流体力学 —まだこんなことが分からない

山田　道夫

1　はじめに—流体力学という枠組みについて

重力が弱い環境で光速に比べて遅い速度で動く有限個の質点の運動を考えよう．古典物理学によればこのような質点の運動は Newton の運動法則によって記述される．物体は原子，分子，イオンなどから構成されており，これらの粒子は質点として扱うことができるので，物体の運動は Newton の運動方程式によって記述される．我々の周囲にある空気や水の運動は，Avogadro（アボガドロ）数（6.02×10^{23}）程度の膨大な個数の質点の運動から成っている．従って流体の運動は，原理的には，これらの質点の運動として記述できるはずである．しかしこれは全く現実的でない．古典力学では一個の質点の運動状態を決めるのに，6 個の変数（位置 x, y, z および運動量 p_x, p_y, p_z）を使うため，全体として Avogadro 数の 6 倍程度の個数の変数が必要となる[1]．計算機で言えばおよそ 10^{13} TB であり[2]，それに必要なメモリの大きさは $1\mathrm{cm}^3/\mathrm{TB}$ としても $(100\mathrm{m})^3$ を超えることになる．もちろん人間が紙の上で扱える量ではない．

しかもこれはかなり夢想的な話である．巨大メモリをもつ巨大計算機を作ったとしても，水や空気の運動を忠実に再現しようとすれば，初期条件としてすべての質点の位置と運動量の値が必要である．しかし実際にそんな値が分かるとは信じ難い．結局，Newton の運動方程式は少なくともそのままでは役に立たない．

一方，例えば空気や水の速度と我々がよぶ量は，時間的にも空間的にもある程度の大きさの範囲で平均化された速度，つまりマクロな意味での速度であり，実際に我々がやりたいことは，これらのマクロな量を記述し理解することである．すなわち（速度や圧力など）流体のマクロ変数の観測値をもとにして，それらマクロ変数の時間発展を記述することが求められている．このとき役に立つ方程式は，個々の質点を扱う Newton の運動方程式そのものではなく，それをある程度平均化した方程式になるだろう．流体力学の役目はこの平均化した方程式によって流体のマクロな運動を記述することである．

ミクロのことを完全に知っていればマクロのことは分かる，というのは，現実には難しいにしても原理的には正しいはずである．つまり例えば，個々の分子の位置と運動量のデータを知っていれば，それらを適切に平均して空気や水の（マクロな）密度や運動量を知ることができるしそれらの時間発展を計算することも原

[1] 分子の内部自由度があれば自由度はさらに増える．

[2] 一個の実数を 4 bytes とした．

理的にはできるはずである．しかしマクロのデータしか持っていないとき，それだけでマクロな運動の時間発展が分かるかどうかは自明でも単純でもない．このような観点から見るとき，流体力学の最も根本的な問題は，そのような平均化した方程式，つまり流体力学という枠組みは存在するのかということ，言い換えれば，マクロ変数の時間変化はマクロ変数だけで決まるのか，ということである[3]．

2　方程式の階層

2.1　Newton 方程式（Hamilton 方程式）

分子の運動方程式から出発する[4]．各分子は自由に動き，分子同士の衝突の時だけ相互作用をするような N 分子からなる気体を考える．その状態は分子の位置と運動量からなる $6N$ 次元空間の一点として

$$\mathbf{x}^N = (\mathbf{q}_1, \mathbf{p}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{p}_2, \cdots, \mathbf{q}_N, \mathbf{p}_N) \tag{1}$$

と表わされる[5]．気体分子の方程式は系の Hamiltonian を H とする Hamilton 方程式

$$\frac{d\mathbf{q}_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}_i}, \quad \frac{d\mathbf{p}_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}_i}, \quad (i = 1, 2, \cdots N), \tag{2}$$

である．これが最も基本的な階層における閉じた方程式である．

2.2　Boltzmann 方程式

次に，この系の平均量の時間発展を記述する階層を考えよう．まず，同じ外的条件下にある気体のアンサンブルを想定し，$6N$ 次元空間における分布密度関数 $\rho^N(\mathbf{x}^N, t)$ を考える．この分布密度関数の時間発展方程式は Liouville 方程式

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho^N(\mathbf{x}^N, t) = -\nabla_{\mathbf{x}^N} \cdot (\rho^N \mathbf{V}^N) \tag{3}$$

である．ここで，$\nabla_{\mathbf{x}^N}$ と $\mathbf{V}^N$ は，$6N$ 次元空間における勾配微分作用素および速度である．この方程式は，アンサンブル平均量を扱っていても個々の分子の座標

[3]以下，この講義では現状の一側面を伝えることが目的なので，厳密な定義や問題設定などにはほとんど立ち入らない．興味のある方は参考文献に掲げた書籍やそこに引用されている原論文などを参照されたい．筆者にはカバーしきれないことも多いが，同時に，未解決問題の正しい定式化は解決された後に初めてわかることも多いということもある．また「分からない問題」は（少なくとも研究者の数を越える程度には）無数にあるが，ここで取り上げる問題はごく一部のみであり他にも面白く重要な問題があることは注意しておきたい．

[4]ここでは内部自由度を持たない粒子を「分子」とよぶことにする．現実の分子のように内部自由度を持つ場合は，それに応じた修正が施される．

[5]ここでは $\mathbf{x}$ は位置と運動量の組 $(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ を表す．また，右肩の N は $6N$ 次元空間の変数であることを表す．

や速度を含んでいるのでミクロの階層の方程式である．そこで観測可能な量を扱うために N 個よりもずっと少ない s 個の分子

$$\mathbf{x}^s = (\mathbf{q}_1, \mathbf{p}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{p}_2, \cdots, \mathbf{q}_s, \mathbf{p}_s) \tag{4}$$

の分布関数（s 体分布関数），

$$F^s(\mathbf{x}^s, t) = V^s \int d\mathbf{x}^{N-s} \rho^N(\mathbf{x}^N, t) \tag{5}$$

