# 代数曲面の自己正則写像

中山　昇

目次



## 1. 序

代数幾何学の研究対象である代数多様体は, 素朴な意味では代数的に定義された図形のことです. ２次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^2$ 内で, 座標 $(x, y)$ についての多項式

$$f(x,y) = a_0 + a_{1,0}x + a_{0,1}y + a_{2,0}x^2 + a_{1,1}xy + a_{0,2}y^2 + \cdots$$
$$= \sum\nolimits_{i,j \geq 0} a_{i,j}x^i y^j$$

の零点集合 $V(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = 0\}$ などは代数多様体ですが, $\mathbb{R}^2$ の代わりに一般の $n$ 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$ や $\mathbb{C}^n$ ($\mathbb{C}$ は複素数全体の成す集合) を考えたり, 一つの多項式 $f$ だけではなく, たくさんの多項式 $f_1$, $f_2$, ..., $f_m$ の共通零点集合 $V(f_1, f_2, \ldots, f_m) = V(f_1) \cap V(f_2) \cap \cdots \cap V(f_m)$ も代数多様体と考えます. さらには $\mathbb{R}^n$ や $\mathbb{C}^n$ 内で定義される代数多様体いくつかを貼り合わせたものも代数多様体として考えられるようになりました.

２０世紀の代数幾何学の発展により, 代数多様体をスキームや複素解析空間の特殊なものとして正確に定義できるようになり, さらに位相幾何学, 多様体論, ホモロジー代数, 可換環論などの発展と相まって, 様々な方法で研究ができるようになりました. とくにグロタンディーク (Grothendieck) によって創始されたスキーム論 [5] はその後の代数幾何学の発展に多大な影響を及ぼしました. その結果, たとえば層係数

コホモロジー論を使うことで, 四則演算のような簡単な計算により, 重要な結果が得られるようになりました. しかし残念ながら, スキームや複素解析空間の解説は, その内容の豊富さと難しさのため, この講義ではできません. 代数幾何学について多くの日本語の本が専門家のみならず, 非専門家向けにも出版されています. 少々古いかもしれませんが, [9] にそのような文献のリストが載っています.

本講義では代数多様体としては $\mathbb{C}$ 上定義される既約な(準) 射影的代数多様体のみを扱い, 次の二つのテーマについて解説します.

(I) 代数曲面の双有理的分類.

(II) 全射かつ非同型な自己正則写像 $X \to X$ を持つ代数曲面 $X$ の分類.

ただしここでいう代数曲面は非特異 2 次元射影的代数多様体のことです. テーマ (I) は代数曲面論として古くから知られている理論ですが, (II) は２０年ほど前の論文 [4], [13] などが元になっています. 代数曲面に関する文献として [1], [2], [6, Chapter V], [8], [12] を挙げておきます.

**注.** 文章中 (cf. ...) と書かれているところは ... を参照してください, という意味です. いくつかの重要な用語には下線 ___ を引いていますが, 必ずしもその用語の説明をしているわけではありません. 集合 $X$ と集合の間の写像 $f\colon X \to Y$ について, 次の一般的な数学記号と用語を使います:

- $\#X$ で $X$ の濃度 (cardinality) を表します. $X$ が有限集合の場合, $\#X$ は $X$ の元 (要素) の個数です.
- 部分集合 $A \subset X$, $B \subset Y$ に対し,
  $$f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}, \quad f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\}$$
  と書き, それぞれ ($f$ による) $A$ の像, $B$ の逆像と呼びます.
- $y \in Y$ に対し $f^{-1}(y) = f^{-1}(\{y\})$ と定義し, これを $y$ 上の $f$ のファイバー (fiber) とも言います.
- $f(X) = X$ のとき $f$ を全射と呼び, 全ての $y \in Y$ に対し $\#f^{-1}(y) \leq 1$ となるとき $f$ を単射と呼びます. 単射かつ全射となる $f$ は全単射と呼ばれます.

**追補.** 公開講座終了後, 数カ所の訂正を行い, 文献 [8] を追加しました.

## 2. 射影多様体

ここでは射影的代数多様体 (projective algebraic variety), 略して射影多様体, の “定義らしきもの” を説明します. 整数 $n \geq 1$ に対し, $n$ 次元射影空間 $\mathbb{P}^n$ はベクトル空間 $\mathbb{C}^{n+1}$ の 1 次元部分ベクトル空間

全体のなす集合と "定義" されます．または $n+1$ 個の複素数の連比 $(x_0 : x_1 : \cdots : x_n)$ のなす集合でもあります．ここで $x_0, x_1, \ldots, x_n$ のどれかは 0 ではなく，また等式 $(x_0 : x_1 : \cdots : x_n) = (y_0 : y_1 : \cdots : y_n)$ は $x_0 = \lambda y_0,\ x_1 = \lambda y_1,\ \ldots,\ x_n = \lambda y_n$ を同時に満たす複素数 $\lambda \neq 0$ が存在することを意味します．この連比は 1 次元部分ベクトル空間 $\{(\lambda x_0, \lambda x_1, \ldots, \lambda x_n) \mid \lambda \in \mathbb{C}\}$ に対応します．各 $0 \leq i \leq n$ に対し，$\mathbb{P}^n$ の部分集合

$$U_i = \{(x_0 : x_1 : \cdots : x_n) \mid x_i \neq 0\}$$

を考えると，対応 $(x_0 : x_1 : \cdots : x_n) \mapsto (x_0/x_i, \ldots, x_n/x_i) \in \mathbb{C}^n$ (ただし $x_i/x_i$ の項は除外) によって $U_i$ と $\mathbb{C}^n$ を同一視できます．したがって $\mathbb{P}^n$ は $\mathbb{C}^n$ の $n+1$ 個の合併集合と思えます．慣例として，$\mathbb{P}^1$ を射影直線，$\mathbb{P}^2$ を射影平面と呼びます．

不定元 $x = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ を変数に持つ $n$ 変数複素多項式 $f$ は

$$f(x) = f(x_0, x_1, \ldots, x_n) = \sum\nolimits_{i_0 \geq 0,\, i_1 \geq 0,\, \ldots,\, i_n \geq 0} a_{i_0, i_1, \ldots, i_n}\, x_0^{i_0} x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n}$$

という有限和で表示されます．ここで $x_0^{i_0} x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n}$ は単項式と呼ばれ，その係数 $a_{i_0, i_1, \ldots, i_n}$ は複素数です．整数 $d \geq 0$ に対して $f$ が $d$ 次斉次式であるとは $a_{i_0, i_1, \ldots, i_n} \neq 0$ となるすべての $(i_0, i_1, \ldots, i_n)$ について $d = i_0 + i_1 + \cdots + i_n$ が成り立つことをいいます．これは任意の複素数 $\lambda \neq 0$ に対して

$$f(\lambda x_0, \lambda x_1, \ldots, \lambda_n) = \lambda^d f(x_0, x_1, \ldots, x_n)$$

が成り立つことと同値です．したがって，この $d$ 次斉次多項式 $f$ の零点集合 $V(f) = \{f(x) = 0\}$ が $\mathbb{P}^n$ 内の部分集合として意味を持ちます．多項式 $f$ が既約 (定数でない２つの多項式の積に書けない) なとき $V(f)$ を $\mathbb{P}^n$ の $d$ 次超曲面と呼び，$d = 1$ のとき $V(f)$ を超平面と呼びます．

**注.** 各 $0 \leq i \leq n$ と変数 $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ に対し，多項式 $f_{(i)}(y)$ を

$$f_{(i)}(y_1, y_2, \ldots, y_n) = f(y_1, y_2, \ldots, y_{i-1}, 1, y_i, \ldots, y_n)$$

で定義すると，上の同一視 $U_i \leftrightarrow \mathbb{C}^n$ により $V(f) \cap U_i$ は $\mathbb{C}^n$ の部分集合 $\{f_{(i)}(y) = 0\}$ に対応します．このようにして超曲面 $V(f)$ は $\mathbb{C}^n$ 内の超曲面 $\{f_{(i)}(y) = 0\}$ が "張り合ってできたもの" になります．

**例.** $f(x_0, x_1, x_2) = x_0 x_1 - x_2^2$ とおきます．これは 2 次斉次式で

$$f_{(0)}(y_1, y_2) = y_1 - y_2^2 = f_{(1)}(y_1, y_2), \quad f_{(2)}(y_1, y_2) = y_1 y_2 - 1$$

が成り立ちます．また写像

$$\mathbb{P}^1 \ni (z_0 : z_1) \mapsto (z_0^2 : z_1^2 : z_0 z_1) \in V(f) \subset \mathbb{P}^2$$

により $V(f)$ は $\mathbb{P}^1$ と一対一に対応します (より強く代数多様体として同型です). このように射影平面 $\mathbb{P}^2$ で考えると, "放物線" $\{y_1 = y_2^2\}$ と "双曲線" $\{y_1 y_2 = 1\}$ は張り合って, 射影直線 $\mathbb{P}^1$ の一部になります.

一般の射影的代数的集合は, 有限個の斉次多項式 $\boldsymbol{f} = (f_1, f_2, \ldots, f_k)$ の共通零点集合

$$V(\boldsymbol{f}) = \{x \in \mathbb{P}^n \mid f_1(x) = f_2(x) = \cdots = f_k(x)\}$$

として定義されます.

**注.** スキーム論では零点集合よりも, $n+1$ 変数多項式環 $\mathbb{C}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ 内で $f_1, f_2, \ldots, f_n$ で生成されるイデアル $I(\boldsymbol{f})$ を重視し, $V(\boldsymbol{f})$ の代わりに次数付き環 $R = \mathbb{C}[x_0, x_1, \ldots, x_n]/I(\boldsymbol{f})$ に付随するスキーム $\operatorname{Proj} R$ を考えます.

この $V(\boldsymbol{f})$ が既約なとき (二つの真に小さい代数的集合の合併集合とならないとき), またはより強く $I(\boldsymbol{f})$ が素イデアルのとき, $V(\boldsymbol{f})$ を射影的代数多様体, 略して射影多様体, と呼びます. そして複素解析空間 $X$ がこのような $V(\boldsymbol{f})$ と同型なときも $X$ を射影多様体と呼びます. とくに射影多様体といっても, 埋め込み $X \subset \mathbb{P}^n$ を固定してはいません. この $X$ が特異点を持たないとき, $X$ は非特異であると言います. 射影多様体は既約かつ被約なコンパクト複素解析空間であり, 非特異射影多様体はコンパクト複素多様体でもあります.

