令和４年度・数学入門公開講座

1 August 2022

日常を彩る流体力学：
「ながれ」の数理モデル

[Day 1] 流れの方程式

京都大学数理解析研究所・石本 健太

はじめに

自己紹介

- 「石本」ということで「石」に興味・・・ケイ素生物研究？
- 理学部は「新しい学問をつくるところ」と聞いて京大理学部へ
- 学部では主に化学・物理を学ぶ。「これからは数理」と思い大学院から数理研で流体力学を研究することに

- 学位取得後、京大数理研・オックスフォード・東大数理を経て、2019年より現職
- **専門分野**：応用数学・流体力学・数理生物学（生物流体力学）

講義の方針

- 録画されています！
- （なるべく）線形代数・微積分と高校物理をスタートラインにして話をする予定
- １回の講義は３つの小テーマに区切ってやります
- 各章テーマの間に５分程度小休止を挟みます
- そのタイミングで質問受けもしてみようと思います
- チャットは私にしか見えませんので、気軽に質問してください
- **講義スライド**は講義ノートと一緒の場所に置きます**（右のQRコードを利用ください）**

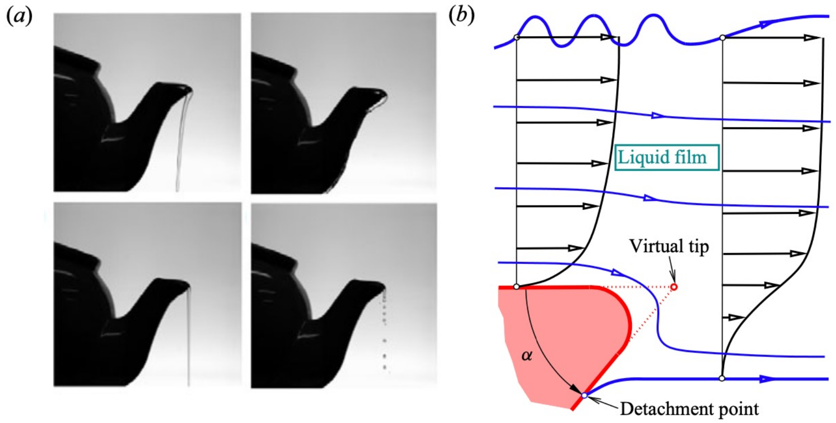
まあ、とりあえず

いい時間ですし、お茶でもいかがですか？

➢ それでは、お茶とお菓子を用意してゆったり楽しんでください。

YouTube@有限会社井出製茶工場

ティーポット効果



Duez et al. Phys Rev Lett (2010), Scheichl et al. J Fluid Mech (2021)

「ながれ」と流体力学

日常の「ながれ」

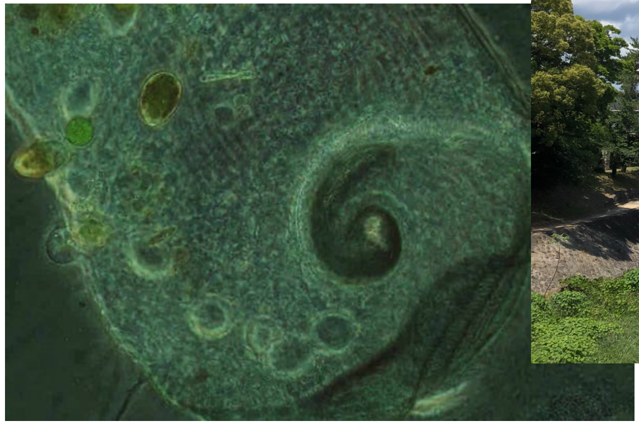
- 例：川の流れ、雲の流れ
- 例：細胞スケールから地球・宇宙スケールまで
- 例：人間社会における流れ・・・人の流れ、お金の流れ

Fig: wikipedia

宇宙スケール

地球スケール(>km)

細胞スケール
(μm-mm)



日常スケール(cm-m)