を考える．ここで V は気体の体積である．この s 体分布関数は，Liouville 方程式を $N-s$ 個の変数について積分して得られる次の方程式に従う．

$$\frac{\partial}{\partial t} F^s(\mathbf{x}^s, t) = L^s F^s(\mathbf{x}^s, t) + \int d\mathbf{q}'_{s+1} d\mathbf{p}'_{s+1} \theta(\mathbf{x}^s, \mathbf{q}'_{s+1}, \mathbf{p}'_{s+1}) F^{s+1}(\mathbf{x}^s, \mathbf{q}'_{s+1}, \mathbf{p}'_{s+1}, t) \tag{6}$$

ここで $\theta(\mathbf{x}^s, \mathbf{q}'_{s+1}, \mathbf{p}'_{s+1})$ は分子同士の相互作用の効果を表している．また $s = 1, 2, \cdots N$ であり $F^{N+1} = 0$ なので，この方程式は全部で N 個から成っている．右辺第一項の L^s は $\mathbf{x}^s$ のみに依存する演算子，第 2 項は s 個以外の $N-s$ 個の粒子との相互作用（衝突の効果）を表す．この方程式系は BBGKY（Bogolyubov-Born-Green-Kirkwood-Yvon）ヒエラルキー とよばれる．なお，粘性や熱伝導率など多くの力学量は F^1 によって計算されるため，$s = 1$ の場合の方程式

$$\frac{\partial}{\partial t} F^1(\mathbf{x}, t) = L^1 F^1(\mathbf{x}, t) + \int d\mathbf{x}'_2 d\mathbf{p}'_2 \theta(\mathbf{x}, \mathbf{q}'_2, \mathbf{p}'_2) F^2(\mathbf{x}, \mathbf{q}'_2, \mathbf{p}'_2, t) \tag{7}$$

は特に重要である．しかし方程式 (6) から分かるように，s 体分布関数の時間発展には $s+1$ 体の分布関数が関与する ため，F^1 を求めるには $F^2, \cdots, F^N$ も同時に解かなければならない．

そこで方程式（7）において，右辺第二項は分子の 2 分子衝突のみ から来るものと考えて衝突の力学を考察し F^2 を F^1 で表すと，F^1 について閉じた次の方程式（Boltzmann 方程式）が得られる．

$$\frac{\partial}{\partial t} F_1^1 + \dot{\mathbf{q}}_1 \frac{\partial F_1^1}{\partial \mathbf{q}_1} = \frac{N}{V} \int d\mathbf{p}'_2 \int d\Omega\, v_{rel}\, \sigma(\theta, v_{rel}) (F_{1'}^1 F_{2'}^1 - F_1^1 F_2^1) \tag{8}$$

右辺は 2 分子衝突からの寄与を表し，$F_i^1 = F^1(\mathbf{q}_i, \mathbf{p}_i, t)$，ダッシュは衝突後の分子についての量，$v_{rel}$ は 2 分子の相対速度，Ω は相対速度の立体角，σ は散乱断面積（重心系）である．この方程式の解を $F^1(\mathbf{x}, t) = f(\mathbf{x}, t)$ と書くと

$$F^s(\mathbf{x}^s, t) = \prod_{i=1}^{s} f(\mathbf{x}^i, t) \tag{9}$$

はもとの BBGKY ヒエラルキーの近似解を与えると期待される．実際，分子数密度は大きいが分子の大きさ r は小さいと考えて，

$$r \to 0, \quad N \to \infty, \quad Nr^2 \to \lambda(\text{正定数}) \tag{10}$$

とする極限（Boltzmann-Grad 極限）をとると，適当な条件のもとで （6） の解が （9） に収束することが証明されている．

ボルツマン方程式は，空間スケールは分子の平均自由行程の程度，時間スケールは平均自由時間の程度における 1 体分布関数の振る舞いを記述する方程式であり，ミクロのスケールのニュートン方程式とは異なる階層における 閉じた方程式 である．気体分子の集団運動には，Newton 方程式の階層とは別に，閉じた方程式を与えるこのような階層が存在するのである．

2.3 流体力学の基礎方程式

さらに大きな時間スケールと空間スケールの階層を考えよう．Boltzmann 方程式は 1 体分布関数の変化を記述するが，平衡状態に近い気体ならば，1 体分布関数はほとんど Maxwell 分布

$$n\left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{3/2}\exp\left(-\frac{m\mathbf{v}^2}{2k_B T}\right) \tag{11}$$

に従い，分布の緩やかな時間変化や空間変化は，粒子数密度 n や温度 T の時間空間変数 $t,\mathbf{x}$ への依存性を通してのみ生じる[6]．この分布関数をボルツマン方程式に代入し，質量 m, 運動量 $\mathbf{p}$, 分子のエネルギーを掛けて積分すると，それぞれ次の方程式が得られる．

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\mathbf{u}) &= 0 && (12)\\
\rho\left(\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t}+(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}\right) &= -\nabla p && (13)\\
\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\rho u^2+\rho\epsilon\right)+\nabla\cdot\left[\rho\mathbf{u}\left(\frac{1}{2}u^2+W\right)\right] &= 0 && (14)
\end{aligned}$$

ここで ρ は流体密度，$\mathbf{u}$ は流体の速度，p は圧力，ϵ は流体の単位質量当たりの内部エネルギー，W は流体の単位質量当たりのエンタルピーである．

これらは順に，流体の 質量保存則（連続方程式），運動量保存則（Euler 方程式），エネルギー保存則 を表している．これに流体の状態方程式（流体の物質構成に依存する）を補えば，マクロな変数に関する閉じた方程式系が構成される．しかしこの方程式系は実際の流体運動を記述するには 不完全 である．実際の流体では，マクロなスケールの運動エネルギーは流体の粘性によって次第に散逸するが上の方程式は粘性を含んでいない．これは導出過程で Maxwell 分布を仮定したためである．そこで Maxwell 分布からのずれ も考慮することで，粘性効果を含む運動方程式 (Navier-Stokes 方程式）

$$\rho\left(\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t}+(\mathbf{u}\cdot\nabla)\,\mathbf{u}\right)=-\nabla p+\eta\Delta\mathbf{u}+\left(\zeta+\frac{\eta}{3}\right)\nabla\left(\nabla\cdot\mathbf{u}\right) \tag{15}$$

