不変量で見るトポロジー

石川 勝巳

1　イントロダクション —不変量とは？—

みなさんは「幾何学」と聞いてどのようなものを想像するでしょうか。辞書的には何らかの図形について調べる学問ですから、中学や高校の平面幾何のように、図形の各部分の長さや角度、面積や体積などを求めることを思い浮かべるかもしれません。今回のタイトルにもあるトポロジー（位相幾何学）もそんな幾何学の一種ではあるのですが、ここでは長さなどを無視し、図形をその繋がり方（位相）に着目して調べています。例えば図形の一部をつまんで引き伸ばしたり拡大縮小してもその図形の繋がり方は変わらないので、トポロジー的には同じものと見なして区別しませんが、引き伸ばした部分を他の部分にくっつけたりすると繋がり方が変わり、元の図形とは異なる図形が出来上がるといった具合です。しばしばトポロジストにはドーナツとマグカップが同じものに見えるといった言い方をしますが、一方でドーナツとボールでは空いている穴の個数が異なるので、トポロジストにとっても別物ということになります。

与えられた 2 つの図形が同じものか判定せよ、というのは幾何学の基本的な問題の一つですが、何をもって「同じ」とするかは分野によって異なり、例えばトポロジーでは 2 つの図形が「同相」であるとき同じものと見なします。トポロジーでは**位相空間**と呼ばれる図形を扱います。X, Y を位相空間とするとき、X から Y への連続写像 f が全単射[1]、すなわち 1 対 1 の写像であって、逆写像 $f^{-1} : Y \to X$ も連続であるとき、写像 f のことを**同相写像**と言います。そして位相空間 X, Y の間に同相写像が存在するとき、X と Y は**同相**であると言います。先程の例で言うと、ドーナツはマグカップと同相だがボールとは同相ではない、ということになります。与えられた 2 つの位相空間が同相か判定せよ、というのがトポロジーに於ける基本的な問題だというわけです。

位相空間 X, Y が同相であることを示すには具体的に同相写像を見つけてやればよいのですが、同相でないことを示すのはそう簡単ではありません。X から Y への写像というのはたとえ連続なものに限っても無数にありますから、それらを列挙して同相写像が存在しないことを示すというのは現実的ではありません。このような場合に便利なのが今回のテーマである「不変量」を用いるという方法です。

一般に、考えている対象に何らかの（わかりやすい）値を与えるものであって、特定の変形によってその値が変わらないもののことを**不変量**と呼びます。例えばトポロジーでは、各位相空間 X に何らかの値 $\alpha(X)$ が対応していて、同相写像 $f : X \to Y$ が存在したとき $\alpha(X) = \alpha(Y)$ となるとき、α は（位相）不変量であるというわけです。不変量は一般に考えている対象を区別するために用いられます。例えば、位相空間 X, Y について位相不変量 α を計算して $\alpha(X) \neq \alpha(Y)$ となったとしましょう。もし X と Y が同相であればその間の同相写像が存在し、従って $\alpha(X) = \alpha(Y)$ となるはずですが、実際には $\alpha(X) \neq \alpha(Y)$ だったので、X と Y は同相でないことがわかるのです。

[1] 一般に集合 X, Y の間の写像 $f : X \to Y$ について、任意の異なる $x, x' \in X$ に対して $f(x) \neq f(x')$ となるとき f は**単射**であると言い、任意の $y \in Y$ に対して $f(x) = y$ となる $x \in X$ が存在するとき f は**全射**であると言う。全射かつ単射であることを**全単射**であると言い、このとき f の逆写像 $f^{-1} : Y \to X$ が存在する。

定義から不変量は何らかの変形で変わらない値を取りますが、別の見方をするとこれはその変形を本質的でないものと見なし、そのような変形で変わらない本質的な情報を抜き出してくるものだと言うことができます。そしてこのような広い意味で不変量を捉えるなら、それ自体はトポロジーや幾何学に限らず数学の至る所に現れる、とても便利な考え方です。このような不変量の有用性や、不変量を使って対象を分類する面白さを感じてもらおう、というのが本稿の主目的です。

この節の残りではいくつかの例を通して不変量を用いた考え方をご紹介したいと思います。

1.1 グラフ

いくつかの頂点とそれらを結ぶ辺からなる図形のことを**グラフ**と呼びます。ここでは頂点の数も辺の数も有限であるものを考えることにします。また、多重辺やセルフループを含むようなものも考えることにします。

G, G' をグラフとします。全単射連続写像 $f : G \to G'$ であって、G の各頂点・各辺を G' の頂点・辺へそれぞれ写すようなものがあるとき、G と G' は（グラフとして）**同型**であるといいます。例えば図 1 の (a) と (b) は見た目は異なりますが同型なグラフです。

同型なグラフに対して同じ値を与える不変量を構成してみましょう。例えばグラフ G の頂点の数 $v(G)$ や辺の数 $e(G)$ はすぐに思いつく不変量になります。ある頂点から出る辺の数をその頂点の**価数**と言いますが、価数 n の頂点の数 $v_n(G)$ もグラフの不変量となっています。他にも、グラフの連結成分の数なども容易に思いつく不変量だと思います。

一方で、グラフ G, G' が同型でなくとも、それらが表す図形自体は同相（簡単に、G と G' は同相と言うことにします）、ということがあります。例えば 1 つの辺に頂点を追加して 2 つにしたり、逆に 2 価の頂点を取り除く操作により、このような例を作ることができます。トポロジーの立場からすればこういったものは同じものとして扱いたいので、頂点の取り方によって値が変わってしまう $v(G)$ や $e(G)$ などの量は不変量とは言えないことがわかります。

では、複数のグラフが同相でないことを示すにはどうすれば良いでしょうか。幸い、同型でないグラフが同相であるのは、上で述べたような操作に因るもので尽くされていることがわかります：

命題 1.1. G, G' を（有限）グラフとする。G と G' が同相であるのは、ある辺に頂点を追加する操作およびその逆操作を有限回繰り返して一方のグラフを他方に同型なグラフに変形できるときであり、そのときに限る。

従って、このような頂点の追加・除去によって変わらない値はグラフの位相不変量であると言うことができます。例えば $v_n(G)$ は $n \neq 2$ に対しては不変量であることがわかりますし、$v(G)$ や $e(G)$ それぞれは不変量ではありませんが、

$$\chi(G) = v(G) - e(G)$$

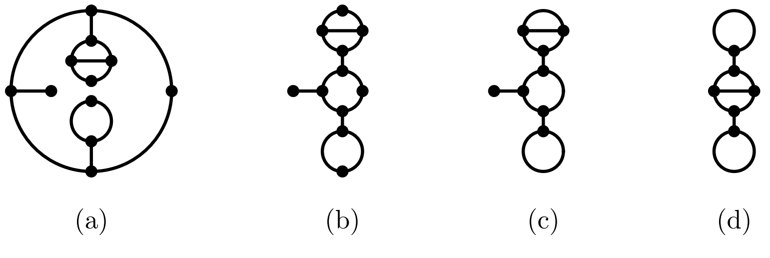


図 1: (a) と (b) は同型。(b) と (c) は同相だが同型ではない。(c) と (d) は同型でも同相でもない。

と定義すると、これは不変量になることがわかります：

定理 1.2. グラフ G, G' が同相であるとき、$\chi(G) = \chi(G')$.