射影多様体 $X$ の部分集合 $Z$ に対し, ある埋め込み $X \subset \mathbb{P}^n$ が存在して, $X$ も $Z$ も有限個の斉次式の共通零点集合として $\mathbb{P}^n$ 内で表示できるとき, $Z$ を $X$ の代数的部分集合またはザリスキ (Zariski) 閉集合と呼び, 補集合 $X \setminus Z$ をザリスキ開集合と呼びます. そして射影多様体のザリスキ開集合を準射影的多様体と呼びます. 本来の定義では準射影的でない代数多様体もあるのですが, 本講義では準射影的多様体を単に代数多様体と呼び, 1 次元または 2 次元の代数多様体をそれぞれ代数曲線, 代数曲面と呼ぶことにします. また 1 次元または 2 次元の射影多様体をそれぞれ射影曲線, 射影曲面と呼ぶことにします.

## 3. 代数曲線の分類

非特異射影曲線は定義から 1 次元コンパクト複素多様体の構造を持ちます. なお 1 次元複素多様体はリーマン (Riemann) 面 とも呼ばれています. また逆にコンパクトリーマン面はある射影空間内に埋め込まれ非特異射影曲線となることも知られています. したがって非特異射影曲線とは 1 次元コンパクト複素多様体 (コンパクトリーマン面) に他なりません. コンパクトリーマン面 $X$ には種数という整数

$\boldsymbol{g}(X) \geq 0$ が定義されますが, これは位相不変量でもあり, 1 次ベッチ数 $\boldsymbol{B}_1(X) = \dim H_1(X, \mathbb{R})$ は $2\boldsymbol{g}(X)$ に一致します. コンパクトリーマン面 $X$ の性質は種数によってかなり異なります.

**例 3.1.** $\boldsymbol{g}(X) = 0$ という条件は $X$ が $\mathbb{P}^1$ と同型であることを意味します. このとき $X$ は 2 次元球面 $\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ と位相同型です. またこのとき, $X$ は非特異有理曲線とも呼ばれます.

**例 3.2.** コンパクトリーマン面 $X$ に対し以下の 4 条件は同値です.

(1) $\boldsymbol{g}(X) = 1$.
(2) $X$ は 2 次元実トーラス $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ と位相同型.
(3) $X$ は楕円曲線.
(4) $X$ は射影平面 $\mathbb{P}^2$ 内の非特異 3 次曲線.

ここで $\mathbb{S}^1$ は円周 $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 = 1\}$ のことで, その直積 $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ は "穴 1 つを持つドーナツの表面" と思えます. とくに $\boldsymbol{B}_1(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1) = 2$ なので (2) $\Rightarrow$ (1) がわかります. 射影平面 $\mathbb{P}^2$ 内の非特異 3 次曲線とは既約 3 次斉次式で定義された超曲面のことであり, 添加公式よりその種数は 1 です (cf. 5.10, 5.11): したがって (4) $\Rightarrow$ (1) です. 楕円曲線とは 1 次元複素トーラスのことであり, 一般の $n$ 次元複素トーラスは, ベクトル空間 $\mathbb{C}^n$ の加法に関する離散部分群 $L$ による商群 (または剰余群) $\mathbb{C}^n/L$ でコンパクトなもののことです. このとき $L \simeq \mathbb{Z}^{2n}$ で $\mathbb{C}^n/L$ は $2n$ 次元実トーラス $\mathbb{S}^1 \times \cdots \times \mathbb{S}^1$ と位相同型です (とくに (3) $\Rightarrow$ (2)). なお, コンパクト複素リー (Lie) 群は複素トーラスに限ります. 複素トーラスが射影多様体となるとき, これをアーベル (Abel) 多様体と呼びます. 楕円曲線 (= 1 次元複素トーラス) は, よく知られたワイエルシュトラス (Weierstraß) の方程式により, 射影平面 $\mathbb{P}^2$ 内の 3 次曲線として表されるので ((3) $\Rightarrow$ (4)) アーベル多様体です. またコンパクトリーマン面のヤコビ (Jacobi) 多様体を考えることで (1) $\Rightarrow$ (3) を示すことができて, 4 条件が全て同値ということがわかります. 楕円曲線の複素多様体としての同型類全体の集合は複素平面 $\mathbb{C}$ と同一視されます.

**例 3.3.** 種数が 2 以上のコンパクト・リーマン面 $X$ は上半平面

$$\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) = \frac{1}{2\sqrt{-1}}(z - \bar{z}) > 0\}$$

を普遍被覆空間に持ち, 一般型または双曲型と呼ばれます. また $X$ の自己同型群 $\mathrm{Aut}(X)$ は有限群で, その位数は $84(\boldsymbol{g}(X) - 1)$ 以下になります (フルヴィッツ (Hurwitz) の定理). 非特異平面 $d$ 次曲線 $C$ の種数は $(1/2)(d-1)(d-2)$ に等しく (cf. 5.11), $C$ が一般型 $\Leftrightarrow d \geq 4$ です.

与えらた整数 $g \geq 2$ に対し, 種数 $g$ のコンパクトリーマン面の同型類全体は $3g-3$ 次元の代数多様体の構造を持ちます.

**注 3.4.** 小平次元 $\kappa(X)$ は非特異射影多様体やコンパクト複素多様体の双有理不変量で, 双有理的分類論でもっとも重要な不変量であり, $-\infty$, 0, 1, ..., $\dim X$ のどれかの値をとるのですが, 1 次元の場合は以下のようになっています:

| $\boldsymbol{g}(X)$ | 0 | 1 | $\geq 2$ |
|---|---|---|---|
| $\kappa(X)$ | $-\infty$ | 0 | 1 |

**事実 3.5.** 非特異射影曲線の間の正則写像 $f\colon X \to Y$ が全射なとき, フルヴィッツの公式と呼ばれる等式

$$2\boldsymbol{g}(X) - 2 = (\deg f)(2\boldsymbol{g}(Y) - 2) + \sum\nolimits_{x \in X} (r_x - 1)$$

が成り立ちます. ここで $\deg f$ は $f$ の次数で, $\deg f = \# f^{-1}(y)$ が有限個の例外を除いて $y \in Y$ について成り立ちます. また $r_x$ は点 $x$ における $f$ の分岐指数と呼ばれる整数 $\geq 1$ で, 適当な座標を選ぶと, $f$ は $x$ の近傍では "$r_x$ 乗写像" $\mathbb{C} \ni z \mapsto z^{r_x} \in \mathbb{C}$ と表せます. フルヴィッツの公式は分岐公式 (cf. 5.12) の 1 次元版です.

**注 3.6.** フルヴィッツの公式を全射自己正則写像 $f\colon X \to X$ に適用して, 以下のことがわかります.

(1) もし $\boldsymbol{g}(X) \geq 2$ ならば, $\deg f = 1$, つまり $f$ は同型写像.
(2) もし $\boldsymbol{g}(X) \geq 1$ ならば, $r_x = 1$ が全ての $x \in X$ について成立, つまり $f$ は不分岐.

下記の定理 7.4 はこの性質の 2 次元への一般化を与えています.

## 4. 双有理幾何

射影多様体の分類を考える上でもっとも注意しなければならないことは, 同型でない双有理射 (birational morphism) の存在です. 通常の正則写像と双有理射の逆の合成を有理写像 と呼びますが, 射影多様体と有理写像のなす圏 (category) を考えることができます. その圏について研究するのが双有理幾何です.

**定義.** 射影多様体の正則写像 $\mu\colon X \to Y$ が双有理射 であるとは, $Y$ のザリスキ開集合 $V \neq \emptyset$ が存在して, $\mu$ が誘導する写像 $\mu^{-1}V \to V$ が同型となることです.

**定義 4.1.** 二つの射影多様体 $X$ と $Y$ について, $X$ から $Y$ への有理写像 (または有理型写像) とは, ある射影多様体 $Z$ からの双有理射 $\mu\colon Z \to X$

と正則写像 $g\colon Z \to Y$ のなす対 $(\mu, g)$ の同値類のことで, この有理写像を $f\colon X \dashrightarrow Y$ と表し, $f = g \circ \mu^{-1}$ と書いたりします. ここで $(\mu, g)$ と $(\mu'\colon Z' \to X, g'\colon Z' \to Y)$ が同値であるとは, 別の射影多様体 $Z''$ からの双有理射 $\nu\colon Z'' \to Z$, $\nu'\colon Z'' \to Z'$ が存在して $\mu \circ \nu = \mu' \circ \nu'$ かつ $g \circ \nu = g' \circ \nu'$ となること, つまり

$$
\begin{tikzcd}
& Z \arrow[dl, "\mu"'] \arrow[dr, "g"] & \\
X & Z'' \arrow[u, "\nu"] \arrow[d, "\nu'"'] & Y \\
& Z' \arrow[ul, "\mu'"] \arrow[ur, "g'"'] &
\end{tikzcd}
$$

が可換図式になることです. この $g$ も双有理射となるとき $f$ を双有理写像 (birational map) と呼び, 双有理写像 $X \dashrightarrow Y$ が存在するとき, $X$ と $Y$ は双有理同値であるといいます.

**補足 4.2.** 上の有理写像 $f\colon X \dashrightarrow Y$ に対し, $f$ のグラフ $\Gamma_f \subset X \times Y$ が 正則写像 $Z \ni z \mapsto (\mu(z), g(z)) \in X \times Y$ の像として定義されます. この $\Gamma_f$ も代数多様体であり, $X$, $Y$ への射影 $p_X\colon \Gamma_X \to X$ と $p_Y\colon \Gamma_Y \to Y$ がありますが, $p_X$ は双有理射で, $(\mu, g)$ は $(p_X, p_Y)$ と同値, つまり $f = p_Y \circ (p_X)^{-1}$ と表せます. このとき $X$ のザリスキ開集合 $U$ で $p_X\colon (p_X)^{-1}U \to U$ が同型写像となる最大のものが存在しますが, それを $f$ の定義域と呼び, $\mathrm{Dom}(f)$ と書きます. また $x \in \mathrm{Dom}(f)$ のとき, $f$ は $x$ で定義される といいます. 実際 $U = \mathrm{Dom}(f)$ 上では $f|_U = p_Y \circ (p_X^{-1}|_U)\colon U \to Y$ は正則写像です. また $X$ の空でないザリスキ開集合 $V$ からの正則写像 $\phi\colon V \to Y$ に対し, 有理写像 $f\colon X \dashrightarrow Y$ で $V \subset \mathrm{Dom}(f)$ かつ $f|_V = \phi$ となるものがただ一つ存在します.

**注 4.3.** 射影多様体 $X$ 上の有理函数とは有理写像 $X \dashrightarrow \mathbb{P}^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ のことです (ただし $\infty$ への定数写像は除く). $X$ 上の有理函数の全体のなす集合 $\mathbb{C}(X)$ は $X$ の函数体と呼ばれ, 以下の性質を持ちます.