[6] $\mathbf{v}$ は分子速度，m は分子の質量，k_B はボルツマン定数．

が導出される．ここで η, ζ はそれぞれ粘性率，体積粘性率とよばれる正定数である．これもマクロ変数のみで閉じた方程式であり，Newton の運動方程式（Liouville 方程式），Bolzmann 方程式に続く，第三の階層の記述を与えている．

ここで，基礎方程式 (Newton 方程式）が明らかであっても Navier-Stokes 方程式の階層の存在は明らかではないことに注意したい．実際，空間次元が 2 の場合には，上と同じ議論は成り立たず粘性率の計算に発散が現れるなどの現象がみられる．これは，2 次元では 3 次元と同じ意味の流体力学は成立しないことを示しており，現在も研究対象となっている．2 次元の世界はしばしば異例な性質を示すが流体力学も例に漏れない．

なお，流体力学が成立すること自体を仮定してしまえば，すなわち，マクロ変数による閉じた方程式の存在を仮定してしまえば，Navier-Stokes 方程式は，全くマクロ変数だけの議論から導くことも可能である．具体的には，応力テンソルを歪み速度テンソルの線形関数と仮定すれば，比例係数は等方定数テンソルとなり直ちに Navier-Stokes 方程式が得られる．いわば対称性の考察による方程式の導出で，空間次元が何であっても適用できる方法である．これは 19 世紀に George Stokes (1819-1903) が行った方法であり[7]，現在，多くの流体力学のテキストで用いられている．

マクロレベルで閉じた方程式が存在するかどうかは，現在のところ，やってみなくては分からない，あるいは，やってみてもなかなか解決のつかない問題である．理論面でも応用面でも非常に重要なのは，第三の階層である Navier-Stokes 方程式に従う速度場をさらに平均したマクロ速度場について閉じた方程式（第四の階層）が存在するかどうか，という問題であるが研究者の長年の努力にも関わらず未だ未解決の課題として残り続けている．

3　Navier-Stokes 方程式の性質

Navier-Stokes 方程式は物理学や工学において，また身の回りの空気や水の運動を記述するという点においても，重要な基本的方程式である．以下では最も基本的な場合として，非圧縮性流体（流体密度 ρ が定数）の Navier-Stokes 方程式を考える．このときは速度場について

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \tag{16}$$

が成り立つ．なお，速度場 $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ は，特に断らない限り，それぞれの問題を考える領域 Ω 上で滑らかで，Ω の境界 $\partial\Omega$ まで連続であるとする．

[7]Stokes の論文 (1845) に示された導出はそれ以前のものに比べて格段に明解である．Navier-Stokes 方程式の初出は 1823 年の Navier の論文であるが導出方法は納得することが難しい．

3.1 時間大域解の存在

流体密度が一定の場合の Navier-Stokes 方程式の初期値問題に時間大域的になめらかな唯一解が存在するかどうかは，数学の重要な未解決問題の一つとしてリスト（ミレニアム問題）に挙げられる有名問題である．理学・工学では Navier-Stokes 方程式は重要なツールとして巨大数値計算も頻繁に行われ，飛行機や自動車，橋や塔，工場のパイプやロケットなど，数限りない場所の設計に使用されている．つまり解の存在が保証されていない方程式を使って社会インフラを作っているわけであるが，それは Navier-Stokes 方程式の解は現実を記述すると考えて大きな間違いはないことが経験的に知られているからである．

時間大域的な解が存在しないかもしれないと考えるのは，3 次元の Navier-Stokes 方程式

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\Delta\mathbf{u} \tag{17}$$

の rotation をとって得られる渦度 $\boldsymbol{\omega} = \mathrm{rot}\ \mathbf{u}$ の発展方程式（渦度方程式）

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{\omega} = (\boldsymbol{\omega}\cdot\nabla)\mathbf{u} + \nu\Delta\boldsymbol{\omega} \tag{18}$$

において，右辺第一項が渦を伸長して強める効果をもつため，伸長が暴走すると，解の激しい振舞を防ぐ非線形効果や粘性効果が追いつけなくなり，ある時刻で $\boldsymbol{\omega}$ の発散が生じる可能性が（現在のところ）否定しきれないためである．この問題に関してはこれまでに非常に多くの論文が発表されているが，未だ解決には至らず，解決には従来とは異なる新しい手法が必要だろうとする数学者も多い．理工学を通じて，研究者の多くは大域解の存在を予想しているように思われるが，否定的な見解をもつ有力な研究者もいて意見はさまざまである．もし仮に大域解の存在が否定されれば Navier-Stokes 方程式の修正が必要となるが，現在の方程式の有用性からみると，その影響はあまり大きくはないかもしれない．

一方，Euler 方程式（(17) において $\nu = 0$）では，解を滑らかにする粘性効果が無いため，解は有限時間で発散することが予想される．しかし，有限のエネルギーなど妥当な初期条件・境界条件のもとで，解が有限時間で発散することが証明された例はまだ見つかっていない．数値実験ではそれを示唆する数値解はいくつもあり，有限時刻での数値解の（計算機上での）発散が観察されているが，数学の意味で証明された例は知られていない．

以上は 3 次元の Navier-Stokes 方程式と Euler 方程式に関するものであるが，2 次元の場合は状況は全く異なる．2 次元では渦度方程式 (18) の右辺第一項は存在せず単に

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{\omega} = \nu\Delta\boldsymbol{\omega} \tag{19}$$

となって，渦の伸長項がないので，Navier-Stokes 方程式でも Euler 方程式でも渦度は発散しない．そのため，時間大域的な滑らかな唯一解が存在する，という簡

明な結果が得られている[8].

