Lagrange 乗数 $c \in \mathbb{R}$ を含む方程式が得られる：

$$-\Delta\varphi + V\varphi = c\varphi. \tag{5.39}$$

この両辺に φ を掛けて積分すると、部分積分により

$$S = \|\nabla\varphi\|_2^2 + \langle V\varphi|\varphi\rangle = c\|\varphi\|_2^2 = c. \tag{5.40}$$

他方、S の λ 依存は、$u_\lambda = \lambda^{d/2}u(\lambda x)$ とおくと

$$\|\nabla u_\lambda\|_2^2 + \langle aV_\lambda u_\lambda | u_\lambda\rangle = \lambda^2[\|\nabla u\|_2^2 + \langle aV_1 u|u\rangle], \quad \|u_\lambda\|_2 = \|u\|_2 \tag{5.41}$$

より、$S(\lambda) = \lambda^2 S(1)$. 従って、どの $a > 1$ に対してもある $\lambda > 0$ において $S(\lambda) = -1$ となる。このとき

$$-\Delta\varphi + V\varphi = -\varphi. \tag{5.42}$$

もし $u \in H^1$ が (4.29) の $f = \varphi$ に対する解だとすると、φ を掛けて積分すれば

$$0 < \|\varphi\|_2^2 = \langle\varphi| - \Delta u + u + Vu\rangle = \langle -\Delta\varphi + \varphi + V\varphi|u\rangle = 0 \tag{5.43}$$

となり矛盾。つまり (4.29) はこの V, φ に対して解を持たない。$a > 1$ は任意だから、一般に $\|V\|_{m/2} > C_{2^*}^{-2}$ では解があるとは限らないことが分かった。

6. Trudinger-Moser の不等式

ここまで除外していた２次元空間 $m = 2$ の場合、Hardy (4.23) も球対称 Sobolev (4.24) も丁度破綻するが、全ての $2 \le p < \infty$ に対して Sobolev の不等式

$$\|u\|_p \le C_p\|u\|_{H^1} \tag{6.1}$$

が成り立つ。他方、１次元 (4.7) のように $\max|u|$ を抑えることはできない。連続関数 u が L^1 に属してかつ $\max|u| = M < \infty$ の場合、$p \to \infty$ で $\|u\|_p \to M$ となるので、２次元の Sobolev 不等式は $p \to \infty$ で破綻すると言える。これを精密化して、指数関数の積分で表したものが Trudinger-Moser の不等式である。２次元の有界領域、例えば単位円盤上の場合、$u \in H^1$ かつ $|x| \ge 1$ で $u(x) = 0$ とすると、

$$\int_{|x|<1} |\nabla u|^2 dx \le 4\pi \implies \int_{|x|<1} e^{u^2} dx \le C_M. \tag{6.2}$$

ただし $C_M > 0$ は u に依らない絶対定数である。この指数関数 e^{u^2} は $|u| \to \infty$ で最速の増大度で、これよりも速い関数 $f(u)$ に置き換えると（つまり $\lim_{|u|\to\infty} f(u)e^{-u^2} = \infty$）、

$$\int_{|x|<1} f(u)dx \le C \tag{6.3}$$

となるような定数 C は存在しないことも分かっている。なお、条件の 4π を別の数 $\alpha > 0$ に替えた場合は、e^{u^2} を $e^{(4\pi/\alpha)^2 u^2}$ に置き換えれば良い。

全平面 $\mathbb{R}^2$ の場合、$e^{u^2} \ge 1$ では積分が必ず発散してしまうので、発散部分を抜き取って $e^{u^2} - 1$ に置き換え、更に $u \to 0$ で $e^{u^2} - 1 \sim u^2$ であることから

$$\int_{\mathbb{R}^2} [e^{u^2} - 1]dx \le C \int_{\mathbb{R}^2} |u|^2 dx \tag{6.4}$$

とするのが自然である。実はこれでも成り立たないが、$\alpha < 1$ に対して左辺を $e^{\alpha u^2} - 1$ に置き換えれば（α に依存して）定数が存在する。しかし、丁度ぎりぎりの増大度で不等式が得られたのは比較的最近である。具体的には