- $\mathbb{C}(X)$ は $\mathbb{C}$ 上有限生成な体で, その超越次数 $\mathrm{tr.deg}\,\mathbb{C}(X)/\mathbb{C}$ は $X$ の次元に等しい.
- 二つの射影多様体 $X$ と $Y$ の間の双有理射 $\mu\colon X \to Y$ は $\mathbb{C}$ 代数としての同型 $\mu^*\colon \mathbb{C}(Y) \to \mathbb{C}(X)$ を引き起こす.
- 二つの射影多様体 $X$ と $Y$ が双有理同値であるための必要十分条件は函数体 $\mathbb{C}(X)$ と $\mathbb{C}(Y)$ が $\mathbb{C}$ 代数として同型なことである.

**注 4.4.** 射影多様体 $X$ に対し特異点集合 $\mathrm{Sing}\,X$ は代数的真部分集合で, その補集合 (つまり非特異点の全体のなす集合) はザリスキ開集合

となります．このとき非特異射影多様体 $\widetilde{X}$ からの双有理射 $\mu\colon \widetilde{X} \to X$ で同型

$$\widetilde{X} \setminus \mu^{-1} \operatorname{Sing} X \to X \setminus \operatorname{Sing} X$$

を引き起こすものが存在します，これは $X$ の特異点解消と呼ばれ，その存在が広中氏によって証明されたこと (標数 0 の体上定義された代数多様体の場合) は有名です．

非特異射影曲線の間の双有理射 $X \dashrightarrow Y$ は必ず同型写像ですが，2 次元以上ではそうはなりません．とくに双有理射の特殊なものとしてブローアップがありますが，ここではそれを 2 次元の場合に説明します．

**定義 4.5.** 非特異代数曲面 $X$ とその 1 点 $x$ について，以下の性質を持つ正則写像 $\pi\colon \widetilde{X} \to X$ が (同型を除いて) ただ一つ存在し，$X$ の $x$ におけるブローアップと呼ばれます:

- $\widetilde{X}$ も非特異代数曲面で $\pi\colon \widetilde{X} \setminus \pi^{-1}(x) \to X \setminus \{x\}$ は同型．
- $\pi^{-1}(x) \simeq \mathbb{P}^1$．

このときの $\pi^{-1}(x)$ を例外集合または例外因子と呼びます．

**例 4.6.** アフィン平面 $\mathbb{C}^2$ と射影直線 $\mathbb{P}^1$ に対し $\mathbb{C}^2 \times \mathbb{P}^1$ の部分集合

$$S = \{((x,y),(u:v)) \in \mathbb{C}^2 \times \mathbb{P}^1 \mid xv = yu\}$$

を考えます．このとき $S_0 = S \cap \{u \neq 0\}$, $S_1 = S \cap \{v \neq 0\}$ とおくと，$S = S_0 \cup S_1$ であり，同型写像

$$\begin{array}{ccc} S_0 & \xrightarrow{\simeq} & \mathbb{C}^2 \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ ((x,y),(u:v)) & \longmapsto & (x, v/u) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} S_1 & \xrightarrow{\simeq} & \mathbb{C}^2 \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ ((x,y),(u:v)) & \longmapsto & (u/v, y) \end{array}$$

があります．とくに $S$ は非特異代数曲面です．ここで第一射影 $\pi\colon S = \mathbb{C}^2 \times \mathbb{P}^1 \to \mathbb{C}^2$; $((x,y),(u:v)) \mapsto (x,y)$ が $\mathbb{C}^2$ の原点におけるブローアップになります．

**補足 4.7.** 非特異代数曲面 $X$ 内の部分代数曲線 $C$ は $\mathbb{P}^1$ に同型で自己交点数 $C^2 = C \cdot C$ (cf. 5.2) が $-1$ に等しいとき $(-1)$ 曲線と呼ばれます．代数曲線 $C$ が $(-1)$ 曲線であることと，それがある非特異代数曲面 $Y$ についてのブローアップ $X \to Y$ の例外集合と表されることが同値です (カステルヌオーヴォ (Castelnuovo) の縮約定理)．このとき $X \to Y$ を $C$ のブローダウンとか，$C$ の縮約射 (contraction morphism) と言います．また $X$ が射影的ならば，$Y$ も射影的でピカール数について (cf. 5.6) $\boldsymbol{\rho}(X) = \boldsymbol{\rho}(Y) + 1$ という関係が成り立ちます．

**事実 4.8.** 非特異射影曲面の双有理射はブローアップの合成として表されます. つまり任意の双有理射 $X \to Y$ はブローアップの列

$$X = Y_n \xrightarrow{\mu_n} Y_{n-1} \to \cdots \to Y_i \xrightarrow{\mu_i} Y_{i-1} \to \cdots \to Y_0 = Y$$

に分解します (各 $1 \le i \le n$ に対し, $\mu_i$ はある点 $P_{i-1} \in Y_{i-1}$ におけるブローアップとなっています).

## 5. 因子と交点数

非特異射影曲面 $X$ 内の 1 次元部分射影多様体は, 閉集合となる既約な代数曲線ですが, これを素因子と呼び, 有限個の素因子の形式的線型和を因子と呼びます. つまり既約閉曲線 $C_1, \ldots, C_k$ と整数 $a_1, \ldots, a_k$ に対する形式和

$$D = a_1C_1 + a_2C_2 + \cdots + a_kC_k = \sum_{i=1}^{k} a_iC_i$$

が因子です. この和を $D$ の既約分解と呼び, また $a_i \neq 0$ なる $C_i$ を $D$ の既約成分と呼びます. また係数 $a_i$ として有理数, 実数まで許した $D$ をそれぞれ $\mathbb{Q}$ 因子, $\mathbb{R}$ 因子と呼びます. これらと区別するため, 通常の因子を $\mathbb{Z}$ 因子とも言います.

**定義 5.1.** $\mathbb{R}$ 因子 $D = \sum a_iC_i$ について:

(1) 素因子 $C$ が $C_i$ に等しいとき, $\operatorname{mult}_C D := a_i$ と定義し, これを $D$ の $C$ に沿っての重複度と呼びます.
(2) $D$ の台 (support) を

$$\operatorname{Supp} D := \bigcup_{a_i \neq 0} C_i = \bigcup_{\operatorname{mult}_C D \neq 0} C$$

と定義します.
(3) 全ての重複度 $a_i$ が非負なとき, $D$ を有効 (effective) 因子と呼びます.

**事実 5.2.** 二つの因子 $D$, $E$ に対し, 交点数 $D \cdot E$ という整数が定義され以下の性質を満たします.

(1) 交点数は対称かつ双線型, つまり,

$$D \cdot E = E \cdot D, \qquad (D + D') \cdot E = D \cdot E + D' \cdot E$$

が全ての因子 $D$, $D'$,$E$ に対して成り立つ.
(2) 二つの素因子 $A$, $B$ に対し, もし $A \neq B$ ならば

$$A \cdot B = \sum_{P \in A \cap B} I_P(A, B)$$

と書ける. ただし $I_P(A, B)$ は点 $P$ における $A$, $B$ の局所交点数.

**定義** (局所交点数)**.** $P$ における $X$ の局所座標 $(\mathtt{x},\mathtt{y})$ に対し, 曲線 $A$, $B$ の $P$ における局所定義方程式をそれぞれ $f(\mathtt{x},\mathtt{y})=0$, $g(\mathtt{x},\mathtt{y})=0$ とします. つまり, $f$, $g$ は $P$ の近傍 $\mathcal{U}$ で定義された正則函数で,

$$A\cap\mathcal{U}=\{(x,y)\in\mathcal{U}\mid f(x,y)=0\},\quad B\cap\mathcal{U}=\{(x,y)\in\mathcal{U}\mid g(x,y)=0\}$$

と表されるものです. このとき, 収束べき級数環 $\mathbb{C}\{\mathtt{x},\mathtt{y}\}$ 内で $f$, $g$ の生成するイデアル $I_{f,g}$ について, 剰余環 $\mathbb{C}\{\mathtt{x},\mathtt{y}\}/I_{f,g}$ は有限次元 $\mathbb{C}$ ベクトル空間になり, この次元を $I_P(A,B)$ と定義し, $P$ における $A$ と $B$ の局所交点数と呼びます.

**例.** $\mathbb{C}^2$ 内の既約曲線 $\{y=x^2\}$ と $\{y^2=x^3\}$ の原点 $(x,y)=(0,0)$ における局所交点数は 3 です. これは環の同型 $\mathbb{C}[x,y]/(y-x^2,y^2-x^3)\simeq\mathbb{C}[x]/(x^3(x-1))$ からわかります.

また交点数は $\mathbb{Q}$ 因子, $\mathbb{R}$ 因子にも自然に定義されます. このときの交点数はそれぞれ有理数, 実数です. また $D\cdot D$ を $D^2$ と書き, $D$ の自己交点数と呼びます.

**注 5.3.** 有効 $\mathbb{R}$ 因子 $\Delta$ と素因子 $C$ について, もし $\Delta\cdot C<0$ ならば $C$ は $\Delta$ の既約成分で $C^2<0$ です. 実際, $\Delta$ の既約分解を考えると, $a=\mathrm{mult}_C\,\Delta\geq 0$ に対し $\Delta=aC+\Delta'$ と表せる有効 $\mathbb{R}$ 因子 $\Delta'$ で $C$ を既約成分として含まないものが存在します. このとき $aC^2<-\Delta'C\leq 0$ となり (cf. 5.2(2)), $a>0$ と $C^2<0$ が導かれます.

**定義 5.4.** $D$ を $\mathbb{R}$ 因子とします.

(1) $D$ が数値的自明 (numerically trivial) であるとは, $D\cdot C=0$ が全ての素因子 $C$ について成り立つことをいいます. 別の $\mathbb{R}$ 因子 $D'$ に対し, $D-D'$ が数値的自明なとき, $D$ と $D'$ は数値的同値といい, これを $D\approx D'$ で表します.

(2) $D$ がネフ (nef) であるとは, $D\cdot C\geq 0$ が全ての素因子 $C$ について成り立つことをいいます.

(3) $D$ が豊富 (ample) であるとは, $D^2>0$ であって $D\cdot C>0$ が全ての素因子 $C$ について成り立つことをいいます.

豊富性は本来, 射影空間への埋め込みと数値的同値より強い線型同値で説明するのが普通ですが, 以下の事実に留めます.