なお 2 次元であっても渦伸長に寄与する効果を含むと話は簡単ではなくなる．例えば 2 次元の非粘性熱対流

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \theta \mathbf{k} \tag{20}$$

では温度効果による浮力項 $\theta\mathbf{k}$ ($\mathbf{k}$ は鉛直方向の単位ベクトル）が存在するために渦度方程式が

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\omega = \frac{\partial \theta}{\partial x}, \qquad (\omega = \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{k}) \tag{21}$$

となって $\partial\theta/\partial x$ による渦伸長の可能性が生まれる．実際，この 2 次元対流系では数値実験から解の発散可能性が示唆されており，その証明は未解決の課題となっている．2 次元系は変数の数が少なく扱いやすいため，対流系以外にも解の発散可能性を与える効果を付加した系がさまざまに提案され，発散の有無が活発な研究の対象となっている．

3.2 定常解の存在

一般に，定常解は時間を考えなくても良いので時間変化する解よりも易しいように見えるが，境界条件を満たさなければならないので別の難しさが生じる．

3.2.1 2 次元外部問題

流体力学で古くから議論されている問題の一つは，一様な流れが静止した円柱に当たるときに出来る流れの問題である．実験によれば，流れの速度が遅い時には 2 次元的な静かな流れが観察される．しかしこの流れの理論的な解析は大変難しく未だ完全な解決には至っていない．

非線形項は取り扱いが難しいため，まずは定常流の速度 $\mathbf{u}$ が十分に小さい場合を考えて，非線形項を無視した方程式 (Stokes 方程式）

$$-\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu \Delta \mathbf{u} = 0 \tag{22}$$

を調べる．この流れの境界条件は，$\mathbf{U}_\infty$ を無限遠での速度（定ベクトル）として

$$\mathbf{u} = 0, \quad (\text{円柱表面}), \tag{23}$$

$$\mathbf{u} \to \mathbf{U}_\infty, \quad (|\mathbf{x}| \to \infty), \tag{24}$$

である．これは一見して自然な問題設定であるが，実はこの解が存在するのは $\mathbf{U}_\infty = 0$ のときに限ることが証明されており，Stokes のパラドックスとよばれている．こ

[8]ここでは初期条件の滑らかさを仮定している．

のようなことが起こる原因は，円柱表面の境界条件 (23) を満たす (22) の解は遠方で $\ln|\mathbf{x}|$ の程度で発散してしまうため，遠方の境界条件 (24) を満たすことができないことにある．

歴史的には，Stokes 方程式の遠方における振舞を修正するために，非線型項を全く無視するのではなく，

$$(\mathbf{U}_\infty \cdot \nabla)\mathbf{u} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\Delta\mathbf{u} \tag{25}$$

とする方程式（Oseen 方程式）も提案された．この Oseen 方程式では，遠方の境界条件を満たす解の存在が証明されているが，その具体的表示は得られていない．抵抗係数などの量は級数展開（有限項で打ち切り）の形で計算されているが，それによると Navier-Strokes 方程式の解との一致は初項のみにとどまるようである．

問題は Navier-Stokes 方程式における解であるが，無限遠における境界条件 (24) を少し厳しく

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) - \mathbf{U}_\infty = O\left(1/\sqrt{|\mathbf{x}|}\right), \quad (|\mathbf{x}| \to \infty) \tag{26}$$

としたときの解を PR(Physically Reasonable) 解 とよぶことにすると，Reynolds 数 $R(=|\mathbf{U}| \times (\text{円柱半径})/\nu)$ が十分小さいときには，定常 Navier-Stokes 方程式

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\Delta\mathbf{u} \tag{27}$$

を満たし，境界条件を満たす PR 解がただ一つ存在することが証明されている．しかし，一般の Reynolds 数 については未解決である．

3.2.2 3 次元外部問題

円柱周りの流れと並んで実用的にも重要なのが一様流の中の 3 次元の球の回りの流れの問題である．この問題は流体中の微小物体を考える際のモデルとして多くの応用があるため古くから研究されてきた[9]．円柱の場合と異なり，球（半径を a とする）の場合は Stokes 方程式の解で境界条件

$$\mathbf{u} = 0, \qquad (|\mathbf{x}| = a) \tag{28}$$

$$\mathbf{u} \to \mathbf{U}_\infty, \qquad (|\mathbf{x}| \to \infty) \tag{29}$$

を満たすものは

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{U}_\infty - \frac{3a}{4r}\left[\mathbf{U}_\infty + (\mathbf{U}_\infty \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}\right] - \frac{a^3}{4r^3}\left[\mathbf{U}_\infty - 3(\mathbf{U}_\infty \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}\right] \tag{30}$$

のように求められる（$r = |\mathbf{x}| > a$, $\mathbf{n} = \mathbf{x}/|\mathbf{x}|$）．この解は非常に有用であるが，少しややこしい事情があることが知られている．

[9] A.Einstein のブラウン運動の論文 (1905) にも Stokes 方程式の解が用いられている．

いまこの解と一様流の差を

$$\mathbf{u}' = \mathbf{u} - \mathbf{U}_\infty \tag{31}$$

と書くと遠方 ($r = |\mathbf{x}| \to \infty$) での振舞は

$$\mathbf{u}' \sim \frac{|\mathbf{U}_\infty| a}{r} \tag{32}$$

となる．従って遠方における非線形項と粘性項はそれぞれ

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}' \sim \frac{|\mathbf{U}_\infty|^2 a}{r^2}, \tag{33}$$

$$\nu \Delta \mathbf{u} = \nu \Delta \mathbf{u}' \sim \nu \frac{|\mathbf{U}_\infty| a}{r^3} \tag{34}$$

となるため，その比は

$$\frac{|(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}|}{|\nu \Delta \mathbf{u}|} \sim \frac{|\mathbf{U}_\infty| u}{\nu} = R\frac{r}{a} \tag{35}$$

となる．つまり遠方では非線形項の方が粘性項よりも大きくなるため，非線形項を無視する Stokes 近似の考えと矛盾する．したがって解 (30) は本来の近似が成立する範囲を逸脱して求められた解であると言える [10]

ここで本来の定常 Navier-Stokes 方程式の場合に戻ると，3 次元の球の場合には，球の外の領域を Ω とするとき

$$\int_\Omega |\nabla \mathbf{u}(\mathbf{x})|^2 dx < \infty \tag{36}$$

を満たす解が存在すること，また 2 次元のときのように 3 次元問題の PR 解を

$$\mathbf{u} - \mathbf{U}_\infty = O(1/|\mathbf{x}|) \tag{37}$$

を満たすものとして定義すると，(36) を満たす解は PR 解であり，$|\mathbf{U}_\infty|$ が小さければ PR 解は一つしかないこと，が証明されている．