「ながれ」と流体力学

数理モデルとしての流体力学

- 「流体力学」＝流れに関する運動を扱う学問分野
- 多くの科学技術分野（物質科学・生命科学・地球環境科学などなど）の横串を担う古くて新しい学際分野
- 特に、オイラー(18世紀)以降、数理科学としての一側面をもつ
- 例えば、**ナビエ・ストークス方程式**は、人類史上最も成功した数理モデルのひとつ

$$\rho\left[\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}+(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{u}\right]=-\boldsymbol{\nabla}p+\mu\Delta\boldsymbol{u}$$

- 本講義では、数学的な詳細には立ち入らない
- （自然）現象を切り取る「数理科学的なアイデア」を中心に紹介したい
- イメージとしては「絵画」

この講義の目標とねらい

目標

- 流体力学を通して数理モデルの楽しさと難しさを知る
- 目にしているのに「見えていない」流体力学の奥深さを知る
- 新たな視点を身につけて、日常をより豊かにする！

講義の予定

- １日目：方程式
  流れを読む／私たちのNS／忘れられた存在
- ２日目：解
  真実はいつもひとつ／いつも心に流体力学／流体的ビジネスマナー
- ３日目：渦
  永遠のシンボル／空想を現実に／信じれば飛べる
- ４日目：粘性
  猫=流体説／ドロドロ世界の住人／流体力学は生きている

日常を彩る流体力学：
「ながれ」の数理モデル

[Day 1] 流れの方程式
§1 流れを読む

流れをどう読むか？

（普通の意味での）流れ ＝空間の各場所で速度ベクトルが与えられている

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t)$$

$\boldsymbol{x} = (x, y, z)$：位置ベクトル

$\boldsymbol{u} = (u, v, w)$：流れ、流れ場、速度場

流れの表し方

ベクトルの矢印をたくさん書く

流線　流速ベクトルが接線となる曲線群

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w} = \text{定数}$$

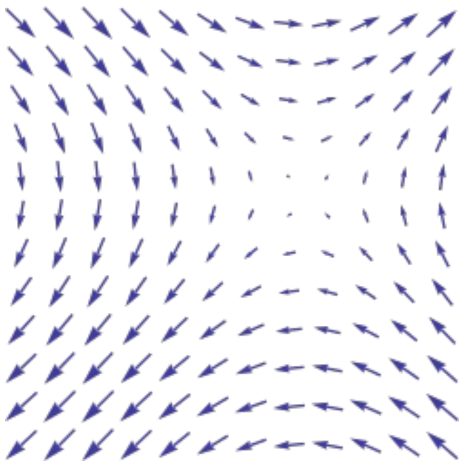
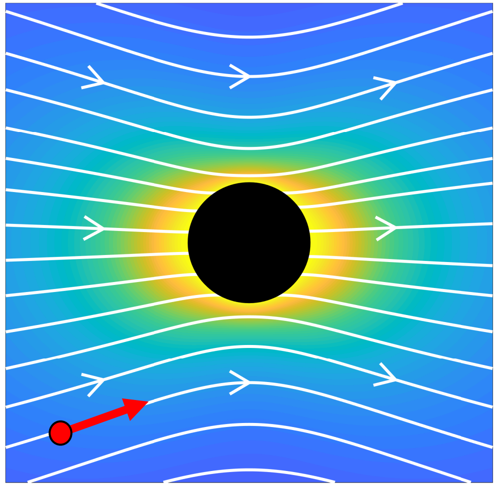
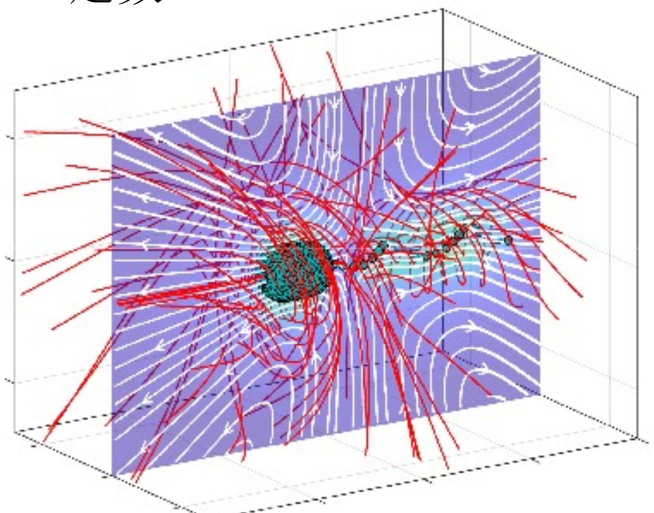