Theorem 6.1 ([1]). $f(u) = \frac{e^{u^2}}{u^2 + u^{-2}}$ とおけば正定数 $C_\star$ があって、$u \in H^1(\mathbb{R}^2)$ に対し

$$\|\nabla u\|_2^2 \le 4\pi \implies \int_{\mathbb{R}^2} f(u)dx \le C_\star\|u\|_2^2. \tag{6.5}$$

また f はこれが成り立つための最速の増大度を持つ。

以下、(6.5) を球対称かつ $u \geq 0 \geq u_r$ の場合に示す。実際、球対称再配分によりその場合に示せば十分である。まず、(6.5) を r の積分に書き直せば、$S_2 = 2\pi$ より

$$\int_0^\infty |u_r|^2 rdr \leq 2 \implies \int_0^\infty f(u)rdr \leq C_\star \int_0^\infty u^2 rdr. \tag{6.6}$$

$u \mapsto u(\lambda x)$ $(\lambda > 0)$ の変換で最後の積分を 1 にできる。ここで記号を導入する：

$$K_{>R}(u) = \int_R^\infty |u_r|^2 rdr, \quad M_{<R}(u) = \int_0^R |u|^2 rdr, \tag{6.7}$$

また同様にして $K_{<R}(u)$, $M_{>R}(u)$ も定める。

次に、$R, S > 0$ を次が成り立つ最小の値とする：

$$K_{>R}(u) = 1, \quad u(S) = 1. \tag{6.8}$$

もしこのような $S > 0$ が無ければ常に $u(r) < 1$ なので $f(u)$ は u^2 に抑えられて望みの不等式が得られる。ゆえに $S > 0$ が存在すると仮定して良い。その場合も $\int_S^\infty f(u)rdr$ は自明に L^2 ノルムで抑えられるから、$0 < r < S$ だけ考えれば良い。また

$$1 = u(S)^2 = \int_\infty^S 2u(t)u_r(t)dt \leq 2S^{-1}\sqrt{M_{>S}(u)K_{>S}(u)} \leq 2\sqrt{2}/S \tag{6.9}$$

より $S \leq 2\sqrt{2}$. もし (6.8) のような $R > 0$ が無ければ $K_{>0}(u) \leq 1$ となり、$0 < r < S$ で $t = \log(S/r)$ と置けば

$$u(r) - 1 = \int_r^S u_r(s)ds \leq \sqrt{K_{<S}(u)\int_r^S s^{-1}ds} \leq \sqrt{t}. \tag{6.10}$$

だから次のように望みより強い評価が得られる：

$$\begin{gathered} u(r)^2 \leq (1+\sqrt{t})^2 = 1 + 2\sqrt{2}\sqrt{t/2} + t \leq 3 + \frac{3}{2}t, \\ \int_0^S e^{u^2} rdr \leq \int_0^S e^3 (S/r)^{3/2} rdr = [2e^3 S^{3/2} r^{1/2}]_0^S = 2e^3 S^2 \leq 16e^3. \end{gathered} \tag{6.11}$$

ゆえに $R > 0$ が存在すると仮定して良い。このとき、$K_{>0}(u) \leq 2$ より $K_{<R}(u) \leq 1 = K_{>R}(u)$. また、$H = u(R)$ とおくと、R の取り方から次が成り立つ：

$$H \leq \max\{u(R); K_{>R}(u) \leq 1,\ M_{>R}(u) \leq 1\}. \tag{6.12}$$

但し右辺は条件を満たすような u を全て考えた最大値。右辺を $h(R)$ とおけば、次の形の球対称 Sobolev 不等式が成り立つ：ある正定数 C_* があって

$$h(R) \leq 1 \ \text{ or } \ e^{2h^2(R)} R^2/h(R)^2 \leq C_*. \tag{6.13}$$

この証明は後に回して先に進む。まず、$H \leq 1$ とすると $R \geq S$ なので $K_{<S}(u) \leq K_{<R}(u) \leq 1$ となり、(6.11) が成り立つ。ゆえに $H > 1$ と仮定して良い。すると $R < S$ であり、$K_{>R}(u) = 1$ より $\int_R^S e^{u^2} rdr$ は (6.11) と同じ議論で抑えられる。ゆえに $0 < r < R$ だけ考えれば良い。また (6.13) より $e^{2H^2}R^2/H^2 \leq C_*$. $t = \log(R/r)$ と変数変換すれば

$$\int_0^R \frac{e^{u^2}}{u^2} rdr \leq \int_0^\infty \frac{e^{u^2-2t}}{u^2} R^2 dt \leq C_* \int_0^\infty e^{u^2-2H^2-2t} dt. \tag{6.14}$$