**事実 5.5.** 非特異射影曲面 $X$ 上の $\mathbb{Z}$ 因子 $D$ に対し, $D$ が豊富であることは, $mD\approx i^*H$ となる整数 $m>0$, 射影空間への埋め込み写像 $i\colon X\hookrightarrow\mathbb{P}^N$, および超平面 $H\subset\mathbb{P}^N$ が存在することと同値です (中井・モイシェゾン (Moishezon) 判定法). ここで, $\iota(X)$ は $\mathbb{P}^N$ の部分代数多

様体で, $X \to \iota(X)$ は代数多様体としての同型写像であり, 超平面 $H$ は $i(X)$ を含まず, 因子 $i^*H$ は $H \cap \iota(X)$ に対応します.

**注.** 任意の $\mathbb{R}$ 因子 $D$ と豊富因子 $H$ に対し, ある実数 $t_0$ があって任意の $t \geq t_0$ に対し $D + tH$ は豊富です. また $D$ がネフならば $D^2 \geq 0$ であり, とくに任意の $t > 0$ に対し $D + tH$ は豊富です. ある意味, ネフ $\mathbb{R}$ 因子は豊富 $\mathbb{R}$ 因子の極限と考えることができます.

**定義 5.6.** 交点数が対称な双線型性をもつので (cf. 5.2(1)), $\mathbb{R}$ 因子の数値的同値関係 $\approx$ による同値類全体は実ベクトル空間 $\mathsf{N}(X)$ を成します. これが 0 ではなく, 有限次元であることが知られていて, その次元を $\boldsymbol{\rho}(X)$ と書き, $X$ のピカール数と呼びます.

**例 5.7.** 射影平面 $\mathbb{P}^2$ のピカール数は 1 で, ベクトル空間 $\mathsf{N}(\mathbb{P}^2)$ は平面直線 $\ell$ の数値的同値類によって生成されます. また整数 $d > 0$ に対し, 平面 $d$ 次曲線 $C \subset \mathbb{P}^2$ は $d\ell$ と数値的同値です. とくに $C \cdot \ell = d$ であり, 別の平面 $d'$ 次曲線 $C'$ に対して $C \cdot C' = dd'$ となります (ベズー (Bézout) の定理).

**事実 5.8** (引き戻しと押し出し)**.** 別の非特異射影曲面 $Y$ へ正則写像 $f\colon X \to Y$ があり, これが全射であると仮定します. このとき $Y$ 上の因子 $E$ の引き戻し (pull-back) $f^*E$ が $X$ 上の因子として定義され, $X$ 上の因子 $D$ の押し出し (push-forward) $f_*D$ が $Y$ 上の因子として定義され, 以下の条件 (1)–(5) を満たします. ただしここで, $E$, $E'$ は $Y$ 上の任意の因子, $D$, $D'$ は $X$ 上の任意の因子です:

(1) $f^*$, $f_*$ は準同型, つまり $f^*(E+E') = f^*E+f^*E'$ と $f_*(D+D') = f_*D + f_*D'$ が成り立つ.

(2) $E$ が有効ならば $f^*E$ も有効で $\operatorname{Supp} f^*E = f^{-1} \operatorname{Supp} E$ (cf. 5.1(2)).

(3) $D$ が素因子の場合, $f(D)$ が 1 点のときは $f_*D = 0$ であり, そうでないときは $f(D)$ は素因子であり, ある整数 $a_D > 0$ に対して $f_*D = a_D f(D)$ と書ける.

(4) 次の射影公式 (projection formula) と呼ばれる等式がなりたつ:

$$(f^*E) \cdot D = E \cdot f_*D.$$

(5) 等式 $(f^*E) \cdot f^*E' = (\deg f) E \cdot E'$ が成立. 特に

$$f_*(f^*E) = (\deg f)E.$$

**注.** (5) の $\deg f$ は $f$ の次数と呼ばれ, $f$ による体拡大 $\mathbb{C}(Y) \hookrightarrow \mathbb{C}(X)$ の拡大次数に等しく, 空でないザリスキ開集合 $V \subset Y$ が存在して, 全

ての点 $y \in V$ に対し, $\deg f = \# f^{-1}(y)$ となっています. また (3) の $a_D$ は $f|_D \colon D \to f(D)$ の次数 $\deg f|_D$ に一致します.

**注.** 引き戻し $f^*$ と押し出し $f_*$ はその線型性 (1) により $\mathbb{Q}$ 因子や $\mathbb{R}$ 因子にも定義され, この場合にも (4), (5) の等式が成立します.

**補題 5.9.** 事実 5.8 の状況の下で以下の (1)–(3) が成立する. ただし $E$, $D$ は $\mathbb{R}$ 因子でもよい.

(1) $E$ がネフ $\Leftrightarrow$ $f^*E$ がネフ.
(2) $D$ がネフ $\Leftrightarrow$ $f_*D$ がネフ.
(3) $f^*E$ が豊富 $\Leftrightarrow$ $f$ は有限写像で $E$ は豊富.

(ここで $f$ が有限写像というのは, 任意の $y \in Y$ に対し, 逆像 $f^{-1}(y)$ が有限集合になることを言います.)

証明. $X$ 上の任意の素因子 $\Theta$ と $Y$ 上の任意の素因子 $\Gamma$ に対し, $f_*\Theta$ と $f^*\Gamma$ は有効因子なので, 射影公式より

(i) $(f^*E) \cdot \Theta = E \cdot f_*\Theta \geq 0, \qquad \Gamma \cdot f_*D = (f^*\Gamma) \cdot D \geq 0.$

また, $f$ が全射なので,

(ii) 任意の素因子 $\Gamma \subset Y$ に対し $f(\Theta) = \Gamma$ となる素因子 $\Theta$ が存在する.

これらから (1) と (2) が示せます. 主張 (3) において, まず $f$ が有限写像で $E$ が豊富と仮定します. すると任意の素因子 $\Theta \subset X$ に対し, $f(\Theta)$ もまた素因子で, $(f^*E) \cdot \Theta > 0$ が成り立ち (cf. (i)), 一方 $(f^*E)^2 = (\deg f)E^2 > 0$ なので $f^*E$ は豊富です. 次に $f^*E$ が豊富と仮定します. すると (i) より任意の素因子 $\Theta$ に対し $E \cdot f_*\Theta > 0$ なので $f(\Theta)$ が 1 点とはならず, $f$ は有限写像です. また (ii) より任意の素因子 $\Gamma \subset Y$ に対し $E \cdot \Gamma > 0$ です. さらに $E^2 > 0$ が $(f^*E)^2 = (\deg f)E^2$ からわかるので, $E$ は豊富です. これで (3) も示せました. □

非特異代数曲面 $X$ には標準因子とよばれる因子 $K_X$ が定義されます. これは 2 次有理型微分形式に付随する因子のことですが, 詳しい説明を省いて, いくつかの性質を解説します.

**事実 5.10** (添加公式)**.** 任意の既約曲線 $C$ に対して

$$(K_X + C) \cdot C = 2\,\boldsymbol{p_a}(C) - 2$$

が成りたちます. ただし $\boldsymbol{p_a}(C) = \dim H^1(C, \mathcal{O}_C)$ は $C$ の算術種数 (arithmetic genus) です. なお特異点解消 $\widetilde{C} \to C$ に対し, $\boldsymbol{g}(\widetilde{C}) \leq \boldsymbol{p_a}(C)$ であり, ここで等号成立 $\Leftrightarrow$ $C$ は非特異.

**例.** $(-1)$ 曲線 (cf. 4.7) は $K_X \cdot C = C^2 = -1$ を満たす既約曲線 $C$ としても特徴づけられます.

**例 5.11.** 射影平面 $\mathbb{P}^2$ の標準因子 $K_{\mathbb{P}^2}$ については, 平面直線 $\ell$ に対して $K_{\mathbb{P}^2} \approx -3\ell$ となります. 実際, 例 5.7 により, $K_{\mathbb{P}^2} \approx a\ell$ なる実数 $a$ があって, さらに $K_{\mathbb{P}^2} \cdot \ell = a$ となりますが, $\ell \simeq \mathbb{P}^1$ についての添加公式

$$a + 1 = (K_{\mathbb{P}^2} + \ell) \cdot \ell = 2\,\boldsymbol{p_a}(\ell) - 2 = -2$$

より, $a = -3$ です. また非特異平面 $d$ 次曲線 $C$ の種数 $\boldsymbol{g}(C) = \boldsymbol{p_a}(C)$ が $(1/2)(d-1)(d-2)$ に等しいことが添加公式

$$(-3 + d)d = (K_{\mathbb{P}^2} + C) \cdot C = 2\,\boldsymbol{p_a}(C) - 2$$

から示せます.

**事実 5.12** (分岐因子)**.** 別の非特異射影曲面 $Y$ への正則写像 $f\colon X \to Y$ があり, これが全射であると仮定します. このとき $f$ の分岐因子と呼ばれる有効因子 $R_f$ が存在し, 分岐公式と呼ばれる等式

$$K_X = f^* K_Y + R_f$$

が成り立ち, $X$ 上の任意の素因子 $\Gamma$ に対し, 以下の性質を満たします.

(1) 像 $C = f(\Gamma)$ が 1 点でないとき, $C$ もまた素因子であって, $\operatorname{mult}_\Gamma R_f = \operatorname{mult}_\Gamma f^*C - 1$.
(2) 像 $f(\Gamma)$ が 1 点のとき, $\operatorname{mult}_\Gamma R_f > 0$.

また $f\colon X \setminus \operatorname{Supp} R_f \to Y$ は局所同型写像になります. つまり, 任意の $x \in X \setminus \operatorname{Supp} R_f$ に対し $x$ の開近傍 $\mathcal{U}$ と $f(x)$ の開近傍 $\mathcal{V}$ が存在して, $f$ は同型写像 $\mathcal{U} \xrightarrow{\simeq} \mathcal{V}$ を誘導します.

**注.** 上記の $R_f$ が 0 のとき, $f$ は有限次不分岐被覆 (cf. 6.4) となります.

**注.** 分岐公式により小平次元が双有理不変量であることがわかります. つまり $X$ と $X'$ が双有理同値ならば $\kappa(X) = \kappa(X')$.

## 6. 代数曲面の分類

非特異射影曲面の双有理的分類について解説します.

**定義 6.1.** 非特異射影曲面 $X$ が相対的極小とは, $X$ から非特異射影曲面への双有理射 $f\colon X \to Y$ が全て同型写像となることを言います. また $X$ が極小とは, 非特異射影曲面からの双有理写像 $g\colon Z \dashrightarrow X$ が全て正則写像 $(Z = \operatorname{Dom}(g))$ となることを言います (cf. 4.2).

**注.** 定義より, 極小ならば相対的極小です. 補足 4.7 より $X$ が相対的極小ということは $X$ が $(-1)$ 曲線を含まないことと同値です. また $(-1)$ 曲線のブローダウンを次々に考えることで, 与えられた非特異射影曲面 $X$ から相対的極小曲面 $Y$ への双有理射 $X \to Y$ ができます. したがって代数曲面の双有理的分類は相対的極小曲面の分類に帰着されます.