$\chi(G)$ は**オイラー標数**と呼ばれる不変量で、グラフの同型・同相を考える上では決して強い不変量ではありませんが、ホモトピー同値という同相より弱い関係でも不変量になっており、この関係の下では $\chi(G)$ によって連結なグラフが完全に分類されるなど、トポロジー的には非常に興味深い不変量となっています。

1.2 15 パズル

図形以外でも不変量の考え方が有効な例として、15 パズルを考えてみましょう。一応ルールを紹介しておくと、1 から 15 までの数字が 1 つずつかかれた正方形のパネルを 4×4 の枠に並べ、空いたマスへパネルを移動させることによってバラバラの配置にした後、それを元に戻せるか、というパズルです。数字の代わりに絵が描かれていることも多いかと思います。

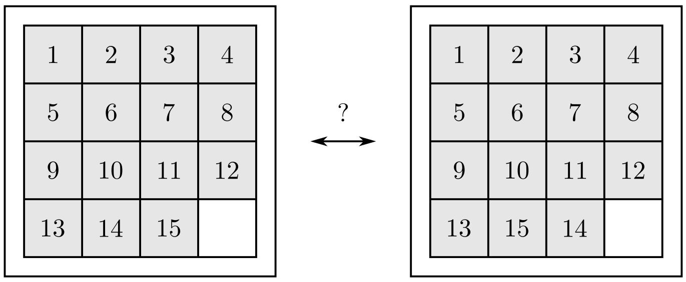


図 2: 15 パズル：右の配置から左の配置（完成形）へ動かすことはできるか？

図 2 左の配置を完成形と呼ぶことにしましょう。完成形から始めてバラバラにしたものは当然完成形に戻すことができるはずです。では、初めからバラバラにパネルを配置したとき、これを完成形に持っていくことは可能でしょうか。パネルが外せるタイプの 15 パズルを遊んだことのある方だとご存知かもしれませんが、実は初期配置によってはどう頑張っても完成形に持っていくことができないのです。例えば 14 と 15 を入れ替えた配置は、このような解けない配置の一つです。

経験則として解けないとわかっていても、何かやり方がマズいという可能性はないか、本当に解けないならそれを証明したい、というのが数学の考え方ですが、これは意外と難しい問題です。なんせ考えうる配置方法は 16! 通りですから、それらの中で解ける配置を列挙していくというのは、理論上は可能であっても現実的ではありません。ですが、不変量の考え方を用いることでこの問題を解決することができます。

$\mathfrak{S}_{16}$ で集合 $\{1, \cdots, 16\}$ からそれ自身への全単射な写像全体のなす集合を表すこととします。「位置 i」で完成形の i のパネルがある位置を指し示すことにするとき、15 枚のパネルの配置に対して、i のパネルが位置 $\sigma(i)$ にあるとすることで $\sigma \in \mathfrak{S}_{16}$ が定まります。ただし、空いているマスには 16 と書かれたパネルがある、と置き換えて考えることにします。この対応により、パネルの配置を $\mathfrak{S}_{16}$ の元を用いて表すことにしましょう。例えば完成形には恒等写像 $\mathrm{id} \in \mathfrak{S}_{16}$ が対応します。

さて、$\sigma \in \mathfrak{S}_{16}$ に対し

$$t(\sigma) = \#\{(i, j) \mid 1 \leq i < j < 16,\ \sigma(i) > \sigma(j)\}$$

とおき、σ の**符号**を $\mathrm{sgn}\,\sigma = (-1)^{t(\sigma)}$ で定めます。簡単な計算により、2 枚のパネルを入れ替えると配置の符号は -1 倍になることがわかります。15 パズルの変形は空白（16 のパネル）と他のパネルの入れ替えで表されるので符号自体は変化してしまいますが、空白の位置に着目してこれをすこし補正してやることで不変量を得ることができます：

補題 1.3. 配置 $\sigma \in \mathfrak{S}_{16}$ に対し $s(\sigma) = (-1)^{\sigma(16)+\lceil \sigma(16)/4 \rceil}(\mathrm{sgn}\,\sigma)$ とおくと、$s(\sigma)$ は 15 パズルの変形で不変である。ただしここで $\lceil x \rceil$ は x 以上の最小の整数を表す。

図 2 右の 14 と 15 を入れ替えた配置 $(14, 15)$ では $s((14, 15)) = -1$ となり、完成形での s の値 $s(\mathrm{id}) = 1$ とは異なります。$(14, 15)$ からどう変形して行っても s の値は -1 から変わらないはずなので、この初期配置からでは 15 パズルを解くことができないことが示されたわけです。

ちなみに、ある初期配置から 15 パズルを解くことができるかどうかは s の値から完全に決定されることがわかります：

定理 1.4. 初期配置 $\sigma \in \mathfrak{S}_{16}$ の 15 パズルが解けることと $s(\sigma) = 1$ であることは同値。

1.3 CW 複体のオイラー標数

1.1 節ではグラフのオイラー標数を定義しましたが、グラフ以外にも様々な位相空間に対してオイラー標数を定義することができます。

グラフは頂点に辺を貼り付けていくというやり方で構成されたことに注意しましょう。これを高次元に拡張して、次のような構成によって得られる図形を **CW 複体**と呼びます：

(0) 頂点集合を X_0 とする。

(1) いくつかの線分 $[0, 1]$（$= 1$ 次元球体）をその境界 $\partial[0, 1] = \{0, 1\}$ で X_0 に貼り付けたものを X_1 とする。

(2) いくつかの円板 D^2（$= 2$ 次元球体）をその境界 $\partial D^2 = S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ で X_1 に貼り付けたものを X_2 とする。

$\vdots$

各 n 次元球体のことを **n-セル**と呼びます。ここではセルの数が有限なもの、すなわち上記の構成が有限次元で止まり、各 n に対して n-セルの数は有限であるものを考えることにします。なお、「いくつか」と書きましたが、n-セル（$n \geq 1$）の数は 0 個でも構いません。

一般の位相空間 X に対して CW 複体との間の同相写像を与えることを「X に CW 複体の構造を与える」などと言います。例えば多面体はその頂点、辺、面をそれぞれ $0, 1, 2$-セルとみなすことで CW 複体の構造を与えることができます。他にも閉曲面やメビウスの帯など、一般的に思いつく図形の多くに CW 複体の構造を与えることができます。