更に $u(r)=v(t)+H$ とおくと, $t>0$ で $v(t)\ge v(0)=0$, $v'(t)=-ru_r(r)\ge 0$,

$$\int_0^\infty e^{u^2-2H^2-2t}dt=\int_0^\infty e^{v^2+2vH-H^2-2t}dt,\quad K_{<R}(u)=\int_0^\infty |v'(t)|^2dt\le 1. \tag{6.15}$$

また、(6.10) と同様にして $v\le\sqrt{t}$ なので指数部分は更に

$$v^2+2vH-H^2-2t\le 2vH-H^2-t \tag{6.16}$$

と抑えられる。この1次指数関数に対して、$H>1$ をパラメータとして具体的に最大値

$$S(H)=\max\left\{\int_0^\infty e^{2vH-H^2-t}dt;\int_0^\infty |v'(t)|^2dt\le 1,\ v(0)=0\right\} \tag{6.17}$$

を求めることができる。まず最大値があることは、(6.11) と類似の評価で

$$2vH-H^2-t\le 2\sqrt{t}H-H^2-t\le 2H^2+t/2-H^2-t=H^2-t/2 \tag{6.18}$$

から、t が大きい所で積分は一様に小さく、t が有限区間では Ascoli-Arzela の定理より、コンパクト性から従う。以下、v が $S(H)$ の最大化元とすると、(5.20) と同様の議論で、Lagrange 乗数 $c\ge 0$ を含む方程式が得られる：

$$2He^{2vH-H^2-t}=-2cv''. \tag{6.19}$$

指数の一部を $\theta=2vH-t$ とおけば、その方程式は

$$\theta'=2Hv'-1,\quad \theta''=2Hv''=-2H^2e^{\theta-H^2}/c,\quad \theta'''=\theta''\theta'. \tag{6.20}$$

なお最後の式は2番目の両辺を微分してから右辺に元の式を代入して得られる。それより、$w=\theta'$ とおけば $\partial_t(w'-w^2/2)=w''-w'w=0$, また v の方程式と $u\in H^1$ より

$$\lim_{t\to\infty}w(t)=-1,\quad \lim_{t\to\infty}w'(t)=0 \tag{6.21}$$

だから w の方程式は

$$w'-w^2/2=-1/2,\quad \lim_{t\to\infty}w(t)=-1,\quad \lim_{t\to\infty}w'(t)=0. \tag{6.22}$$

これは変数分離法で解けて、ある定数 $t_0\in\mathbb{R}$ に対して $s=(t-t_0)/2$ とおくとき

$$w(t)=-\tanh s=\frac{e^{-s}-e^s}{e^s+e^{-s}}. \tag{6.23}$$

$\theta'=w$ より積分（微積分学の基本定理）すると、

$$\theta(t)=2\log(\operatorname{sech}s)+A,\quad \therefore e^{\theta(t)}=e^A\operatorname{sech}^2 s, \tag{6.24}$$

但し積分定数 $A\in\mathbb{R}$ は $\theta(0)=0$ から $e^{-A}=\operatorname{sech}^2(t_0/2)$ で定められる。これより

$$\begin{aligned}S(H)&=\int_0^\infty e^{\theta-H^2}dt=e^{A-H^2}\int_0^\infty \operatorname{sech}^2 s dt\\&=e^{A-H^2}[2\tanh s]_0^\infty=2e^{A-H^2}[1+\tanh(t_0/2)]=e^{-H^2}(1+e^{t_0}).\end{aligned} \tag{6.25}$$

他方、v' の L^2 ノルムの条件は最大化元である事より

$$\begin{aligned}H^2&=\int_0^\infty [Hv'(t)]^2dt=\int_0^\infty \frac{1}{4}(1-\tanh s)^2dt=\frac{1}{2}\int_{-t_0/2}^\infty (1-\tanh t)^2dt\\&=[-\log(1+e^{-2t})+(1+e^{2t})^{-1}]_{-t_0/2}^\infty=\log(1+e^{t_0})-(1+e^{-t_0})^{-1}.\end{aligned} \tag{6.26}$$