**注 6.2.** 非特異射影曲面 $X$ について, 小平次元 $\kappa(X)$ が非負ならば, $K_X \approx \Delta$ となる有効 $\mathbb{Q}$ 因子 $\Delta$ が存在します. したがってこの場合 $K_X \cdot C < 0$ なる素因子 $C$ は $\Delta$ の既約成分であり, $C^2 < 0$ となるので (cf. 5.3), 添加公式 (cf. (5.10)) より $C$ は $(-1)$ 曲線です. このことから, $\kappa(X) \geq 0$ となる相対的極小曲面 $X$ に対し, $K_X$ はネフです.

**事実 6.3.** 非特異射影曲面 $X$ に対し, 次の三条件は同値ということが知られています:

(1) $X$ は極小.
(2) $X$ が相対的極小で $\kappa(X) \geq 0$.
(3) $K_X$ がネフ.

特に $K_X$ がネフならば $\kappa(X) \geq 0$ という部分は, 3 次元以上の代数多様体についても同様の性質が成り立つことが期待され, アバンダンス (abundance) 予想と呼ばれています. 極小曲面 $X$ の小平次元は次のように特徴付けられます:

- $\kappa(X) = 0 \Leftrightarrow K_X \approx 0$.
- $\kappa(X) = 1 \Leftrightarrow (K_X)^2 = 0$ かつ $K_X \not\approx 0$.
- $\kappa(X) = 2 \Leftrightarrow (K_X)^2 > 0$.

ここで複素解析的ファイバー束 (fiber bundle) と関連する写像について説明します.

**定義 6.4.** 複素多様体 $Y$ と $F$ を考えます. 直積 $F \times Y$ としての複素多様体またはその射影 $p_Y \colon F \times Y \to Y$ を $Y$ 上 $F$ をファイバーとする自明なファイバー束と呼びます. 一般に $F$ をファイバーとする $Y$ 上のファイバー束とは, 複素多様体 $X$ からの正則写像 $\pi \colon X \to Y$ で $Y$ 上局所的に自明なファイバー束となるもののことです: 正確に言うと, 以下の二条件を満たす $Y$ の開集合族 $\{Y_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ があるということです.

- $Y = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} Y_\lambda$, つまり $\{Y_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ は $Y$ の開被覆.
- 任意の $\lambda \in \Lambda$ に対し, 同型写像

$$\theta_\lambda \colon \pi^{-1}(Y_\lambda) \xrightarrow{\simeq} F \times Y_\lambda$$

であって $\pi \colon \pi^{-1}(Y_\lambda) \to Y_\lambda$ が合成写像

$$p_{Y_\lambda} \circ \theta_\lambda \colon \pi^{-1}(Y_\lambda) \to F \times Y_\lambda \to Y_\lambda$$

に一致するものが存在する.

ファイバー $F$ として射影直線 $\mathbb{P}^1$ をとったとき, この複素解析的ファイバー束を $\mathbb{P}^1$ 束と呼びます. また $F$ として離散集合 (集合に離散位相を入れたもの) をとったときのファイバー束を不分岐被覆写像と呼び, この $F$ が有限集合のときは, 有限次不分岐被覆写像と呼びます.

分類結果を説明する前に, いくつかの代数曲面の定義をします.

**定義 6.5.** $X$ を非特異射影曲面とします.

(1) $X$ が $\mathbb{P}^2$ と双有理同値なとき (cf. 4.1), $X$ を有理曲面 (rational surface), そうでないとき, $X$ を非有理曲面と呼びます.
(2) $\kappa(X) = 2$ のとき, $X$ を一般型曲面と呼びます (cf. 3.3).
(3) 2 次元アーベル多様体をアーベル曲面と呼びます (cf. 3.2). アーベル曲面 $A$ からの有限次不分岐被覆写像 $A \to X$ が存在するとき, もし $X$ がアーベル曲面でなければ, $X$ を超楕円曲面 (hyperelliptic surface) と呼びます.
(4) $X$ が単連結で $K_X \approx 0$ となるとき, $X$ を K3 曲面と呼びます. また $X$ は単連結ではないが, その普遍被覆空間が K3 曲面のとき, $X$ をエンリケス (Enriques) 曲面と呼びます.
(5) $X$ が非特異射影曲線上の $\mathbb{P}^1$ 束の構造をもつとき, $X$ を幾何的線織曲面 (geometrically ruled surface) と呼びます. そして幾何的線織曲面と双有理同値な射影曲面を線織曲面 (ruled surface) と呼びます.
(6) 整数 $e \geq 0$ に対し, $\mathbb{P}^1$ 上の $\mathbb{P}^1$ 束であって $\Theta^2 = -e$ となる大域切断 $\Theta$ を持つ曲面は同型を除いて一つに定まります. これを $\mathbb{F}_e$ と書いて $e$ 次のヒルツェブルフ (Hirzebruch) 曲面 と呼びます.
(7) $X$ から非特異射影曲線 $T$ への正則写像 $\phi\colon X \to T$ でその一般ファイバー $\phi^{-1}(t)$ が楕円曲線となるものが存在するとき, $X$ を楕円曲面 (elliptic surface) と呼びます.

**注.** 正則写像 $\pi\colon X \to Y$ の大域切断 (global section) とは $\pi|_Z\colon Z \to Y$ が同型写像となる部分多様体 $Z \subset X$ のことを言います. また $\pi$ の一般ファイバー とは, ある空でないザリスキ開集合 $U \subset Y$ 内の点 $y$ 上のファイバー $\pi^{-1}(y)$ のことを言います.

次の定理が代数曲面の双有理的分類を与えます.

**定理 6.6.** 非特異射影曲面 $X$ が相対的極小と仮定する.

(1) $\kappa(X) = 0$ ならば, $X$ はアーベル曲面, 超楕円曲面, K3 曲面, エンリケス曲面のいずれかである.

(2) $\kappa(X)=1$ ならば, $X$ は楕円曲面である.
(3) $\kappa(X)=-\infty$ のとき, $X$ が非有理曲面ならば, $X$ は幾何的線織曲面である.
(4) $X$ が有理曲面のとき, $\kappa(X)=-\infty$ だが, $X$ は射影平面 $\mathbb{P}^2$ またはヒルツェブルフ曲面 $\mathbb{F}_e$ (ただし $e\neq 1$) と同型.

**注.** $\kappa(X)=1$ となる必ずしも極小でない曲面 $X$ も楕円曲面であり, 超楕円曲面, エンリケス曲面と双有理同値な曲面も楕円曲面です. 楕円曲面の構造は小平氏の理論で解明されています (cf. [10, II, III], [11, I]).

**系 6.7.** 射影曲面の双有理同値類の分類は表 1 のようになる. ただし $\kappa(X)$ は小平次元, $\boldsymbol{q}(X)$ は不正則数, $\boldsymbol{p_g}(X)$ は幾何種数を表す (cf. 6.8).

表 1. 代数曲面の分類

| $\kappa(X)$ | $\boldsymbol{q}(X)$ | $\boldsymbol{p_g}(X)$ | 構造 |
|---|---|---|---|
| $-\infty$ | 0 | 0 | 有理曲面 |
| | $>0$ | 0 | 非有理線織曲面 |
| 0 | 0 | 0 | エンリケス曲面と双有理同値 |
| | 0 | 1 | K3 曲面と双有理同値 |
| | 1 | 0 | 超楕円曲面と双有理同値 |
| | 2 | 1 | アーベル曲面と双有理同値 |
| 1 | | | 楕円曲面 |
| 2 | | | 一般型曲面 |

**注.** 定理 6.6 と系 6.7 はエンリケスの定理としてよく知られています (cf. [3]). 小平氏はこの分類を 2 次元コンパクト複素多様体の場合にまで拡張しました (cf. [10], [11]).

**定義 6.8.** コンパクト複素多様体 $X$ に対し $i$ 次ベッチ (Betti) 数 $\boldsymbol{B}_i(X)$ (ただし $i\geq 0$) とオイラー (Euler) 数 $\boldsymbol{e}(X)$ は

$$\boldsymbol{B}_i(X)=\dim H_i(X,\mathbb{R}),\qquad \boldsymbol{e}(X)=\sum\nolimits_{i=0}^{\infty}(-1)^i\boldsymbol{B}_i(X)$$

として定義される整数です. またオイラー標数 $\chi(X,\mathcal{O}_X)$ が

$$\chi(X,\mathcal{O}_X)=\sum\nolimits_{i=0}^{\infty}(-1)^i\dim H^i(X,\mathcal{O}_X)$$

で定義されます. ただし $n=\dim X$ について, $i>2n$ ならば $\boldsymbol{B}_i(X)=0$, $j>n$ ならば $H^j(X,\mathcal{O}_X)=0$ です. また $\boldsymbol{q}(X):=\dim H^1(X,\mathcal{O}_X)$, $\boldsymbol{p_g}(X):=\dim H^n(X,\mathcal{O}_X)$ をそれぞれ不正則数, 幾何種数と呼びます.

**例 6.9.** 非有理線織曲面 $X$ に対し, 定理 6.6(3) より, 幾何的線織曲面 $Y$ へ双有理射と非有理非特異曲線 $T$ 上の $\mathbb{P}^1$ 束 $Y \to T$ が存在します. このとき $\boldsymbol{q}(X) = \boldsymbol{q}(Y) = \boldsymbol{g}(T) > 0$ です. またこのとき合成写像 $X \to Y \to T$ はアルバネーゼ (Albanese) 写像 $X \to \mathrm{Alb}(X)$ から誘導されます.

**事実 6.10.** 非特異射影曲面 $X$ については以下の事柄が知られています.

(1) 不正則数 $\boldsymbol{q}(X)$, 幾何種数 $\boldsymbol{p_g}(X)$, オイラー標数 $\chi(X, \mathcal{O}_X) = 1 - \boldsymbol{q}(X) + \boldsymbol{p_g}(X)$ はみな双有理不変量.

(2) $\boldsymbol{B}_1(X) = \boldsymbol{B}_3(X) = 2\boldsymbol{q}(X)$. とくに $\boldsymbol{e}(X) = 2 - 4\boldsymbol{q}(X) + \boldsymbol{B}_2(X)$.

(3) 有限次不分岐被覆写像 $\tau\colon Y \to X$ に対し,

$$\boldsymbol{e}(Y) = (\deg \tau)\boldsymbol{e}(X), \qquad \chi(Y, \mathcal{O}_Y) = (\deg \tau)\chi(X, \mathcal{O}_X).$$

なお $\deg \tau$ はファイバー $\tau^{-1}(x)$ の元の個数 $\#\tau^{-1}(x)$.