ここで注意しないといけないのが、一般に或る位相空間に与えられる CW 複体の構造は一意でないということです。このことはグラフの同型と同相の差でも見ましたし、正多面体たちが互いに同相であることからも分かると思います。ところが、CW 複体の構造が与えられた位相空間 X に対してその**オイラー標数** $\chi(X)$ を

$$\chi(X) = \sum_{n \geq 0} (-1)^n (n\text{-セルの数})$$

と定めると、これは X の位相不変量となることが知られています：

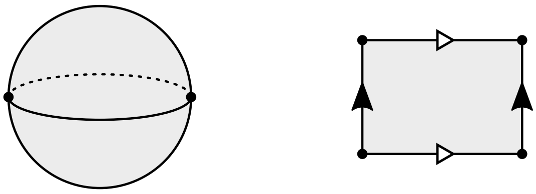


図 3: 球面 S^2 やトーラス T^2 は CW 複体である。

事実 1.5. 有限 CW 複体と同相な位相空間 X に対し、$\chi(X)$ はその CW 複体の構造の与え方に依らずに定まる位相不変量である。

例 1.6. 種数 g の有向閉曲面（g 人乗りの浮き輪）Σ_g について考えてみましょう。まず頂点（0-セル）を 1 つ、辺（1-セル）を $2g$ 本持つグラフを考え、辺に向きをこめて $a_1, b_1, \cdots, a_g, b_g$ と名前をつけておきます。ここに 2-セルを、境界が順に $a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}\cdots a_gb_ga_g^{-1}b_g^{-1}$ と各辺を通るよう貼り付けます。言い換えると、正 $4g$ 角形を用意し、各 $i = 0, \cdots, g-1$ に対し $4g+1$ 番目と $4g+3$ 番目、$4g+2$ 番目と $4g+4$ 番目の辺をそれぞれ適切な向きに貼り合わせます。するとこれが Σ_g と同相であることがわかるので、$\chi(\Sigma_g) = 2-2g$ となり、種数の異なる有向閉曲面は互いに同相でないことが示されます。任意の有向閉曲面はある g での Σ_g に同相であることも知られているので、有向閉曲面はオイラー標数によって完全に分類されるということが言えます。

2　基本群と不変量

2.1　群とその例

ここから先、群と呼ばれる代数を用いて不変量を構成します。群とは大雑把に言うと掛け算と割り算が定義された代数であり、その程度の理解で十分ですが、細かいところが気になる人のために一度きちんと定義しておきましょう：

定義 2.1. 集合 G とその元 $e \in G$, 及び G 上の二項演算（積）$G \times G \ni (g,h) \mapsto gh \in G$ の組であって次の条件を満たすもののことを**群**と呼ぶ：

(1) 任意の $g \in G$ に対して、$ge = eg = g$.

(2) 任意の $g \in G$ に対してある元 $h \in G$ が存在し、$gh = hg = e$ が成り立つ。

(3) 任意の $g, h, k \in G$ に対して、$g(hk) = (gh)k$.

e のことを群 G の**単位元**と言う。また、(2) で $g \in G$ に対して定まる元 $h \in G$ を g の**逆元**と呼び、g^{-1} で表す。

一般には積が可換、すなわち $gh = hg$ とは限らないことに注意しましょう。積演算が可換な群は**可換群**、もしくは**アーベル群**と呼ばれます。アーベル群の積演算の記号としては “+” が用いられることが多く、この場合には 0 で単位元を表します。

よく出てくる群をいくつか挙げておきます。

- 整数の集合 $\mathbb{Z}$ や有理数の集合 $\mathbb{Q}$, 実数の集合 $\mathbb{R}$ などは加法 “+” によって群になります。通常の積 “×” では群になりませんが（例えば 0 には逆元がない！）、可逆な元全体、例えば $\mathbb{Z}^\times = \{\pm 1\}$ や $\mathbb{R}^\times = \mathbb{R}\backslash\{0\}$ は乗法に関して群を成します。

- 自然数 n に対し、$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ で整数の n に関する剰余類の集合とします。すなわち、$a+n\mathbb{Z}=\{a+ni \mid i\in\mathbb{Z}\}$ の形の集合を元とする集合を $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ と表します。このとき、$(a+n\mathbb{Z})+(b+n\mathbb{Z})=(a+b)+n\mathbb{Z}$ と定めることにより $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ は群となります。なお、$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ で考えていることが明らかな場合には剰余類 $a+n\mathbb{Z}$ を単に a で表します。

- 集合 X に対し、X から X 自身への全単射全体の集合を $\mathfrak{S}_X$ と書くとき、$\mathfrak{S}_X$ は写像の合成を積として群となります。この群のことを、X に関する**置換群**と呼びます。この場合の単位元は X 上の恒等写像 id_X です。$X=\{1,\cdots,n\}$ のときは $\mathfrak{S}_X$ を $\mathfrak{S}_n$ と書きます。

- 点 O を中心とする正 n 角形 P を考え、O を中心とする回転や O を通る軸に関する反転で P を P 自身に写すもの全体からなる集合を D_n とするとき、D_n は写像の合成を積として群となります。この群のことを位数 $2n$ の**二面体群**と呼びます。定義から D_n は $\mathfrak{S}_P$ の部分群ですが、P の点を全て見ずともその頂点への作用を見れば十分なので、頂点に順に $1,\cdots,n$ と番号を付けることによって $\mathfrak{S}_n$ の部分群と見なすこともできます。

最初の二つの例は可換ですが、残りの例は一般には非可換な群の例となっています。他にも可逆行列の成す群などは非可換群の代表例と言えるでしょう。

G,H を群とするとき、写像 $f:G\to H$ で任意の $g,g'\in G$ に対して $f(gg')=f(g)f(g')$ を満たすもののことを**準同型写像**と言います。特に全単射な準同型写像は**同型写像**と呼ばれ、群 G,H の間に同型写像が存在するとき、G と H は**同型**であると言います。例えば $\mathbb{Z}^\times$ と $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $\mathfrak{S}_3$ と D_3 はそれぞれ同型ですが、前者と後者は位数（元の数）が異なるので同型ではありません。また、$\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ と $\mathfrak{S}_3$ はどちらも位数 6 の群ですが、前者は可換、後者は非可換なので同型ではありません。

群 G,H に対し、その直積集合 $G\times H$ は $(g,h)(g',h')=(gg',hh')$ と積演算を入れることで群となります。アーベル群の場合には直和の記号 $G\oplus H$ が用いられます。有限生成アーベル群は完全に分類されており、上で紹介したようなものの直和で表されることが知られています：

事実 2.2 (有限生成アーベル群の基本定理)**.** G を有限生成アーベル群とするとき、非負整数 a, $p_1<\cdots<p_m$（$m=0$ でもよい）を満たす素数 $p_1,\cdots,p_m$, 自然数 $n_1,\cdots,n_m$, $b_{i,n_i}>0$ を満たす非負整数 $b_{i,1},\cdots,b_{i,n_i}$ $(i=1,\cdots,m)$ が一意に存在して、G は

$$\mathbb{Z}^a\oplus\bigoplus_{i=1}^{m}\left((\mathbb{Z}/p_i\mathbb{Z})^{b_{i,1}}\oplus\cdots\oplus(\mathbb{Z}/p_i^{n_i}\mathbb{Z})^{b_{i,n_i}}\right)$$

と同型となる。

この定理の証明は省略しますが、今回用いるのは定理の一意性の部分であり、この部分に関しては不変量の考え方を用いた証明が可能であるということを述べておきます。

2.2 位相空間の基本群

ここでは位相空間に対して基本群と呼ばれる群を対応させることを考えます。同相な空間に対して同型な基本群が得られる枠組みがあれば、基本群を調べることによって元の空間に関する情報を得ることができます。群の同型に関する不変量があれば、それを基本群に適用することにより、位相空間の不変量が得られるのです。