上の式に代入すると

$$S(H) = e^{(1+e^{-t_0})^{-1}} \le e. \tag{6.27}$$

以上で $\int_0^\infty f(u)rdr$ が全ての区間で抑えられたので (6.5) を得る。

7. 指数型球対称 Sobolev 不等式

最後に (6.13) の証明が残っている。まず $u(r) = w(r/R)$ と変数変換すれば、

$$h(R) = \max\left\{w(1); \int_1^\infty w(r)^2 rdr \le \mu,\ \int_1^\infty w_r(r)^2 rdr \le 1\right\}, \tag{7.1}$$

ただし $\mu = R^{-2}$ とおいた。$w(1)$ は (6.9) と同様にして w, w_r の L^2 ノルムで制御されるのでコンパクト性は容易で、最大値 $h(R)$ は存在する。また (5.19) と同様に、$\varphi(r)$ を 2 階微分可能で r が大きいと 0 になる任意の関数として w から φ の方向へ微分を考えると、Lagrange 乗数 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ が存在して

$$\begin{aligned}\varphi(1) &= \int_1^\infty [\alpha w(r)\varphi(r) + \beta w_r(r)\varphi_r(r)]rdr \\ &= \int_1^\infty [\alpha w(r) - \beta\Delta w(r)]\varphi(r)rdr - \beta w_r(1)\varphi(1),\end{aligned} \tag{7.2}$$

但し最後の項は部分積分した。特に $\varphi(1) = 0$ の場合は

$$0 = \int_1^\infty [\alpha w(r) - \beta\Delta w(r)]\varphi(r)dr \tag{7.3}$$

となり、これが全ての φ で成り立つためには

$$1 < r < \infty \implies \alpha w(r) = \beta\Delta w(r). \tag{7.4}$$

もし $\beta = 0$ だと $w = 0$ となってしまうから $\beta \ne 0$. ゆえに $c = \alpha/\beta$ とおけば $\Delta w = cw$. もし $c \le 0$ だとすると、

$$\partial_r[(rw_r)^2 - c(rw)^2]/2 = (r^2\Delta w - cr^2 w)w_r - crw^2 = -crw^2 \ge 0, \tag{7.5}$$

かつ $\int_1^\infty rw^2 dr \le 1$ だから、$r \to \infty$ のとき $(rw_r)^2 - c(rw)^2$ は正かつ単調増加で有限値に収束する。その極限を $a > 0$ とおけば r が十分大きいとき $(rw_r)^2 - c(rw)^2 > a/2$. すると $R > 1$ 十分大で

$$1 - c \ge \int_R^\infty (rw_r^2 - crw^2)dr > \int_R^\infty \frac{a}{2r}dr = \infty \tag{7.6}$$

となり矛盾。従って $c > 0$. 更に $\varepsilon = \sqrt{c} > 0$, $w(x) = \varphi(\varepsilon x)$ と変数変換すれば

$$|x| > \varepsilon \implies \Delta\varphi(x) = \varphi(x). \tag{7.7}$$

この方程式の解の一つは Fourier 変換を用いて次で与えられる：

$$G = \mathcal{F}^{-1}\langle\xi\rangle^{-2} \implies \Delta G(x) = G(x) \quad (|x| > 0). \tag{7.8}$$

この G は Dirac の δ 関数を使うと $G = (-\Delta + 1)^{-1}\delta$ と表せるが、方程式を満たすことは以下のように確かめられる。まず 2 次元球対称関数 $f(x)$ に対しては

$$(x \cdot \nabla)^2 f = (r\partial_r)^2 f = r^2\partial_r^2 f + r\partial_r f = r^2\Delta f \tag{7.9}$$

が成り立ち、また球対称でなくても部分積分により

$$x_k\mathcal{F}^{-1}f = (2\pi)^{-m}\int f(\xi)x_k e^{ix\cdot\xi}d\xi = (2\pi)^{-m}\int i\partial_{\xi_k}f(\xi)e^{ix\cdot\xi}d\xi, \tag{7.10}$$