そこで $|\mathbf{U}_\infty|$ が小さいとして Navier-Stokes 方程式を用いて解を求め，そこから計算される抵抗係数など重要ないくつかの量で比較すると，Stokes 方程式を用いて得られた解は，正しい値の第一近似を与えることが見出された．つまり Stokes 方程式の解は，いわば「正しくない近似」によって得られたものであるが，結果的には有用な値を与えていたわけである．

ところで，それでは $|\mathbf{U}_\infty|$ すなわち Reynolds 数が小さくないときにも Navier-Stokes 方程式の定常解は唯一つかどうかが問題になるが，これは未解決である．

[10] Navier-Stokes 方程式の解を $|\mathbf{U}_\infty|$ の大きさで（正確には Reynolds 数 R によって）展開し第二近似を求めることが試みられた．しかしこのとき，第一近似は Stokes 方程式の解 (30) となるものの，第二近似の解は存在しないことが知られている (Whitehead のパラドックス)．

3.2.3　内部問題

有界領域 Ω で，その境界が有限個の滑らかな（連結）閉曲面 $S_1, S_2, \cdots, S_m$ からなるもの（すなわち $\partial\Omega = \bigcup_{i=1}^m S_i$）を考えよう．このとき Ω における Navier-Stokes 方程式の内部問題とは，Navier-Stokes 方程式に従う Ω 上の速度場 $\mathbf{u}$ で，境界において与えられた境界値 $\mathbf{u}_b(\mathbf{x}) = \mathbf{u}(\mathbf{x})$, $(\mathbf{x} \in \partial\Omega)$ を取るものを求める問題を言う．以下では定常解の場合について，外力 $\mathbf{f}$ のもとで

$$(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\Delta\mathbf{u} + \mathbf{f} \tag{38}$$

を満たす解を求めることを考える．

この問題は古く1920年代後半に解の存在が議論され，まず，外力 $\mathbf{f}$ と速度の境界値 $\mathbf{u}_b$ がある程度滑らかであり，さらに

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{u}_b \cdot \mathbf{n}\, dS = \sum_{i=1}^{m} \int_{S_i} \mathbf{u}_b \cdot \mathbf{n}\, dS = 0 \tag{39}$$

を満たすときには，ある ν_0 が存在して $\underline{\nu_0 < \nu < \infty \text{ をみたす全ての } \nu \text{ に対して}}$ 解が存在することが証明された．すなわちある程度大きな粘性の場合にのみ解の存在が証明された．その後 Leray らは条件 (39) よりも強い条件，

$$\int_{S_i} \mathbf{u}_b \cdot \mathbf{n}\, dS = 0, \quad (i = 1, 2, \cdots, m) \tag{40}$$

が成り立つ場合について，$\underline{\text{すべての } \nu(>0) \text{ の値に対して}}$ 解が存在することを証明した．しかしその後，現在に至るまで，(39) の条件のもとで，すべての $\nu(>0)$ の値に対して解が存在するかどうかは結着がついておらず，流体力学の有名未解決問題として残されている．

そもそも (39) は，非圧縮性流体の場合，境界全体として流入量と流出量が釣り合っていなければならないので自然な条件であるが，(40) はその釣り合いが個々の境界についても成り立っていなければならないことを要求している．前者の条件を満たしているにも関わらず，十分小さな ν に対しては定常解が存在しないという場合があるかどうかは，直観的には判断が難しい．現実の流れでは ν が小さくなると流れが不安定化するため，定常解が存在しても実現不可能となることが予想される．その意味ではこの問題は有用性に欠けるかもしれないが，定常解が存在して不安定ということとそもそも定常解が存在しないことの差は大きく，後者の場合，どのような機構が定常解の非存在をもたらしているのかには大きな興味がある．実際，定常解が存在しない場合があると予想する著名な専門家もあり，それが正しければそのような例を構成することが期待されている．

3.3 解の安定性

Navier-Stokes 方程式の解が実際の流れで実現するためには，単に解が存在するだけでは不十分であり，その解に微小な攪乱が加わったとしても解が崩れないことが必要である．この性質を解の安定性という．

安定性を調べるには攪乱の発達具合をみればよい．この方法の第一候補は攪乱の大きさを無限小と考えてその増幅率を調べること，すなわち流れ $\mathbf{u}$ が主流 $\mathbf{U}$ と攪乱 $\mathbf{u}'$ の和

$$\mathbf{u} = \mathbf{U} + \mathbf{u}' \tag{41}$$

であるとして，$\mathbf{u}'$ について線形化した方程式を作って $\mathbf{u}'$ の時間発展を調べることである．これを線形安定性解析とよぶ．主流が定常流の場合は，攪乱について指数的成長

$$\mathbf{u}'(\mathbf{x}, t) = \exp(\sigma t)\mathbf{v}(\mathbf{x}) \tag{42}$$

を仮定して [11]，系の支配方程式

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = N(\mathbf{u}) \tag{43}$$

に (41) (42) を代入し，$\mathbf{u}'$ について線形化することで得られる固有値問題

$$\sigma \mathbf{v}(\mathbf{x}) = \left.\frac{dN(\mathbf{u})}{d\mathbf{u}}\right|_{\mathbf{u}=\mathbf{U}} \mathbf{v}(\mathbf{x}) \tag{44}$$

を解けばよい．固有値 σ の実部が正になる場合があれば主流は不安定と判定する．

3.3.1 円管 Poiseuille 流の安定性

日常的に見る流れは速くなると乱れて乱流化するのが普通である．この乱流化の機構を調べるため，O.Reynolds (1883) は円管の中に水を流す実験を行い，流速が増すと乱れが始まることを観察している．現在，多くの文献で乱流研究の端緒と讃えられている有名な実験である．しかしこの実験の理論的説明は未だに完結していない．

Reynolds の実験における円管内の流れ（主流）は，流れの方向を x 方向に取れば

$$\mathbf{U}(\mathbf{x}) = \left(U_0 \left\{ 1 - \left(\frac{r}{a}\right)^2 \right\}, 0, 0 \right) \quad U_0 = \frac{G_p a^2}{4\nu} \tag{45}$$

となり（Hagen-Poiseuille 流，a は円管半径，r は円管中心からの距離，G_p は圧力勾配を流体の密度で割ったもの），線形安定性を調べる固有値問題は Stokes の流れ関数とよばれる関数を用いて最終的に

$$\left(1 - r^2 - \frac{\sigma}{i\alpha}\right)\left(\frac{d^2}{dr^2} - \frac{1}{r}\frac{d}{dr} - \alpha^2\right)\phi(r) = \frac{1}{i\alpha R}\left(\frac{d^2}{dr^2} - \frac{1}{r}\frac{d}{dr} - \alpha^2\right)^2 \phi(r) \tag{46}$$

[11] これが標準的な手続きであるが指数的でなく代数的な場合もある．

とその境界条件 ($\phi(1) = \phi'(1) = 0$, $\phi/r \to 0$, ϕ'/r が有界 $(r \to 0)$）に帰着される[12].