閉区間 $[0,1]$ から位相空間 X への連続写像 $\gamma:[0,1]\to X$ のことを**道** (path) と言います。道 γ,γ' に関して $\gamma(1)=\gamma'(0)$ が成り立っていれば、この二つの道を繋げることで新しい道 $\gamma\cdot\gamma'$ を作るこ

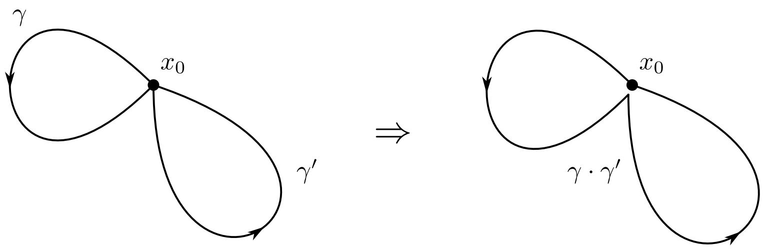


図 4: ループの積

とができます。厳密には、

$$(\gamma \cdot \gamma')(t) = \begin{cases} \gamma(2t) & (0 \leq t \leq 1/2 \text{ のとき}), \\ \gamma'(2t-1) & (1/2 \leq t \leq 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

と定めてやれば道 $\gamma \cdot \gamma'$ が得られます。$\gamma \cdot \gamma'$ は γ と γ' の**積**と呼ばれます。

道の積を演算として群を作ると言うのが基本的なアイデアなのですが、今のままでは 2 つの道に対して積が定義できるかどうかすらわかりません。そこで基点 $x_0 \in X$ を取り、始点 $\gamma(0)$ と終点 $\gamma(1)$ が共に x_0 であるような道だけを考えることにしましょう。このような道を x_0 を基点とする**ループ**と呼びます。同じ点を基点とするループ同士ならいつでも積を考えることができます。

さらに、$x_0 \in X$ を基点とするループ γ_0, γ_1 について、始点と終点を固定したまま連続変形で一方を他方に移せるとき、γ_0 と γ_1 は（端点を保って）**ホモトピック**であると言い、$\gamma_0 \sim \gamma_1$ で表します。厳密には、連続写像 $f : [0,1]^2 \to X$ であって任意の $s, t \in [0,1]$ に対して

$$f(s,0) = f(s,1) = x_0, \qquad f(0,t) = \gamma_0(t), \qquad f(1,t) = \gamma_1(t)$$

を満たすようなものがあるとき $\gamma_0 \sim \gamma_1$ と定義します。あるループとホモトピックなループたちの集合をホモトピー類と言い、x_0 を基点とするループのホモトピー類の集合を $\pi_1(X, x_0)$ と表します。言い換えると、x_0 を基点とするループ全体の成す集合を考え、ホモトピックなループ同士を同一視することによって得られる集合を $\pi_1(X, x_0)$ とするわけです。x_0 を基点とするループ γ に対して、その属するホモトピー類を $[\gamma]$ と書くことにします。

定理 2.3. X を位相空間とする。$x_0 \in X$ を基点とするループ γ, γ' に対して $[\gamma] \cdot [\gamma'] = [\gamma \cdot \gamma']$ とすることにより $\pi_1(X, x_0)$ に積が定まり、これにより $\pi_1(X, x_0)$ は群となる。さらに、$x_0, x_1 \in X$ が同じ弧状連結[2]成分に属する点であるとき、$\pi_1(X, x_0)$ と $\pi_1(X, x_1)$ は同型である。

$\pi_1(X, x_0)$ は X の x_0 を基点とする**基本群**と呼ばれます。特に X が（弧状）連結である場合には基点によらずに群（の同型類）が定まるので、特に基点を指定せず $\pi_1(X)$ と書くこともあります。また、以降、ループ γ のホモトピー類 $[\gamma]$ のことを、単に γ と書くことにします。

いくつかの基本的な位相空間について、基本群の計算例を紹介します。

(a) 直線 $\mathbb{R}$ や閉区間 $[0,1]$, 二次元以上の球面 S^n $(n \geq 2)$ の基本群は自明、すなわち、ただ一つの元（単位元）だけからなる群となります。

(b) 円周 $S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ について、$\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$. 生成元としては S^1 に沿って一周するループを取ることができます。また、単位円板 $\mathbb{R}^2$ から原点 $(0,0)$ を取り除いたものを X と表すと、$\pi_1(X)$ も $\mathbb{Z}$ と同型になり、生成元として S^1 と同じものを取ることができます。これは半径方向に X を S^1 へ「つぶす」ことができることからわかります。

[2]本稿で扱う位相空間においては連結と弧状連結、連結成分と弧状連結成分は同じものだと思ってもらって構いません。

(c) 2 つの円周を 1 点で同一視した位相空間 $X = S^1 \vee S^1$ を考えます。便宜上円周それぞれに向きをつけておき、それに沿って一周するループを a, b と表しましょう。このとき $\pi_1(X)$ の元は、a, a^{-1}, b, b^{-1} を有限個並べた形で書くことができ、$aa^{-1} = e$（e は単位元）のような「あたり前」のもの以外の関係式はありません。このような群を a と b を生成元とする**自由群**と呼びます。より一般に n 個の S^1 を 1 点で同一視した位相空間の基本群は n 個の元によって生成される自由群 F_n となります。

(d) トーラス（種数 1 の閉曲面）Σ_1 は上で紹介した位相空間 $X = S^1 \vee S^1$ に 2-セルを $aba^{-1}b^{-1}$ というループに沿って貼り付けたものと見ることができます。X の基本群は F_2 でしたが、ここに 2-セルが貼り付けられることにより、ループ $aba^{-1}b^{-1}$ は自明なループとホモトピックになり、$\pi_1(\Sigma_1)$ では $aba^{-1}b^{-1} = e$, すなわち $ab = ba$ という関係式が成り立つことがわかります。実際には追加された関係式はこれだけで、$\pi_1(\Sigma_1)$ は a, b によって生成される自由アーベル群、すなわち $\mathbb{Z}^2$ と同型であることがわかります。

上の (c), (d) を一般化して、任意の CW 複体の基本群を求めることができます。詳細は省略しますが、CW 複体の 1 次元以下の部分 X_1 はいくつかの生成元からなる自由群となり、そこに貼り付けられる各 2-セルに対応して関係式が加わります。例えば種数 g の有向閉曲面 Σ_g に例 1.6 のように CW 複体の構造を与えるとき、$\pi_1(X_1)$ は $2g$ 個のループ $a_1, b_1, \cdots, a_g, b_g$ を生成元とする自由群となります。そこへ 2-セルによって $a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1} \cdots a_gb_ga_g^{-1}b_g^{-1} = e$（単位元）という関係式を加わり、これが $\pi_1(\Sigma_g)$ となります。一般に生成系 S と関係式 R をもつ群（の中で最大のもの）を $\langle S \mid R \rangle$ のように表すので、この表し方をするなら、

$$\pi_1(\Sigma_g) = \langle a_1, b_1, \cdots, a_g, b_g \mid a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1} \cdots a_gb_ga_g^{-1}b_g^{-1} = e \rangle$$