これと (4.32) を用いると、G の定義より

$$\begin{aligned} &x\cdot\nabla G = \mathcal{F}^{-1}(-\nabla\cdot\xi\langle\xi\rangle^{-2}), \quad \nabla\cdot\xi\langle\xi\rangle^{-2} = 2\langle\xi\rangle^{-4}, \\ &(\nabla\cdot\xi)^2\langle\xi\rangle^{-2} = 4(1-|\xi|^2)\langle\xi\rangle^{-6} = -\Delta\langle\xi\rangle^{-2}, \end{aligned} \tag{7.11}$$

従って、(7.10) の逆向きも使うと

$$r^2\Delta G = \mathcal{F}^{-1}(\nabla\cdot\xi)^2\langle\xi\rangle^{-2} = \mathcal{F}^{-1}(-\Delta\langle\xi\rangle^{-2}) = |x|^2\mathcal{F}^{-1}\langle\xi\rangle^{-2} = r^2G. \tag{7.12}$$

φ は $|x|>\varepsilon$ で同じ方程式 (7.7) を満たし、かつ φ,φ_r が L^2 であることから、G の定数倍であると言える。それを見るために、まず $r>R$ での常微分方程式 $v_{rr}-v=f$ の解は §2.1 で見た通り一意だが、次の公式で与えられる：

$$v = \cosh(r-R)v(R) + \sinh(r-R)v_r(R) + \int_R^r \sinh(r-s)f(s)ds, \tag{7.13}$$

なお $\cosh x = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$, $\sinh x = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$. φ の方程式 $\varphi_{rr}-\varphi = -\varphi_r/r$ に適用すると

$$\begin{aligned} \varphi - \cosh(r-R)\varphi(R) - \sinh(r-R)\varphi_r(R) &= -\int_R^r \sinh(r-s)s^{-1}\varphi_r(s)ds \\ &= [-\sinh(r-s)s^{-1}\varphi(s)]_{s=R}^{s=r} - \int_R^r [\cosh(r-s)s^{-1} + \sinh(r-s)s^{-2}]\varphi(s)ds. \end{aligned} \tag{7.14}$$

cosh, sinh を指数関数に展開すれば、適当な 2 つの実数 $a_\pm$ に対して

$$\varphi = \sum_\pm \left[e^{\pm r}a_\pm - \frac{1}{2}\int_R^r e^{\pm(r-s)}[s^{-1}\pm s^{-2}]\varphi(s)ds\right]. \tag{7.15}$$

この内、+ 符合の方は e^r でまとめると

$$e^r\left[a_+ - \frac{1}{2}\int_R^r e^{-s}[s^{-1}+s^{-2}]\varphi(s)ds\right], \tag{7.16}$$

この積分は $\varphi\in L^2$ より $r\to\infty$ で収束するから、e^r を掛けたものが発散しないために

$$a_+ = \frac{1}{2}\int_R^\infty e^{-s}[s^{-1}+s^{-2}]\varphi(s)ds \tag{7.17}$$

が必要で、すると (7.15) は次のように書き換えられる：

$$\varphi = \frac{1}{2}\int_r^\infty e^{r-s}[s^{-1}+s^{-2}]\varphi(s)ds + e^{-r}a_- - \frac{1}{2}\int_R^r e^{s-r}[s^{-1}-s^{-2}]\varphi(s)ds \tag{7.18}$$

この方程式には $a_-\in\mathbb{R}$ しかパラメータが無く、また φ に掛かる関数が $R\to\infty$ で一様に減衰することに注意すれば、R が十分大きいとき $\max_{r\ge R}|\varphi(r)|$ をノルムとして逐次近似法で解ける。その解は方程式の形より a_- について線形、つまり、ある関数に a_- を掛けたものになる。G,φ 共に、適当な a_- に対する解であることから、互いの定数倍であることが従う。なお、十分大きな r で定数倍になっていれば、§2.1 で見た通り $r\ge\varepsilon$ にも一意的に延長されるので $r\ge\varepsilon$ 全体で定数倍になる。

以上より、ある定数 $b \in \mathbb{R}$ が存在して $w(x) = bG(\varepsilon x)$ $(|x| \geq 1)$ となる。このとき、$h = h(R)$, $M = M_{>\varepsilon}(G)$, $K = K_{>\varepsilon}(G)$ と略すと、w の高さと L^2 ノルムから

$$h = bG(\varepsilon), \quad \mu = b^2\varepsilon^{-2}M, \quad 1 = b^2K. \tag{7.19}$$