円管 Poiseuille 流の安定性は基本的であると同時に応用上も重要であったため，数多くの研究者が固有値解析に取り組んできた．当初予想された結果は，Reynolds 数が（すなわち U_0 が）大きくなるにつれて，固有値 σ の実部が負から正に転じるというものであったが，繰り返し精密な数値計算が行われたにも関わらず，固有値が正になる U_0 の値は未だに発見されていない．現在では，円管 Poiseuille 流はすべての Reynolds 数において線形安定であろうと考えられているが，未解決のままで証明は与えられていない．

仮に，予想通り線形安定であるとすると，円管 Poiseuille 流はなぜ乱れて乱流化するのだろうか．線形安定性で想定される攪乱の大きさは無限小であるため，ある程度の大きさの攪乱になって初めて攪乱が大きく成長する（ある程度以下の大きさの攪乱は減衰する）という状況は線形安定と判断されることになる．現段階での予想は，円管 Poiseuille 流において成長する攪乱の大きさの下限は，Reynolds 数が大きくなるにつれて小さくなりゼロに近づく，というものであり，数多くの実験や数値解析はこの予想を支持している．

3.3.2 非粘性流の安定性

日常生活で出会う流体はすべて粘性効果を含んでいるが，現象や興味によっては粘性を無視して考えて良いものも少なくない．例えば物体近傍の流れでは粘性効果を無視することはできないが，物体から離れた場所の流れは非粘性流と考えて差し支えないことも多い．そのため非粘性流，Euler 方程式の研究は理論的興味とともに実際的な意味もあり，また翻って Navier-Stokes 方程式の性格を考えるためにも重要である．

しかし Euler 方程式には Navier-Stokes 方程式と決定的に異なる点がある．それはエネルギーを代表とする多くの保存量をもつことである．定常解が安定である場合，Navier-Stokes 方程式では粘性散逸のため攪乱が最終的にゼロに近づくことを期待できる．しかし，Euler 方程式ではエネルギーが保存するため攪乱はゼロに近づくことができない．つまり Euler 方程式の解が「安定」であることは，$\mathrm{Re}(\sigma) < 0$ であることではなく $\mathrm{Re}(\sigma) = 0$ （この場合を中立安定という）に対応する．しかし逆は成り立たず， $\mathrm{Re}(\sigma) = 0$ であっても $t \to \infty$ で攪乱が増大する場合があり得るため安定性の判定は固有値を調べるだけでは不十分である．

一様流柱におかれた円柱の周りの流れは，流速が遅い時は定常流であるが，流速が大きくなるにつれて非定常化し，渦が交互に進む二本の渦列が形成される．これは Karman 渦列とよばれる現象で，強風のとき電線から聞こえる高い音はこの渦列が原因である．しばしばこの渦列は，一つ一つの渦を点状の渦と考える渦の

[12]個々の変数や記号について興味のある方は例えば，巽友正・後藤金英：「流れの安定性理論」（1976，産業図書）の p.91 付近を参照されたい．

配置問題として議論される．これは非粘性流柱の点渦の運動を考えることになるが，Karman 渦列はそのような配置が線形安定になる場合とされることが多い．しかし非粘性流体が対象であるため，この「安定な」配置は正確には中立安定にすぎない．実際，非線形効果も込めて攪乱の消長を調べると，この配置は中立安定ではあるが，非線形不安定であることが分かる．このため，Karman 渦列が現実の流体中に形成されることと，渦配置の安定性／不安定性がどのような関係にあるのか，いまだ明瞭な理解に達したとは言い難い状況にある．

3.4 カオスと乱流

一般に，流れは流速の増大に伴って乱れが増加し強く乱れた状態に至る．この最終状態を「発達した乱流」といいそこに至る一連の経過を「乱流遷移」とよぶ．乱流をどう理解し予測するかということは流体力学の最大の問題である．これまでに膨大な量の研究が行われ，大量の結果が蓄積されてきたにも関わらず，Navier-Stokes 方程式から出発し論理的なギャップなしに乱流の振舞を記述できる理論は未だ得られていない．

3.4.1 発達した乱流

整然として乱れていない流れ（層流）は，Navier-Stokes 方程式の比較的簡単な解で記述できることが期待されるが，発達した乱流にはそのような簡単な解の存在を期待することはできない．しかし 20 世紀半ばから，発達した乱流には顕著な統計法則（スケーリング則）があることが知られており，その一例は速度場 $\mathbf{u}(\mathbf{x},t)$ について

$$\left\langle \left[(\mathbf{u}(\mathbf{x}+\mathbf{r}) - \mathbf{u}(\mathbf{x})) \cdot \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} \right]^2 \right\rangle \sim \epsilon^{2/3} r^{2/3}, \tag{47}$$

というもの（Kolmogorov のスケーリング則）である．ここで ϵ は単位体積当たりのエネルギー散逸率であり $\langle\ \rangle$ は（アンサンブル）平均を表す．このスケーリング則の説明は乱流理論の大きな目標とされてきた．乱流の統計理論には，Navier-Stokes 方程式を基礎にして多体相関量方程式のヒエラルキーを導いても，BBGKY 階層のように，有限個の方程式では閉じない，という困難がある．そのため，閉じた方程式を得るためには，高次相関量を低次相関量で表現するための何らかの近似（完結仮説）を導入することが必要となる．このような完結仮設を伴う統計理論は統計流体力学とよばれる分野を形成し，さまざまの完結仮説とそれに基づく統計理論が提案され，それぞれにスケーリング則を与えてはいるが，現在までのところ，決定版の理論と認められたものは存在しない [13]．また統計力学における平衡

[13] 一般に統計理論は手続きの複雑さに比して結論が少ないため比較が難しく，またそれが決定版であるための条件も明確とは言い難い．

状態のアナロジーから，発達した乱流を，なんらかの平衡分布によって記述しようとする試みもあるが有効な方法はいまだ見出されていない．理論的には，発達した乱流は巨大次元のカオスなので，その元になっているストレンジアトラクタを調べれば乱流の性質が明らかになるという期待はあるが，これは非常に難しく，現象を説明するような結果はまだほとんど得られていない[14].