という表示が得られたわけです。なお、この例は 2 次元 CW 複体でしたが、一般に 3 次元以上のセルを貼り付けても基本群は変わらないということが知られており、この方法で一般の CW 複体の基本群の表示を得ることができます。

2.3 基本群から不変量へ

前節で CW 複体の基本群の求め方を紹介しましたが、群の表示を見てもどんな群か、よくわかりませんね。実際、表示が与えられた複数の群が同型か判定せよ、というのは一般にはとても難しい問題です。ここでは同型な群なら同じものが得られる、群の不変量を紹介します。

1 つ目は群の**可換化**もしくは**アーベル化**と呼ばれるものです。これは群 G の任意の元 $g, h \in G$ に対して $gh = hg$ という関係式を考え、このような関係式を G に追加してできる群のことで、ここでは G_{ab} と書くことにします。群論の言葉では群 G を交換子部分群 $[G, G]$ で割ったものと定義できますが、ここでは深入りしないことにします。G が有限生成であれば G_{ab} も有限生成であり、有限生成アーベル群の分類は完全にできているので、アーベル化同士を比べることで元の群同士を比べることができます。ちなみに、弧状連結な位相空間 X の基本群 $\pi_1(X)$ のアーベル化は X の 1 次ホモロジー群 $H_1(X)$ と呼ばれるアーベル群と同型であるということが知られています。

もう 1 つ有用な不変量として、有限群への準同型の数を挙げておきます。群 G, H に対し、G から H への準同型の集合を $\mathrm{Hom}(G, H)$ で表します。G と同型な群 G' があれば、その同型写像を用いることで $\mathrm{Hom}(G, H)$ と $\mathrm{Hom}(G', H)$ の間に全単射写像を作ることができます。特に G が有限生成で H の位数が有限であれば $\mathrm{Hom}(G, H)$ は有限集合になるので、H を固定したときその数は有限生成群 G の不変量となります。

例えば Σ_g の基本群の表示を上で与えましたが、そのアーベル化 $\pi_1(\Sigma_g)_{\mathrm{ab}}$ を考えてみると、元からある関係式は関係式 $a_i b_i = b_i a_i$ によって意味のないものとなってしまうことがわかり、従って $\pi_1(\Sigma_g)_{\mathrm{ab}} \cong \mathbb{Z}^{2g}$ となることがわかります。Σ_g が互いに同相でないことは既にオイラー標数を用いて確かめましたが、このように基本群を用いても確かめることができるのです。

3　結び目と基本群

3.1　結び目

3 次元空間 $\mathbb{R}^3$ に埋め込まれた円周 S^1 のことを**結び目**と言います。「埋め込まれた」という部分では自己交差が無いことと、S^1 の各点で接線が定義できるくらいに「きれい」であることを仮定しています。学部 1 回生の微分積分をご存知であれば、微分が 0 となる点が存在しないような C^∞ 級写像 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ で任意の $t \in \mathbb{R}$ に対し $f(t) = f(t+1)$ を満たすものを考え、その像を結び目と呼ぶ、とすることで正確な定義が可能です。より一般に、互いに交わらないよう有限個の S^1 を埋め込んだものを**絡み目**と呼びます。結び目/絡み目の各成分に向きが付いたものは**有向結び目**/**絡み目**と呼びます。

連続変形で移りあうような絡み目同士は**同値**であると言われます。より正確な定義を述べるため、連続写像 $H: [0,1] \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ について $H(s,t) = H_s(t)$ と書くとき、任意の $s \in [0,1]$ について $H_s: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ が同相写像であるようなもののことを**イソトピー**と呼ぶことにしましょう。絡み目 $L, L' \subset \mathbb{R}^3$ について、$H_0 = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$ であるようなイソトピー H であって $H_1(L) = L'$ となるようなものが存在するとき、L と L' は**同値**であると言います。有向絡み目に関しては向きを込めて移りあう時に同値ということが多く、そのことを強調する場合には**有向同値**と言います。

図 5 のように、絡み目を平面 $\mathbb{R}^2$ に三重点や接点を持たないよう描いたものを**図式**と呼びます。またこのとき図式の見掛け上の各連結成分のことを**弧** (arc) と呼びます。任意の絡み目は図式に表すことができますが、その表し方は一意でないことに注意しましょう。例えば $\mathbb{R}^2$ のイソトピーによる変形は図式の見た目を変えますし、図 6 に示した変形を図式の一部に施してもその図式が表す絡み目が変わらない（同値である）ことは明らかです。後者の局所変形は**ライデマイスター変形**と呼ばれますが、このような変形を行なっていくことにより、同値な絡み目を表す異なる図式を次々と得ることができます。これは絡み目の分類をしたいという立場としては非常にやっかいですが、実は図式を変形する方法は本質的にはこのライデマイスター変形のみであり、任意の変形がライデマイスター変形の組み合わせとして表されることが知られています：

事実 3.1. 絡み目図式 D と D' が同値な絡み目を表すための必要十分条件は、有限回のイソトピー変形とライデマイスター変形により D が D' に変形されることである。

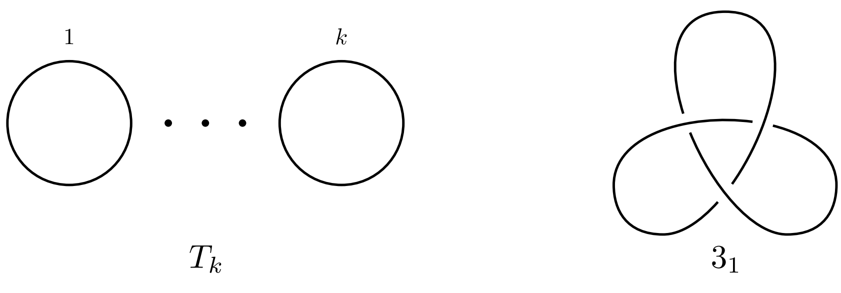


図 5: 自明絡み目と三葉結び目

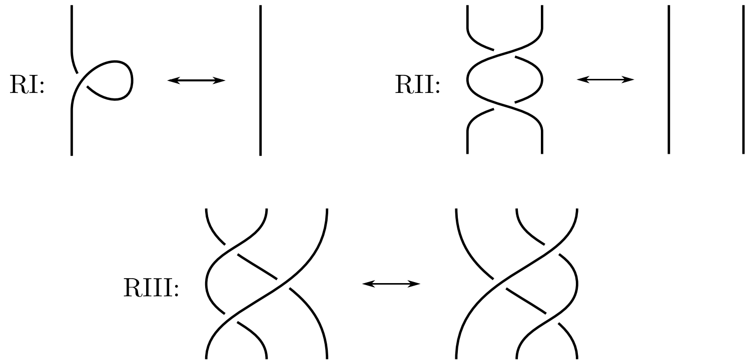


図 6: ライデマイスター変形

結び目を変形していく過程は一般には複雑ですが、この定理はどんなに複雑な変形もライデマイスター変形を用いて記述できるということを意味しています。一方でこの後見るように、結び目が同値でないことを示す際にもこの定理は非常に役に立ちます。