(4) $X$ の一点におけるブローアップ $Y \to X$ に対し,

$$\boldsymbol{B}_2(Y) = \boldsymbol{B}_2(X) + 1, \quad \boldsymbol{e}(Y) = \boldsymbol{e}(X) + 1, \quad (K_Y)^2 = (K_X)^2 - 1$$

が成り立つ.

**命題 6.11.** 非特異射影曲面 $X$ に対し, もし $\kappa(X) \geq 0$ ならば $\boldsymbol{e}(X) \geq 0$ である. ここで $\boldsymbol{e}(X) = 0$ ならば $X$ は極小曲面で次が成り立つ:

(1) $\kappa(X) < 2$.

(2) $\kappa(X) = 0$ ならば, $X$ はアーベル曲面かまたは超楕円曲面である.

(3) $\kappa(X) = 1$ ならば楕円曲線 $C$, 種数 2 以上の非特異射影曲線 $T$, および有限次不分岐被覆写像 $C \times T \to X$ が存在する.

略証. $\boldsymbol{e}(X) \geq 0$ を示すためには $X$ を極小と仮定して構いません (cf. 4.7, 6.3, 6.10(4)). さらに $\kappa(X) = 2$ ならば $\boldsymbol{e}(X) > 0$ です: これは一般型代数曲面についての宮岡・Yau の不等式

$$3\boldsymbol{e}(X) \geq (K_X)^2$$

と $(K_X)^2 > 0$ (cf. 6.3) からわかります. また $\kappa(X) = 0$ ならば $\boldsymbol{e}(X) \geq 0$ となり, さらに (2) が成り立つことが定理 6.6(1) と表 1 およびネーター (Noether) の公式

$$\chi(X, \mathcal{O}_X) = \frac{1}{12}((K_X)^2 + \boldsymbol{e}(X))$$

などからわかります. したがって証明は $\kappa(X) = 1$ となる極小曲面 $X$ の場合に帰着されます. このとき不等式 $\boldsymbol{e}(X) \geq 0$ は楕円曲面の特異ファイバーのオイラー数が非負ということなどから示せます. また (3) ですがこれも楕円曲面についての小平理論から示すことができます. □

## 7. 自己正則写像

代数多様体 $X$ の自己正則写像とは正則写像 $f\colon X\to X$ のことです. 次の定理の概説を行うのが本講義の目的です.

**定理 7.1.** 非特異射影曲面 $X$ が全射かつ非同型な自己正則写像 $f\colon X\to X$ を持つための必要十分条件は, 以下のいずれかが成り立つことである:

(1) ある楕円曲線 $C$ と種数 2 以上の非特異射影曲線 $T$ および有限次不分岐被覆写像 $C\times T\to X$ が存在する.
(2) アーベル曲面 $A$ と有限次不分岐被覆写像 $A\to X$ が存在する.
(3) 種数 2 以上の非特異射影曲線 $T$ および有限次不分岐被覆写像 $\mathbb{P}^1\times T\to X$ が存在する.
(4) $X$ はある楕円曲線上の $\mathbb{P}^1$ 束と同型.
(5) $X$ はトーリック曲面.

なおトーリック曲面とは 2 次元トーリック多様体のことです. トーリック多様体の理論について [14] は最も有名な教科書の一つです. 定理 7.1 の証明ですが, 簡単のため, ここでは必要性, つまり $f\colon X\to X$ の存在を仮定して (1)–(5) のどれかが成り立つこと, についてのみ解説します.

**注 7.2.** 十分性は以下の自己正則写像についての性質や群のコホモロジー論などをつかって示すことができます.

(1) 射影空間 $\mathbb{P}^n$ とその斉次座標 $(x_0:x_1:\cdots:x_n)$, および整数 $k\geq 1$ に対し, $(x_0:x_1:\cdots:x_n)\mapsto(x_0^k:x_1^k:\cdots:x_n^k)$ は次数 $k^n$ の自己正則写像 $\mathbb{P}^n\to\mathbb{P}^n$ を与えます.
(2) $n$ 次元アーベル多様体 $A$ には, そのリー群としての構造より, 整数 $k>1$ に対し $k$ 倍写像 $\mu_k\colon A\to A$ が $\mu_k(z)=kz=z+\cdots+z$ として定義されますが, これは全射自己正則写像でその次数は $k^{2n}$ となります.
(3) 多様体 $Y$ が非同型全射自己正則写像 $g\colon Y\to Y$ をもてば, 任意の多様体 $Z$ と恒等写像 $\mathrm{id}_Z\colon Z\to Z$ に対し, $g\times\mathrm{id}_Z\colon Y\times Z\to Y\times Z$ も非同型全射自己正則写像です.
(4) 多様体のガロア (Galois) 被覆 $\tau\colon X\to Y$ と非同型全射自己正則写像 $f\colon X\to X$ に対し, もし ガロア群 $\Gamma$ について $f$ が $\Gamma$ 同変ならば, つまり $f(\gamma\cdot x)=\gamma\cdot f(x)$ が全ての $\gamma\in\Gamma$ と $x\in X$ について成り立つならば, 非同型全射自己正則写像 $g\colon Y\to Y$ で $\tau\circ f=g\circ\tau$ となるものが存在します.

定理 7.1 の $f$ に関し, 以下の補題が成り立つことに注意します.

**補題 7.3.** $f$ は有限写像. つまり任意の点 $x$ の逆像 $f^{-1}(x)$ は有限集合.

証明. $\mathbb{R}$ 因子の押し出し $f_*$ は有限次元ベクトル空間の全射 $\mathsf{N}(X) \to \mathsf{N}(X)$ を引き起こすので (cf. 5.6), これは全単射です. 射影公式 (cf. 5.8(4)) より, 引き戻し $f^*$ の誘導する写像 $\mathsf{N}(X) \to \mathsf{N}(X)$ も全単射になり, 豊富因子 $A$ に対し, $A = f^*H$ となる $\mathbb{R}$ 因子 $H$ が存在します. したがって補題 5.9(3) より $f$ は有限写像です. □

以下 §7 では非特異射影曲面 $X$ と非同型な全射自己正則写像 $f\colon X \to X$ を固定して考察します. §7.1 では $\kappa(X) \geq 0$ の場合の $X$ の構造について, §7.2 では $C^2 < 0$ となる $X$ 上の既約曲線 $C$ たちについての結果を述べ, §7.3 で $X$ が非有理線織曲面のとき, §7.4 で $X$ が有理曲面の場合を扱います. これらの結果から定理 7.1 の必要性の部分の証明が得られます. なお整数 $k \geq 1$ に対し $f\colon X \to X$ の "$k$ 乗" $f^k = f \circ f \circ \cdots \circ f\colon X \to X$ を $f^1 := f$, $f^2 := f \circ f$, $f^{k+1} := f \circ f^k$ と帰納的に定義します.

## 7.1. 小平次元が非負の場合.

**定理 7.4.** $\kappa(X) \geq 0$ のとき $f$ は不分岐, $X$ は極小曲面で $\kappa(X) < 2$, $\boldsymbol{e}(X) = 0$ が成り立つ.

証明. 豊富な $\mathbb{Z}$ 因子 $H$ を一つ選びます. $\kappa(X) \geq 0$ なので, $H \cdot K_X \geq 0$ です (cf. 6.2). 分岐公式 $K_X = f^*K_X + R_f$ (cf. 5.12) を考えると, 合成 $f^2 = f \circ f\colon X \to X$ について

$$K_X = f^*K_X + R_f = f^*(f^*K_X + R_f) + R_f = (f^2)^*K_X + f^*R_f + R_f$$

となるので, $R_{f^2} = f^*R_f + R_f$ が成立. さらに整数 $k \geq 2$ について

$$K_X = f^*K_X + R_f = f^*((f^{k-1})^*K_X + R_{f^{k-1}}) + R_f$$

なので, 帰納法より

$$R_{f^k} = R_f + f^*R_f + (f^2)^*R_f + \cdots + (f^{k-1})^*R_f.$$

ここで $H$ との交点数を考えると, もし $R_f \neq 0$ ならば, 任意の $0 \leq i \leq k-1$ に対し $(f^i)^*R_f$ も 0 でない有効因子なので,

$$H \cdot R_{f^k} = H \cdot f^*R_f + \cdots + H \cdot (f^{k-1})^*R_f \geq k$$

となります. しかしこの場合, 任意の整数 $k > 0$ に対し

$$H \cdot K_X = H \cdot (f^k)^*K_X + H \cdot R_{f^k} \geq k$$

となるので, $H \cdot K_X$ が無限大になってしまい, 矛盾. ゆえに $R_f = 0$ であり, これは $f$ が不分岐なことを意味します. すると, 事実 6.10(3)

から $\boldsymbol{e}(X) = (\deg f)\boldsymbol{e}(X)$ と $(K_X)^2 = (\deg f)(K_X)^2$ がわかるので, $\deg f > 1$ より $\boldsymbol{e}(X) = (K_X)^2 = 0$ です. □

**注.** 3次元以上の非特異射影多様体 $X$ についても, もし非同型な全射自己正則写像 $f\colon X \to X$ が存在すれば, $f$ は不分岐であり $\kappa(X) < \dim X$ となることは知られていて, このことは開代数多様体の場合にまで拡張されています (cf. [7, Theorems 11.6, 11.7]).

定理 6.6 と 7.4 を合わせて次の結果が得られます.

**系 7.5** (cf. [4, Theorem 3.2])**.** $\kappa(X) = 0$ ならば, $X$ はアーベル曲面または超楕円曲面である. $\kappa(X) > 0$ ならば, $\kappa(X) = 1$ であり, さらにある楕円曲線 $C$ と種数 2 以上の非特異曲線 $T$, および不分岐被覆写像 $C \times T \to X$ が存在する.

7.2. **負曲線.** 自己交点数が負となる素因子を負曲線 (negative curve) と呼びます.

**命題 7.6.** $X$ 上には高々有限個の負曲線しか存在しない.

証明. 三つのステップで証明します. また $X$ 上の負曲線すべてからなる集合を $\mathcal{S}(X)$ と書くことにします.