1980 年代に入り，計算機の能力が上がると乱流の数値実験がある程度実行できるようになり，加速度的な計算機の進歩に歩調を合わせて乱流計算の規模と内容が進展した．同時に，現実の物体や乗り物に関わる乱流計算は工学的に非常に重要であるため，実用的な乱流計算の方法がこの頃から非常な勢いで研究されるようになった．この実用的計算法は，Navier-Stokes 方程式に現れる $\mathbf{u}$ や p を，ある時空間で平均した量と考えて，それら平均量の時間発展を記述することを目的とするもので，細かな乱れの平均的効果を平均速度などによって表現した項を加えた Navier-Stokes 方程式を使って計算しようとするものである．ある意味でこれは，第二章で述べた第四の階層の方程式をめざすものとも言える．このような計算法はこの半世紀ほどの間に急速に進展し実用化された結果，現在は多くの流れがこれによって計算されるようになっている．しかしこれは第四の階層の方程式が発見されたというにはほど遠い．このような方程式は乱れの平均効果を表すため数多くのパラメータを含むが，一般的に言って，信頼できるパラメータ値を与える理論に乏しく，実際には，計算結果が既知の流れに合うように調整するという手続きが必須のものとなっている．このため，未知の状況にある乱流に対しては，正しい計算を行うためにどのようなパラメータ値が適切かという問題は，大きくかつ困難な問題であり続けている．

3.4.2 乱流遷移

一方，乱流遷移についての理解は今世紀に入り急速に進展している．これは乱流遷移の段階は発達した乱流ほど流れが複雑でなく流れの「次元」が低いため，現在の計算機の能力でアプローチ可能な面も少なくないためである．また近年の進展には，Navier-Stokes 方程式の解の時間発展を力学系として考えて，相空間における軌道の構造を通じて現象を捉えようとすることでもたらされた面が大きい．

流速を（Reynolds 数を）上げていくときに複雑化する流れは解の分岐として理解される．初めは単純な流れであっても，流速を上げるとそれが線形不安定するが，線形安定から線形不安定に切り替わるところで元の解から新しい解が分岐する．新しい解は定常解であったり振動解のような非定常解であったりするが，分岐の回数を重ねると周期性をもたない非定常解に到達しカオスとよばれる状態に

[14]1970～80 年代にカオスが大きく取り上げられ，非線型現象を記述するカオス理論に大きな期待が寄せられた．しかしアトラクタの解析の困難さなどから一朝一夕には片づかないことが分かり，当初の熱は今はないが，比較的低次元のカオス現象については大規模数値計算を用いていくらかアプローチが可能になっている．アトラクタの構造は今後解決されるべき重要な課題であることに変わりはない．

至ることが多く，さらに流速を上げると次第に流れは発達した乱流とよばれる状態に近づいていく．乱流遷移とはこの一連の過程を言い，これらを調べるために，カオスとしての（あるいはカオス的な）構造を特徴づける，アトラクタ，次元，周期軌道，ホモクリニック軌道，ヘテロクリニック軌道などの力学系的な概念が，計算機によって実際に計算され[15]，現実の現象の解釈に使われている．これは，以前には流体力学内部にとどまっていた様々な概念を，より普遍的な数学（力学系）の言葉によって再解釈するもので，他分野との比較検討を可能にすることとなった[16]．流れの乱流遷移のなかでも，直管や水路など平均的には直進する流れの乱流遷移を対象とする研究は特に盛んに行われ，不安定な定常解や周期解が乱流遷移に強く関わっていることが明らかになってきた．乱流斑とよばれる局所的な乱流領域の出現確率や乱流化のための臨界 Reynolds 数についても新しい解釈が試みられている．部分と全体の関係はまだ混沌としていて多くの未解決問題が残されて（あるいは生まれて）いる状況であるが，前世紀末から状況は大きく変化しつつあり，近年の流体力学で最も大きく進展した分野の一つとなっている．

3.4.3 波動乱流

現実の世界には複雑な流れがいくつもあり，その中には波を含むものも多い[17]．線形波動の存在する系も流速が大きくなれば乱流化する．このときの乱流は線形波動の存在によって通常の乱流とは異なる振舞をすることが知られている．このような系の乱流は波動乱流 (wave turbulence) とよばれ近年研究が盛んになった分野の一つである．

波動には顕著な性質がある．それは遠くへ伝わることである．つまり波には，遠方にエネルギーや運動量あるいは角運動量といった力学的要素をすみやかに伝える能力がある．海岸に何千キロも離れたところにいる台風によるうねりが伝わってくるのはその典型例である．これは当たり前のように見えるが，台風がもつエネルギーをいったん波に代えて輸送し海岸の砂や岩にエネルギーを与える，と考えれば波はエネルギーの輸送機関でもある．このようなことは大気中でも頻繁に起きており，風が地面の運動量（つまり風にとってのブレーキ）を波に載せて上空に伝え上空の風にとってブレーキとして働く，ということは珍しくない現象である[18]．さらに大きなスケールになると，地球を回る風の角運動量は地球回転に起因する波によって緯度方向に運ばれ別の緯度で地球を回る風を誘起する．金星を回る風にもこのような機構があることが予想されている．このような「波と平均

[15]殆どの場合，理論的に（つまり紙と鉛筆で）計算することは困難で計算機による数値計算が用いられる．

[16]しかし同時に，普遍的な言語による表現は，本来，流体力学的な理解や直観にもとづいていた側面を捨象することでもあり，流体運動としての渦や流れやシアなどの特徴が見えにくくなった面も否めない．

[17]大気がその典型例である．雲に見える波模様は上下の密度差が生む波である．また丸い地球が回転していることも別の種類の波の原因となりジェット気流の蛇行と関係している．