3.2 基本的な結び目不変量

この節では基本的な結び目/絡み目不変量をご紹介します。

例 3.2. 当たり前に思われるかもしれませんが、絡み目に対し、その成分数は不変量です。例えば図 5（左）のような「絡まっていない」絡み目 T_k のことを成分数 k の**自明絡み目**と呼びますが、成分数の異なる自明絡み目は、当然のことながら同値ではありません。

例 3.3. 有向絡み目図式の交点には向きの入り方が 2 通りあることに注意して、図 7 のように各交点に正負の符号を付けます。2 つの成分 K_1, K_2 から成る絡み目に関して図式を一つ取り、正（負）の交点の内、交点を構成する 2 本のひもの一方が K_1, もう一方が K_2 の一部であるものの個数を c^+ (c^-) とします。このとき $c^+ - c^-$ は偶数となることが確かめられるので、K_1 と K_2 の**絡み数**を

$$\mathrm{Lk}(K_1, K_2) = \frac{1}{2}(c^+ - c^-)$$

と定めます。一見するとこれは図式に依った定義ですが、1 回のライデマイスター変形によって $c^\pm$ がどう変化するのかを追ってみると、絡み数は変化しないということがわかります。従ってライデマイスター変形を何度施しても絡み数は変化しない、すなわち、絡み数は 2 成分有向絡み目の不変量であることがわかりました。より一般に、複数の成分を持つ絡み目に対してその内の異なる 2 成分を指定することでそれらの間の絡み数が定義されます。

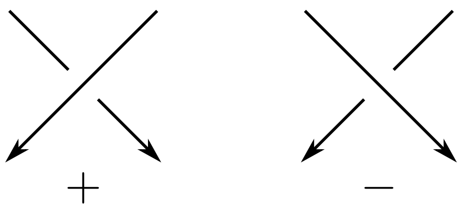


図 7: 交点の正負

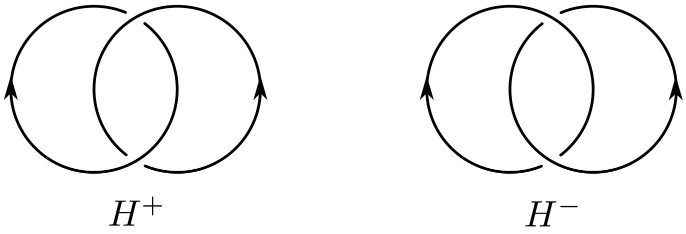


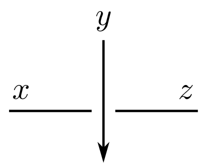
図 8: ホップ絡み目

例えば図 8 のような 2 成分有向絡み目 $H^{\pm}$ は、交点の符号に従って正（負）の**ホップ絡み目** (Hopf link) と呼ばれます。2 成分有向絡み目 L に対してその 2 成分の間の絡み数を $\mathrm{Lk}(L)$ と書くことにすると、簡単な計算により

$$\mathrm{Lk}(T_2) = 0, \qquad \mathrm{Lk}(H^+) = 1, \qquad \mathrm{Lk}(H^-) = -1$$

となるので、これらが互いに同値でないことが証明できました。このように絡み数は成分数に比べれば強い不変量ですが、結び目に対しては定義されませんし、どの 2 成分の間の絡み数も 0 であるような非自明な絡み目も容易に見つけられるという意味で、さほど強い不変量ではありません。

例 3.4. 自然数 n を固定し、n に関する剰余類の集合 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{0, 1, \cdots, n-1\}$ をここでは R_n で表すことにします。絡み目に対して図式 D を取り、その各弧 x に元 $\mathcal{C}(x) \in R_n$ を対応させるような写像 $\mathcal{C}$ を考えます。この写像 $\mathcal{C}$ が条件

D の全ての交点  に於いて $\mathcal{C}(x) + \mathcal{C}(z) = 2\mathcal{C}(y)$

を満たすとき、$\mathcal{C}$ を D の ***n*-彩色**と呼びます。図式 D の n-彩色の数を $\mathrm{col}_n(D)$ で表し、***n*-彩色数**と呼びますが、これは絡み目の不変量です。実際、ライデマイスター変形を行う前の図式に彩色を与えると、変形で動かさない部分の彩色をそのままにしつつ、変形後の図式の彩色を一意に与えることができます。これにより一連の変形の前後で彩色の集合の間に全単射を作ることができ、特にその集合の元の数である彩色数は不変であるということがわかるのです。

例えば自明結び目 T_1 と図 5（右）の結び目（**三葉結び目**）3_1 について 3-彩色数を計算すると

$$\mathrm{col}_3(T_1) = 3, \qquad \mathrm{col}_3(3_1) = 9$$

となるので、これらが同値でないことがわかります。

3.3 結び目群

2.2 節では連結な位相空間に対してその基本群が同型を除いて決まるということを紹介しました。ここでは結び目や絡み目に対してこれを考えてみましょう。

とは言っても、結び目自体は全て S^1 と同相ですからその基本群を考えても意味がありません。そこで、結び目 $K \subset \mathbb{R}^3$ に対してその補空間 $\mathbb{R}^3 \backslash K$ を考え、その基本群を π_K と表しましょう。π_K は K の**結び目群**と呼ばれており、同値な結び目に対して同型な群を与える、ある種の不変量となっています。一般に絡み目 L に対しても同様に絡み目群 π_L が定義されます。

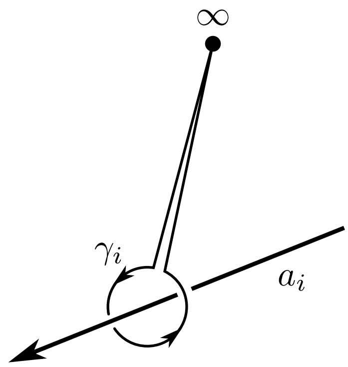
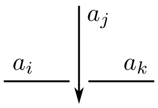


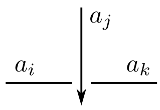
図 9: 図式の弧 a_i にループ γ_i が対応する。

結び目群をそのまま扱ったり調べたりするのは難しいので、生成元と関係式によって表示することを考えましょう。そのためにまず結び目 K が入っている $\mathbb{R}^3$ に無限遠点 ∞ を付け加え、$K \subset S^3 = \mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$ と考えることにしましょう。また、K を少しだけ太らせたものを $N(K)$ とします。$N(K)$ はソリッドトーラス $D^2 \times S^1$（中身の詰まったドーナツ）と同相になります。$\mathbb{R}^3 \backslash K$ の代わりに $E(K) := \overline{S^3 \backslash N(K)} = (S^3 \backslash N(K)) \cup \partial N(K)$ を考えると、$E(K)$ には CW 複体の構造を与えることができ、基本群の表示を得ることができます。

具体的な表示を得るため、結び目 K に向きをつけておき、K の図式を 1 つ取って D とします。D の手前側に無限遠点 ∞ があると思って、∞ から各弧 a_i の近くまでまっすぐ降りて行き、a_i の周りを図 9 の向きに一周した後、∞ までまっすぐ戻るというループ γ_i を考えましょう。図式の各交点 