ステップ 1. $C \in \mathcal{S}(X)$ ならば $f(C) \in \mathcal{S}(X)$ であり $f^*(f(C)) = bC$ となる整数 $b > 0$ が存在することを示します (とくに $C \mapsto f(C)$ は全単射 $\mathcal{S}(X) \to \mathcal{S}(X)$ を誘導します). この主張の証明ですが, まず $f|_C\colon C \to f(C)$ の次数 $a$ に対し, $f_*C = af(C)$ となることに注意します (cf. 5.8(3)). もし別の素因子 $C'$ について, $f(C') = f(C)$ ならば $f_*C' = a'f(C)$ なる整数 $a' > 0$ があるので, $C' - (a'/a)C$ の $f_*$ による像は 0 です. いま $f_*\colon \mathsf{N}(X) \to \mathsf{N}(X)$ は同型写像なので, $C' \approx (a'/a)C$. とくに $C' \cdot C = (a'/a)C^2 < 0$ なので, $C' = C$ です (cf. 5.2(2)). これより $f^{-1}(f(C)) = C$ がわかり, $f^*(f(C)) = bC$ となる整数 $b > 0$ が存在します (cf. 5.8(2)). したがって $(f^*(f(C)))^2 = (\deg f)f(C)^2 = b^2C^2 < 0$ より, $f(C) \in \mathcal{S}(X)$ です. なお $ab = \deg f$ です (cf. 5.8(5)).

ステップ 2. 分岐因子 $R_f$ の既約成分で負曲線になるものすべてのなす集合を $\mathcal{S}_0(X)$ と書くことにします. 任意の $C \in \mathcal{S}(X)$ に対し, ある整数 $m > 0$ が存在して $f^m(C) \in \mathcal{S}_0(X)$ となることを示します. 像 $f(C)$ を $C_1$ と書くと, ステップ 1 のように $f^*C_1 = bC$ となる整数 $b > 0$ が存在します. ここで $b > 1$ ということが $C$ が $R_f$ の既約成分であることに他なりません (cf. 5.12(1)). もし $b = 1$ ならば $f^*C_1 = C$ より $(\deg f)C_1^2 = C^2$ です. 整数 $C^2$ が $(\deg f)^k$ で割り切れるような $k$ は

高々有限個しかないので, ある整数 $m > 1$ があって $f^m(C) \in \mathcal{S}_0(X)$ となります.

ステップ 3. 最後に $\mathcal{S}(X)$ が有限集合であることを示します. これはステップ 1 と 2 より以下の補題に帰着されます (その証明は演習問題とします).

補題. 集合 $\mathcal{S}$ とその有限部分集合 $\mathcal{S}_0$ に対し, ある単射 $h\colon \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ が存在して,

$$\mathcal{S} = \bigcup\nolimits_{m>0} (h^m)^{-1}(\mathcal{S}_0)$$

となるとき, $\mathcal{S}$ は有限集合である.

これで命題 7.6 が証明できました. □

上の証明から次がわかります.

**系 7.7.** もし $X$ が負曲線を含めば, ある整数 $k > 0$ が存在して, $\deg f^k = (\deg f)^k$ は平方数であり, $(f^k)^*C = bC$ がすべての負曲線 $C$ と正の平方根 $b = (\deg f^k)^{1/2}$ 対して成り立つ.

**命題 7.8.** $X$ 上の負曲線全ての合併集合を $N_X$ とおく. つまり負曲線すべてのなす集合 $\mathcal{S}(X)$ に対し,

$$N_X := \bigcup\nolimits_{C \in \mathcal{S}(X)} C.$$

もし $N_X \neq \emptyset$ ならば $N_X$ の連結成分は次のいずれかになる.

(A) 算術種数 $\boldsymbol{p_a}(C) = \dim H^1(C, \mathcal{O}_C)$ が 1 以下の既約曲線 $C$.

(B) $\mathbb{P}^1$ の<u>線型鎖</u>: $N_X = C_1 \cup \cdots \cup C_l$ と $l \geq 2$ 個の非特異有理曲線 $C_1, \ldots, C_l$ で表示され, 任意の $1 \leq i < j \leq l$ に対し,

$$C_i \cdot C_j = \begin{cases} 1, & j = i+1 \quad \text{のとき,} \\ 0, & j > i+1 \quad \text{のとき.} \end{cases}$$

(C) $\mathbb{P}^1$ の<u>輪環鎖</u>: $N_X = C_1 \cup \cdots \cup C_l$ と $l \geq 2$ 個の非特異有理曲線 $C_1, \ldots, C_l$ で表示され, もし $l = 2$ ならば $C_1 \cdot C_2 = \# C_1 \cap C_2 = 2$ であり, もし $l > 2$ ならば, 任意の $1 \leq i < j \leq l$ に対し,

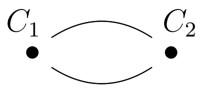
$$C_i \cdot C_j = \begin{cases} 1, & j \equiv i+1 \bmod l \quad \text{のとき} \\ 0, & \text{その他.} \end{cases}$$

**注.** 等式 $C_i \cdot C_j = 1$ は $C_i \cap C_j$ が一点からなる集合で, その点で $C_i$ と $C_j$ は横断的に交わっていることを意味します. また上の (C) で $l = 2$ の場合は, $C_1 \cap C_2$ は二点からなる集合で, そのどちらの点にお

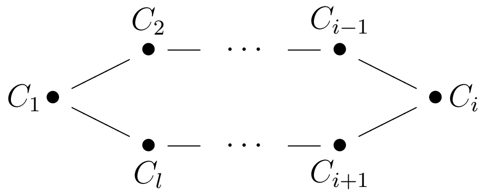
いても $C_1$ と $C_2$ は横断的に交わっていることを意味します. 既約成分 $C_i$ を頂点(vertex), $C_i$ と $C_j$ の交点を辺 (edge)とすることで $N_X$ の双対 (dual) グラフ が考えられます. 上の (B) のときの $N_X$ の双対グラフは

$$\begin{array}{ccccccc} C_1 & & C_2 & & & & C_l \\ \bullet & \text{---} & \bullet & \text{---} & \cdots & \text{---} & \bullet \end{array}$$

と書けます. また (C) のときの $N_X$ の双対グラフは, $l = 2$ のときは




と書け, $l > 2$ のときは




のようになります.

命題 7.8 は, 因子の交点数の理論, $\mathbb{P}^1 \setminus \{1\,点\}$ の単連結性, 添加公式 $(K_X + C) \cdot C = 2\boldsymbol{p_a}(C) - 2$ (cf. 5.10), さらに分岐公式 $K_X = f^* K_X + R_f$ (cf. 5.12) の曲線 $C$ への制限, などの議論を経て証明されます.

7.3. **非有理線織面の場合.** ここでは $\kappa(X) = -\infty$ かつ $\boldsymbol{q}(X) > 0$ の場合を扱います. 次の結果は, 瀬上誠氏により証明されましたが [15], ここでは負曲線を使って示します.

**定理 7.9.** $\kappa(X) = -\infty$ かつ $\boldsymbol{q}(X) > 0$ ならば $X$ は幾何的線織曲面であり, さらに $\boldsymbol{q}(X) \geq 2$ ならば $X$ は半安定ベクトル束に付随する $\mathbb{P}^1$ 束である.

証明. 例 6.9 で説明した幾何的線織曲面 $Y$ への双有理射 $\mu\colon X \to Y$ と $\mathbb{P}^1$ 束 $p\colon Y \to T$ を考え, $\pi\colon X \to T$ を合成写像 $p \circ \mu$ とします. アルバネーゼ写像の性質より, ある正則写像 $h\colon T \to T$ が存在して $\pi \circ f = h \circ \pi$, つまり

$$(\heartsuit) \qquad \begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & X \\ {\scriptstyle \pi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ T & \xrightarrow{h} & T \end{array}$$

が可換図式となります. ここで $\boldsymbol{q}(X) = \boldsymbol{q}(Y) = \boldsymbol{g}(T) > 0$ なので $h$ は不分岐です (cf. 3.6).

双有理射 $\mu\colon X \to Y$ が同型写像でないと仮定して矛盾を導きます. この場合 $X$ 上には $(-1)$ 曲線 $C$ があって $\mu(C)$ が点になります. したがって $C$ はある点 $t \in T$ の逆像 $\pi^{-1}(t)$ に含まれます. いま $C^2 = -1$ なので $C$ は負曲線であり, 系 7.7 より, $(f^k)^{-1}(C) = C$ となる整数 $k > 0$ が存在します. すると $(h^k)^{-1}(t) = \{t\}$ です. したがって不分岐被覆写像 $h$ は 同型写像です. 因子 $\pi^*(t)$ は $T$ 上の素因子 $\{t\}$ の $\pi$ による引き戻しですが, 可換図式 $(\heartsuit)$ より $f^*(\pi^*(t)) = \pi^*(h^*(t))$ となり, さらには

$$(\diamondsuit) \qquad (f^k)^*(\pi^*(t)) = \pi^*((h^k)^*(t)) = \pi^*(t)$$

となります. ここで $\pi^*(t)$ の $C$ に沿っての重複度 $m$ を考えると (cf. 5.1), $\pi^*(t) = mC + D$ と表示できる因子 $D$ で $C$ を既約成分に含まないものがあります. また $(f^k)^*C = bC$ と正整数 $b = (\deg f)^{k/2}$ で表示できるので (cf. 7.7), $(f^k)^*(\pi^*(t)) = mbC + (f^k)^*D$ の $C$ に沿っての重複度は $mb$ です. いま $b > 1$ なので, これは $(\diamondsuit)$ に矛盾します. ゆえに $\mu\colon X \to Y$ は同型写像であり, $X$ は幾何的線織曲面です.

$\mathbb{P}^1$ 束 $X \to T$ が半安定ベクトル束に付随することは $X$ が負曲線を持たないことと同値, ということが知られています. したがって $\boldsymbol{q}(X) = \boldsymbol{g}(T) \geq 2$ と $X$ が負曲線 $C$ を持つことを仮定して矛盾を導けば十分です. 命題 7.8 より $\boldsymbol{p_a}(C) \leq 1$ なので $C$ の特異点解消 $\widetilde{C}$ の種数は 1 以下となり (cf. 5.10), $\pi$ の誘導する写像 $\widetilde{C} \to T$ は全射になりません (cf. 3.5). したがって $C$ は $\pi$ のファイバーに含まれますが, この場合 $C \simeq \mathbb{P}^1$ で $C^2 = 0$ となり, 矛盾. これで定理 7.9 が証明されました. □

**命題 7.10.** $\kappa(X) = -\infty$ かつ $\boldsymbol{q}(X) \geq 2$ ならば, 種数 2 以上の非特異射影曲線 $B$ と有限次不分岐被覆写像 $\mathbb{P}^1 \times B \to X$ が存在する.