[18]この効果を適切に考慮しないと梅雨前線の位置が数百 km ずれてしまうそうである．

流」の相互作用は波動乱流の一つの性質であり，それによって大きな流れの構造が形成されるという特徴がある．これは発達した乱流の場合に比べれば「次数の低い」の現象であるが，それでも理論的に扱うことは容易ではなく，どのような構造が形成されるのかを知るためには数値実験が必須の手段となっている．これは平均流の時間発展を記述することが難しいことが原因であり，もし本稿の初めに述べたような「第四の階層」の方程式があれば作業は容易になるかもしれないが，現状では夢想的な希望である．この分野においても，乱流状態において平均速度などの平均量を予測することが最大の問題となっている [19]．

4 おわりに

流体力学は，前世紀の航空機の発達に大きな影響を受け，またさまざまの工学的な目的に用いられ発達してきた．工学的応用は，動機付けの点のみならず新しい現象の発見を通じて，理学的研究においても重要な役割を果たしてきた．今日においても，自動車・航空機・船舶・列車などの移動手段の設計にとって流体力学は不可欠であり，また新しい要素がこれらの応用から提供されている．

計算機の能力がそれほど高くなかった頃は，研究者の間にも「工学的応用のためには理学的理解が不可欠」との考えが一般的であり，そのような前書きが置かれたテキストも多く見られた．しかし計算機の発達とともに，数値計算すればとにかくも数値的な答えが得られるという状況が生まれ，応用のためには理屈はほどほどにして計算すればよいという時代が訪れた．これは流体力学に限った話ではないが，特に基礎方程式が比較的コンパクトな偏微分方程式である流体力学では他分野よりも早くそのような時代になったようである．また，応用のためには乱流計算が重要であるが，計算の結果として数値的に乱流速度場を得てもその理論的な解釈や判断は難しく，結局，工学的目的のためには求める量を数値的に計算し数値を得ることが重要，という事情もあった．前世紀中頃には，乱流について，ある時どこかの天才が素晴らしい理論を発表しそれによってブレイクスルーが生まれるのではないか，という期待があったが，前世紀末には，そのような見方とは異なり，乱流はその複雑さのため突然のブレイクスルーが生まれることは難しい，とする見解も見られるようになった．どちらの見方が正しいのかはまだ分からない [20]．

[19] 波動乱流のもう一つの顕著な性質は波動同士が共鳴を起こすことである．一般的には，共鳴相互作用は非線形相互作用の中で突出して強力な相互作用となるため，共鳴相互作用の解析が系の時間発展の理解に必須となる．しかし共鳴相互作用だけで系の振舞の大枠が決まるのかというと，必ずしもそうではない．波と平均流の相互作用に現れる平均流は，共鳴相互作用を起こさない（あるいは起こしてもエネルギーのやりとりはしない）場合もあり，そのようなときには本来弱いはずの非共鳴相互作用が無視できないことになる．非共鳴相互作用のどのような効果が重要なのかは未だ明瞭とは言い難い．

[20] 今世紀に入ってからの新しい状況は機械学習あるいは人工知能 (AI) の発達である．これらは，多くの既知の入力データと出力結果の組合せを用意して，できるだけそれらを再現するよう入出力装置（ネットワーク）のパラメータを調整し，そうやって作られた装置に新しい入力データを入れ

参考文献 (関連する日本語のものをいくつか．いずれも優れた成書である．)

[1] 曽根良夫，青木一生：分子気体力学（1994，朝倉書店）

Boltzmann 方程式の性質について詳しい．

[2] イェ・エム・リフシッツ，エリ・ペ・ピタエフスキー（井上健男，石橋義弘，柳下崇　訳）：　物理的運動学 1 （ランダウ=リフシッツ 理論物理学教程，訳書 1982，東京図書）

有名な物理学教程の一冊．気体分子運動論の概要が述べられている．

[3] 川崎恭治：非平衡と相転移–メソスケールの統計物理学（2000，朝倉書店）

統計力学の専門書．方程式の階層について詳しい議論がなされている．

[4] 巽友正：流体力学（1982，培風館）

流体力学の教科書として定評のある著作．物理的観点からの基本的事項をほぼ網羅している．

[5] 岡本久：ナヴィエストークス方程式の数理（2009，東京大学出版会）

Navier-Stokes 方程式と Euler 方程式の数学的性質についてまとめた著作．読みやすく新しい結果まで含んでいる．

[6] 木田重雄，柳瀬眞一郎：乱流力学（1999，朝倉書店）

20 世紀末に出版された乱流についての成書．乱流の多様な側面が述べられている．

て結論を得ようとするものである．この装置の一つの特徴は，入力データと出力データの関係が人間には対応が難しいような複雑な場合でも，大きな計算機を用いればなんとかなるかもしれない，というところにあり，つまり人間には判断が難しいような複雑すぎる対象に対して，ある程度正確な出力結果を与える可能性を持っている．流体力学においても近年，このような装置を用いた研究が発表されるようになり，いわば研究のＡＩ化も試みられている．まだ判断するのは早計であるが，もともと複雑すぎて扱いや判断が難しい乱流場などはこのような研究の対象として適しているのかもしれない．実際，十分に訓練した装置であれば，方程式抜きでも流れ場を良く再現する，という例も示されている．

このような「理解ぬきの結果」を可能とする状況は，理学的研究つまり現象の理解をめざす研究に対して遠心的に働くように思われる．十分に訓練された装置を作りその中身を調べれば新しい理解が生まれるのではないか，という見方もあるが，それはこの装置の本筋ではなく，人間にはどうしようもない複雑な対象についても，理解抜きで一定の出力結果を与えるのがこのような装置の役割と思われる．もちろん一部では，人間による理解を追求するという目的・観点はいつまでも残りつづけるであろうが，奔放に想像すれば，数学の命題にしても，人間には複雑すぎて意味不明だが有用な命題というものもきっと多数存在し，それらの命題を操ることができるのはこのような装置だけとなるかもしれない．そのような状況を想像すると，社会が従来の規模の理学的研究を維持しようとするかどうかも自明ではないように思われてくる．これが単なる妄想なのかどうか筆者には判然としない．