また、G の方程式 $\partial_r(rG_r) = rG$ に G や $2rG_r$ を掛けて部分積分すれば

$$-\varepsilon G_r(\varepsilon)G(\varepsilon) - K = M, \quad -\varepsilon^2 G_r(\varepsilon)^2 = -\varepsilon^2 G(\varepsilon)^2 - 2M. \tag{7.20}$$

これらを合わせれば、$G_0 = G(\varepsilon)$, $G_1 = G_r(\varepsilon)$ と略して

$$\begin{aligned} &\mu = \frac{1}{2K}(G_1^2 - G_0^2), \quad K = -\varepsilon G_1 G_0 - \frac{\varepsilon^2}{2}(G_1^2 - G_0^2), \\ &h^{-2} = \frac{K}{G_0^2} = -\frac{\varepsilon G_1}{G_0} - \frac{\varepsilon^2 G_1^2}{2G_0^2} + \frac{\varepsilon^2}{2}, \quad h^2\mu = \frac{G_1^2 G_0^2 - G_0^4}{2K^2}. \end{aligned} \tag{7.21}$$

(7.20) の第 2 式は $r > \varepsilon$ 以外でも成り立つから $|G_r(r)| \geq |G(r)|$. ゆえに $K \geq M$ で、これを (7.21) 第 1 式に代入すると $\mu \leq \varepsilon^{-2}$. 従って $\mu = R^{-2} \to \infty$ の極限で $\varepsilon \to +0$.

そこで $G(x)$ の原点付近の漸近挙動が必要だが、(7.11) の第 1 ・ 2 式より

$$rG_r = x \cdot \nabla G = -(2\pi)^{-m} \int 2\langle\xi\rangle^{-4} e^{ix\cdot\xi} d\xi \tag{7.22}$$

だから $c_1 = (2\pi)^{-2}2\|\langle\xi\rangle^{-4}\|_1$, $c_2 = (2\pi)^{-2}2\||\xi|\langle\xi\rangle^{-4}\|_1$ とおくと、どちらも正定数で、$|e^{ix\cdot\xi} - 1| \leq |x \cdot \xi| \leq |x||\xi|$ より、

$$|rG_r(r) + c_1| \leq (2\pi)^{-2}2 \int \langle\xi\rangle^{-4}|e^{ix\cdot\xi} - 1|d\xi \leq |x|c_2. \tag{7.23}$$

つまり $|G_r(r) + c_1/r| \leq c_2$. これを $r = 1$ から積分すると、

$$0 < r < 1 \implies |G(r) - G(1) - c_1 \log(1/r)| \leq c_2. \tag{7.24}$$

以下、$\varepsilon \to +0$ の極限で、ε に依らない正の実数 C があって $|f_1| \leq C|f_2|$ となるとき、そのような任意の f_1 を $O(f_2)$ で表す。(7.23)–(7.24) より, $\ell = \log(1/\varepsilon)$ とおくと

$$G_1 = -c_1/\varepsilon + O(1), \quad G_0 = c_1\ell + O(1). \tag{7.25}$$

(7.21) に代入して

$$\begin{aligned} &K = c_1^2\ell + O(1), \quad h^2\mu = \frac{c_1^4\ell^2/\varepsilon^2[1 + O(1/\ell)]}{[c_1^2\ell + O(1)]^2} = \varepsilon^{-2}[1 + O(1/\ell)], \\ &h^{-2} = \ell^{-1} + O(\ell^{-2}), \quad h^2 = \ell + O(1). \end{aligned} \tag{7.26}$$

ゆえに, $\mu = R^{-2}$, $e^\ell = 1/\varepsilon$ より、望みの不等式 (6.13) を得る：

$$h^2R^{-2}e^{-2h^2} = \varepsilon^{-2}[1 + O(1/\ell)]e^{-2\ell + O(1)} = O(1). \tag{7.27}$$

なお (6.5) に対する最大化元の存在については、$f(u)$ と $u \to \infty$ で同じ増大度の非線形項でも、その漸近挙動によって存在・非存在が変わり、その境目となる漸近挙動がさらに最近の研究によって導出された。時間に余裕があればその話題も紹介したい。

References

[1] S. Ibrahim, N. Masmoudi and K. Nakanishi, *Trudinger-Moser inequality on the whole plane with the exact growth condition.* J. Eur. Math. Soc., **17** (2015), no. 4, 819–835.