の周りではこのようにして 3 つのループ（ただし互いに相異なるとは限りません）が得られますが、これらの間には $\gamma_j^{-1}\gamma_i\gamma_j = \gamma_k$ という関係式があることがわかります。$E(K)$ を適切に CW 複体に分割して考えることで、π_K が γ_i たちによって生成されること、そして関係式が各交点に関して今述べた形で得られるもので尽きているということがわかり、π_K の表示

$$\pi_K = \left\langle \gamma_i \;\middle|\; \text{交点}\ \text{(図)}\ \text{に対し、}\gamma_j^{-1}\gamma_i\gamma_j = \gamma_k \right\rangle$$



が得られます。このようにして得られた結び目群の表示は**ヴィルティンガー表示**と呼ばれています。

例 3.5. 成分数 n の自明絡み目 T_n の絡み目群 π_{T_n} は n 元生成の自由群 F_n になります。例えば図 10 のように交点が出てくる図式を取ると

$$\pi_{T_2} = \langle a, b, c \mid a^{-1}ba = c \rangle$$

のような関係式を含んだ表示が得られますが、この場合 c は a と b で表されていて必要のない生成元なので、これを除いて表示してやると $\pi_{T_2} = \langle a, b \mid \rangle \cong F_2$ となっていることが確かめられます。

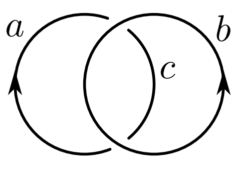


図 10: T_2 の非自明な図式

例 3.6. 図 5（右）の結び目 3_1 について、図式から結び目群は

$$\pi_{3_1} = \langle a, b, c \mid a^{-1}ba = c,\ b^{-1}cb = a,\ c^{-1}ac = b \rangle$$

と表示され、一つ目の関係式を残りの二つに代入して c を消去すると $\pi_{3_1} = \langle a, b \mid aba = bab \rangle$ となることがわかります。T_1 の結び目群は $\mathbb{Z}$ と同型で特に可換でしたが、π_{3_1} は π_{3_1} から二面体群 D_3 への全射準同型が存在することから非可換であることが確かめられ、3_1 は自明結び目ではないということが確かめられました。

2.3 節では基本群から不変量を得る方法を 2 つ紹介しましたが、この内で基本群のアーベル化を考える方法は、絡み目補空間の場合にはあまり役に立ちません。というのも、L が成分数 ℓ の絡み目とすると、絡み目群のアーベル化 $(\pi_L)_{\mathrm{ab}}$ は $\mathbb{Z}^\ell$ と同型になってしまい、成分数以外の情報を得ることができないのです。

一方で有限群への準同型の数を数える方法は非常に有効です。実際、この方法で得られる不変量によって任意の非自明な結び目が非自明であることが証明できるということが知られています。また、他の群への準同型を考えるときに一つの生成元の行き先を固定してやっても結び目不変量が得られるということが知られており、これによってより精密な不変量を得ることができます。例えば奇数 n に対し、結び目群 π_K から二面体群 D_n への準同型の中で、各弧に対応する生成元が D_n の反転へと移されるようなものだけを数えると、その数は K の n-彩色数に一致しているということが確かめられます。なお、この考え方を抽象化することで**カンドル**という代数が得られ、結び目理論で有用な様々な不変量を得ることができます。

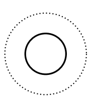
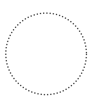
4 結び目の多項式不変量

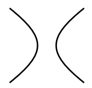
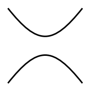
4.1 ジョーンズ多項式

ここでは非常に強力な結び目の不変量として、ジョーンズ多項式を紹介します。ジョーンズ多項式の定義の仕方は色々あるのですが、ここではカウフマン括弧を用いて定義を行いたいと思います。

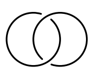
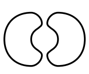
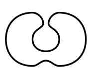
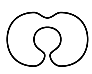
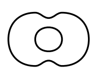
絡み目図式 D に対して、次のような規則に従ってある整数係数のローラン多項式 $\langle D \rangle \in \mathbb{Z}[A^{\pm 1}]$ を対応させます。ただしここでは「何も描いてない」ものも $\emptyset$ と表して図式とみなすことにします。

(K1) $\langle \emptyset \rangle = 1.$

(K2) $\Big\langle$  $\Big\rangle = (-A^2 - A^{-2}) \Big\langle$  $\Big\rangle.$

(K3) $\Big\langle$  $\Big\rangle = A \Big\langle$  $\Big\rangle + A^{-1} \Big\langle$  $\Big\rangle.$

ただし (K2), (K3) では今ここに描かれていない部分には同じ図式があると思ってください。例えば

$\Big\langle$  $\Big\rangle = A^2 \Big\langle$  $\Big\rangle + \Big\langle$  $\Big\rangle + \Big\langle$  $\Big\rangle + A^{-2} \Big\langle$  $\Big\rangle$

$$= \big((A^2 + A^{-2})(-A^2 - A^{-2})^2 + 2(-A^2 - A^{-2})\big)\langle \emptyset \rangle$$
$$= (-A^2 - A^{-2})(-A^4 - A^{-4})$$

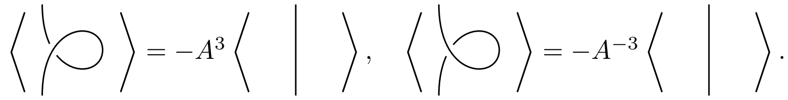
のように、(K3) を使って交点を解消し、(K2) を使って自明な円周を取り除いていくことで最終的に (K1) が使える状態に持っていくことができ、一般的な図式 D に対してカウフマン括弧 $\langle D\rangle$ を計算することができます。

(K2), (K3) を行う順番は自由ですが、どのような順番で行っても得られる多項式は変わらないことが確かめられます。さらに、図式のライデマイスター変形に関して、次が成り立ちます：

補題 4.1. カウフマン括弧 $\langle D\rangle$ は、図式の RII 変形、RIII 変形で不変である。

あとは RI 変形での不変性が確かめられればカウフマン括弧が不変量であると言えるのですが、残念ながらこの不変性は成り立ちません：

補題 4.2.