証明のあらすじ. 定理 7.9 の証明のつづきで, 半安定ベクトル束に付随する $\mathbb{P}^1$ 束の性質を $\pi\colon X \to T$ に適用すると, 分岐公式 $K_X = f^*K_X + R_f$ から, $R_f \neq 0$ であり, $R_f$ の既約成分 $\Theta$ はすべて非特異で $\pi|_\Theta\colon \Theta \to T$ は不分岐被覆写像になること, がわかります. 一般に有限次不分岐被覆写像 $\tau\colon T' \to T$ に対しファイバー積

$$X' := X \times_T T' = \{(x, t') \in X \times T \mid \pi(x) = \tau(t')\}$$

は $T'$ 上の $\mathbb{P}^1$ 束で, これも半安定ベクトル束に付随しますが, $X$ 方向への射影 $X' \to X$ もまた有限次不分岐被覆写像となります. したがって命題 7.10 の証明のためには, このような $\tau\colon T' \to T$ で $X'$ が $T'$ 上の自明な $\mathbb{P}^1$ 束となるものを探せばよいことになります. その候補として $\pi|_\Theta\colon \Theta \to T$ が取れますが, それでは不十分です. しかし, これを手掛かりにして欲しい $\tau\colon T' \to T$ を見つけることができます. □

**7.4. 有理曲面の場合.** §7.1 と §7.3 の結果より, 定理 7.1 の証明の必要性の部分で残されたのは次の主張を示すことです.

- 非特異有理曲面 $X$ が非同型全射自己正則写像 $f\colon X \to X$ を持てば, $X$ はトーリック曲面である.

これはもともと佐藤榮一氏によって予想されていましたが (cf. [13, Conjecture 2]), 命題 7.8 と次の定理によって肯定的に解決されます.

**定理 7.11** (cf. [13, Theorem 17])**.** 非特異有理曲面 $X$ が高々有限個の負曲線しかもたず, 負曲線全体の合併集合 $N_X$ が空集合, または $N_X$ の任意の連結成分が命題 7.8 の条件 (A), (B), (C) のどれかを満たすのならば, $X$ はトーリック曲面である.

定理 7.11 の証明のあらすじを説明する前に, トーリック曲面について少し解説します. 非特異射影的トーリック曲面 $X$ には 2 次元代数的トーラス $\mathbb{T} = \mathbb{C}^\star \times \mathbb{C}^\star$ が作用し (ただし $\mathbb{C}^\star = \mathbb{C} \setminus \{0\}$), その軌道 (orbit) の一つ $U$ は $X$ のザリスキ開集合で $\mathbb{T}$ 同型 $U \simeq \mathbb{T}$ を持ちます. 補集合 $X \setminus U$ は境界因子と呼ばれますが, $\mathbb{P}^1$ の輪環鎖 (cf. 7.8(C)) となっています. この輪環鎖の二つの既約成分の交点が $\mathbb{T}$ の 0 次元軌道に他なりません. また任意の整数 $m$ に対し, $\mathbb{T}$ の $m$ 乗写像

$$\mathbb{T} \ni (t_1, t_2) \mapsto (t_1^m, t_2^m) \in \mathbb{T}$$

は同型 $\mathbb{T} \simeq U$ を介して $X$ の自己正則写像に延長できます. したがって任意のトーリック曲面は非同型な全射自己正則写像を持ちます.

**例 7.12.** 射影平面 $\mathbb{P}^2 = \{(x : y : z)\}$ には $\mathbb{T} \ni \theta = (t_1, t_2)$ が

$$\theta \cdot (x : y : z) = (x : t_1 y : t_2 z)$$
$$(\text{または} \quad = (t_1^{-1} x : y : t_1^{-1} t_2 z) = (t_2^{-1} x : t_1 t_2^{-1} y : z))$$

として作用します. すると開集合 $U = \{xyz \neq 0\}$ は $(1 : 1 : 1)$ を通る $\mathbb{T}$ の軌道にほかならず, $\mathbb{T}$ 同型 $U \simeq \mathbb{T}$ があるので, $\mathbb{P}^2$ はトーリック曲面です. このときの境界因子は 3 直線 $\{x = 0\}$, $\{y = 0\}$, $\{z = 0\}$ の合併集合です.

**例 7.13.** ヒルツェブルフ曲面 $\mathbb{F}_e$ もトーリック曲面です. 実際その境界因子は $\mathbb{P}^1$ 束 $\mathbb{F}_e \to \mathbb{P}^1$ の二つのファイバー $F_1$, $F_2$ と二つの大域切断 $S_1$, $S_2$ で $S_1 \cap S_2 = \emptyset$ となるもの和 $F_1 + F_2 + S_1 + S_2$ と表せます. なおピカール数 2 の非特異有理曲面はすべてヒルツェブルフ曲面です.

**事実 7.14.** 非特異射影曲面 $X$ と点 $x \in X$ におけるブローアップ $\mu\colon X' \to X$ を考えます.

- もし $X$ がトーリック曲面で $\{x\}$ が $\mathbb{T}$ の 0 次元軌道ならば, $X'$ もトーリック曲面で, その開軌道は $X$ の開軌道の $\mu$ による逆像です.
- 逆に, もし $X'$ がトーリック曲面ならば $X$ もトーリック曲面で, $\{x\}$ は $\mathbb{T}$ の 0 次元軌道です.

この事実を (−1) 曲線を次々にブローダウンすることに使えば, 定理 6.6 から次のことがわかります.

**系 7.15.** ピカール数 $k \geq 3$ をもつ非特異射影曲面 $X$ がトーリック曲面ならば, トーリック曲面とブローアップのなす列

$$X = X_k \xrightarrow{\mu_{k-1}} X_{k-1} \to \cdots \to X_{i+1} \xrightarrow{\mu_i} X_i \to \cdots \to X_2$$

が存在し, $X_2$ はヒルツェブルフ曲面で, 任意の $2 \leq i \leq k-1$ に対し, $\mu_i$ は $X_i$ 上の $\mathbb{T}$ の 0 次元軌道におけるブローアップである.

定理 7.11 の証明のあらすじ. $X$ のピカール数は 3 以上と仮定できるので (cf. 7.13), あるヒルツェブルフ曲面 $Y = \mathbb{F}_e$ への双有理射 $\mu\colon X \to Y$ が存在します. $\mathbb{P}^1$ 束 $p\colon Y \to \mathbb{P}^1$ との合成 $\pi = p \circ \mu\colon X \to \mathbb{P}^1$ を考えると, $\pi$ のファイバー $\pi^{-1}(t)$ $(t \in \mathbb{P}^1)$ で可約なものは負曲線の和となり $N_X$ に含まれます. また $\mu$ が同型でないので $\pi$ の大域切断となる負曲線も存在します. このことから $N_X$ が連結で可約なことがわかります. したがって $N_X$ 自身が命題 7.8 の条件 (B) または (C) を満たします. とくに可約なファイバー $\pi^{-1}(t)$ は高々二本しかなく, それらは線型鎖です. ここから先の議論では, この線型鎖に含まれる (−1) 曲線についての補題を準備し, それを利用して次の性質を満たす $Y$ 上の $\mathbb{P}^1$ の輪環鎖 $B$ の存在を示します.

- $B$ は例 7.13 のように二つの $p$ のファイバー, 二つの $p$ の大域切断からなる.
- $\mu^{-1}(B)$ も $\mathbb{P}^1$ の輪環鎖で, $\mu\colon X \setminus \mu^{-1}(B) \to Y \setminus B$ は同型.
- $N_X \subset \mu^{-1}(B)$.

この $B$ の存在証明は省略しますが, このことから事実 7.14 より, $X$ が $\mu^{-1}B$ を境界因子として持つトーリック曲面になることがわかります. □

このように定理 7.11 が示され, § 7.1, §7.3 の結果と合わせて, 定理 7.1 の必要性の部分の証明が完了します.

# 参考文献

[1] W. Barth. L. Hulek, C. Peters, and A. Van de Ven, *Compact Complex Surfaces* (second enlarged edition), Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3), **4**, Springer-Verlag, 2004.

[2] A. Beauville, *Complex Algebraic Surfaces* (second edition), London Mathematical Society Studend Texts, **34**, Cambridge Univ. Press, 1996. — A. Beauville, *Surfaces Algébriques Complexes*, Astérisque **54**, Société Mathématique de France, 1978 の英語版 —

[3] F. Enriques, *Le Superficie Algebriche*, Nicola Zanichelli, 1949.

[4] Y. Fujimoto, Endomorphisms of smooth projective 3-folds with non-negative Kodaira dimension, Publ. RIMS, Kyoto Univ. **38** (2002), 33–92.

[5] A. Grothendieck, Éléments de géométrie algébrique (rédigés avec la collaboration de J. Dieudonné), I–IV, Publ. Math. I.H.É.S. **4** (1960), **8** (1961), **11** (1961), **17** (1963), **20** (1964), **24** (1965), **28** (1966), **32** (1967).

[6] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry*, Graduate Texts in Mathematics, **52**, Springer-Verlag, 1977.

[7] S. Iitaka, *Algebraic Geometry. An Introduction to Birational Geometry of Algebraic Varieties*, Graduate Texts in Mathematics, **76**, Springer-Verlag, 1982. — 飯高茂, 代数幾何学 I–III 岩波講座基礎数学, 岩波書店 1976–77 の英語版 —

[8] 飯高茂, 上野健爾, 浪川幸彦, デカルトの精神と代数幾何, 数学セミナー増刊: 入門 現代の数学 **6**, 日本評論社 1980; 増補版, 1993.

[9] 桂利行, 実用家向きの代数幾何文献案内 (定評ある教科書・古典的書籍), 応用数理 **24** 巻 3 号 (2004), 290–294. (`https://doi.org/10.11540/bjsiam.14.3_290`)

[10] K. Kodaira, On complex analytic surfaces, I, II, III, Ann. of Math. **71** (1960), 111–152, **77** (1963), 563–626, **78** (1963), 1–40.

[11] K. Kodaira, On the structure of compact complex analytic surfaces, I, II, III, IV, Amer. J. Math. **86** (1964), 751–798, **88** (1966), 682–721, **90** (1968), 55–83, **90** (1968), 1048–1066.

[12] 宮西正宣, 代数幾何学, 数学選書 **10**, 裳華房 1990.

[13] N. Nakayama, Ruled surfaces with non-yrivial surjective endomorphisms, Kyushu J. Math. **56** (2002), 433–446.

[14] T. Oda, *Convex Bodies and Algebraic Geometry - An Introduction to the Theory of Toric Varieties*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3), **15**, Springer-Verlag, 1988. — 小田忠雄, 凸体と代数幾何学, 紀伊国屋数学業書 **24**, 紀伊国屋書店 1985 の英語版 —

[15] M. Segami, On surjective endomorphism of surfaces, Proc. Symp. on Vector Bundles and Algebraic Geometry, January 1997, Kyushu University, organized by S. Mukai and E. Sato, pp. 93–102 (in Japanese).