では絡み目の不変量を得るにはどうすればよいでしょうか。ここで、有向絡み目図式 D の交点の数を符号付きで数えたものは RII, RIII 変形で不変であるということに着目しましょう。すなわち、

$$w(D) = (\text{正の交点数}) - (\text{負の交点数})$$

とすると、RII, RIII 変形の前後で $w(D)$ の値は変わりません。一方で RI 変形の前後ではその交点の符号によって $w(D)$ は $+1$ または -1 されますが、これは補題における $\langle D\rangle$ の変化と非常によく似た振る舞いをしていることがわかります。そこでこれらがうまく打ち消し合うように $\bar{V}_D(A) = (-A)^{-3w(D)}\langle D\rangle \in \mathbb{Z}[A^{\pm 1}]$ とおくと、これは全てのライデマイスター変形で不変であり、従って有向絡み目 L の不変量となります。慣例的に

$$V_L(t) = \left.\frac{\bar{V}_D(A)}{-A^2 - A^{-2}}\right|_{A^2 = t^{-1/2}} = \left.\frac{(-A)^{-3w(D)}\langle D\rangle}{-A^2 - A^{-2}}\right|_{A^2 = t^{-1/2}}$$

とおいて、これを有向絡み目 L の**ジョーンズ多項式**と呼びます。ここで “$A^2 = t^{-1/2}$” というのは、この式中には A の奇数次の項は出てこないので A^2 を $t^{1/2}$ に置き換えよ、という意味です。$\bar{V}_D(A)$ が $-A^2 - A^{-2}$ で割り切れることは容易に確かめられるので $V_L(t)$ は $t^{1/2}$ の多項式となります。以上により、次が示されました。

定理 4.3. ジョーンズ多項式 $V_L(t) \in \mathbb{Z}[t^{\pm 1/2}]$ は有向絡み目 L の不変量である。

ちなみに有向結び目 K に対するジョーンズ多項式 $V_K(t)$ には t の整数次の項しか現れないこと、結び目の向きを逆にしてもジョーンズ多項式が変わらないことが確かめられます。

例 4.4. 自明結び目 T_1 について、$V_{T_1}(t) = 1$. より一般に n 成分自明絡み目 T_n について、$V_{T_n}(t) = (-t^{1/2} - t^{-1/2})^{n-1}$.

例 4.5. 三葉結び目 3_1 について、$V_{3_1}(t) = t + t^3 - t^4$. またその鏡像を取ったものを $\overline{3_1}$ と表すと $V_{\overline{3_1}}(t) = t^{-1} + t^{-3} - t^{-4}$ となり、3_1 と $\overline{3_1}$ は同値でないことがわかります。より一般に有向絡み目 L の鏡像を取ったものを $\overline{L}$ で表すとき $V_{\overline{L}}(t) = V_L(t^{-1})$ が成り立つことが証明できますが、これは鏡像を取っても元の絡み目と同値となるような絡み目に関してはジョーンズ多項式が対称である、すなわち $V_L(t) = V_L(t^{-1})$ が成り立つということを意味しています。

例 4.5 では一般には $V_L(t) \neq V_{\overline{L}}(t)$ となることを紹介しましたが、このような差は n-彩色数や絡み目群から有限群への準同型の数などを用いても捉えることができません。基本群由来の他の不変量としてアレキサンダー多項式というものが知られていますが、それを用いても $L \not\cong \overline{L}$ を示すことはできないので、このような点からもジョーンズ多項式は非常に強力な不変量と言えるでしょう。

4.2 交代結び目とジョーンズ多項式

直感的には自明結び目は最も単純な結び目であり、三葉結び目はそれよりも複雑な結び目です。では、より一般の結び目についてその「複雑さ」を数学的に定義するにはどうすればよいでしょうか？ ここでは結び目の交点数を複雑さを表す量として見たとき、ある種の結び目に関してはジョーンズ多項式がその複雑さをよく捉えているということを紹介します。

一般に絡み目 L に対し、L（と同値な絡み目）を表す図式の中で最も交点が少ないものの交点数のことを L の最小交点数、もしくは単に**交点数**と呼びます。自明結び目の交点数は 0 であり、結び目 K の交点数が 0 であることと K が自明結び目に同値であることは同値であることが確かめられます。また、三葉結び目の交点数が 3 であることも少し難しいですが確かめることができます。しかし一般に与えられた結び目に対してその交点数を求めるというのは非常に難しい問題です。定義から交点数は結び目不変量ではあるのですが、あまり交点数のことを不変量と呼んだりしないのはその計算の難しさにあると思います。

一方でここでは交代結び目と呼ばれる結び目に関してはその交点数を図式から読み取ることができる、ということを示したいと思います。まず結び目図式においてひもに沿って進むとき交点で他のひもの上下どちら側を通るかというのを順に見ていくことを考えましょう。図 11 のように、結び目に沿って一周する間、この上下が交互に現れるような図式のことを**交代図式**と言い、交代図式を用いて表すことができるような結び目のことを**交代結び目**と呼びます。交代結び目を表す図式の中には交代的でないようなものも含まれるということに注意してください。

結び目の交点数を求める上では、明らかに余分な交点は取り除いておきたいと考えるのが普通です。例えば図 12 のようなものがその例ですが、この図のような形の余分な交点が存在しないような図式のことを **reduced diagram** と呼ぶことにします。reduced でない交代図式は、その余分な交点を解消してもやはり交代的であることがわかります。

結果を述べるための準備として、0 でない多項式 f の最高次数と最低次数の差を $|f|$ と書き、f の幅と呼ぶことにします。このとき、次のことがわかります：

命題 4.6. 有向結び目 K の交点数を c_K とするとき、$|V_K(t)| \leq c_K$.

命題 4.7. K を有向交代結び目とし、D を交代的な reduced diagram とする。D の交点数を c_D とするとき、$|V_K(t)| = c_D$.

これらの命題を併せて考えることにより、次が得られます：

定理 4.8. K を交代結び目、D をその交代的な reduced diagram とするとき、K の交点数は D の交点数に等しく、ジョーンズ多項式の幅 $|V_K(t)|$ と一致する。

まとめると、交代結び目の交点数は交代的な reduced diagram の交点数に等しく、しかもジョーンズ多項式は交点数の情報を持っている、ということになります。交点数はある意味最も直感的な

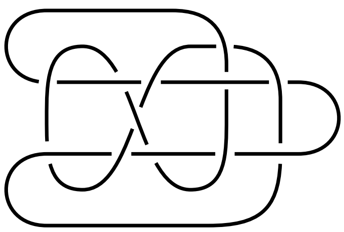


図 11: 交代図式の例

図 12: 「明らかに余分な交点」は取り除くことができる。

「複雑さ」を測る指標でしたから、ジョーンズ多項式もやはりある種の複雑さをよく表す不変量だと言うことができるでしょう。

ジョーンズ多項式は基本群などに比べると新しい不変量で、1980 年代に発見された後、一連の量子不変量の発見につながり、その研究は今でも活発に行われています。より強力な不変量や広いクラスの不変量へ研究が進む一方で、「ジョーンズ多項式が 1 となるような非自明な結び目はあるか」のような単純に思われる問題が未だに解決されていないなど、それ自身も興味深い不変量となっています。

参考文献

最後にトポロジー・結び目理論関連の入門書を挙げておきます：

[1] 「結び目的思考法のすすめ」、数理科学 2020 年 4 月号、サイエンス社。

[2] クゼ・コスニオフスキ（加藤 十吉 編訳）「トポロジー入門」、東京大学出版会。

[3] 村杉 邦男「結び目理論とその応用」、日本評論社。

[4] W.B.R. Lickorish “An Introduction to Knot Theory”, Springer.

[1] は一般向けに書かれたもので、結び目理論について様々な話題が紹介されています。 [2] はトポロジー一般についての入門書で、特に基本群について詳しく書かれており、トポロジーの面白さが味わえる良書だと思います。また、前提知識をほとんど必要としない結び目理論の本で丁寧に書かれたものとして [3] を挙げておきます。[4] はある程度前提知識を必要としますが、結び目理論の本格的な入門書で、日本語版も出版されています。