Fig: Wikipedia

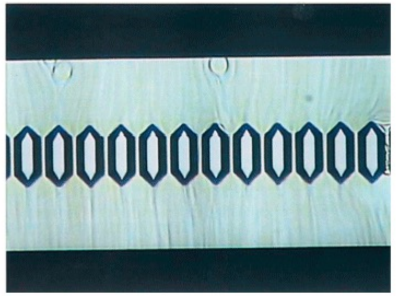


$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t)$　　球の周りの流れ

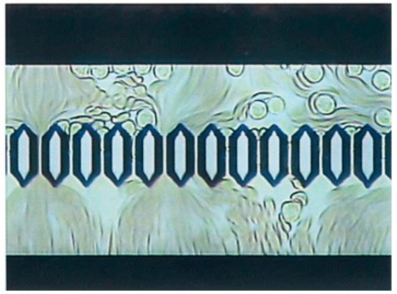


Ishimoto et al. Phys Rev Fluids (2020)

ぐっと引いて流れを見る



血液サラサラ



血液ドロドロ

Fig: 山下化成ウェブサイト
トhttps://www.yamahisa-net.co.jp/02product/06mcfan/061mcfan.html

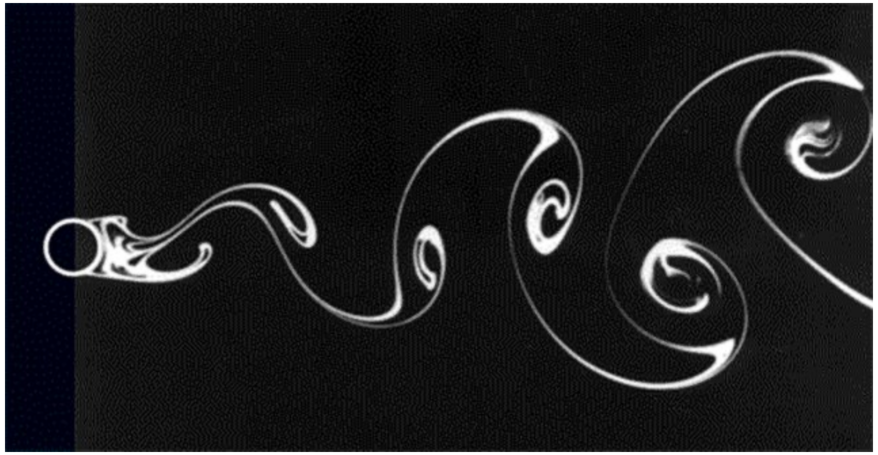


Fig: van Dyke, *An Album of Fluid Motion*

流れの表し方

ベクトルの矢印をたくさん書く、他には

流線

流速ベクトルが接線となる曲線群

流跡線

流体に沿って流れる粒子の軌跡（笹舟）

流脈線

ある点から粒子を流し続けたときの粒子のなす集合（墨流し）

※ 流れが非定常($\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t)$が$t$に陽に依存する)とき、これらは一般に異なる

流れの局所的な運動

テイラー展開

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t) = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}_0,t) + (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)\cdot\nabla\boldsymbol{u} + \cdots$$

歪(ひず)み速度

$$\mathbf{E} = \mathrm{sym}[\boldsymbol{\nabla}\otimes\boldsymbol{u}]^{\mathrm{T}} \qquad E_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)$$

：歪み速度テンソル（変形速度テンソル）

$$[\boldsymbol{\nabla}\otimes\boldsymbol{u}]_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$$

回転速度

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{u}$$

：渦度

$$\boldsymbol{\omega} = 2\boldsymbol{\Omega}$$

$\boldsymbol{\Omega}$ ：局所的な回転速度

ナブラ記号

➢ 各成分が空間座標の偏微分になっているベクトル（微分演算子）

$$\boldsymbol{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right) \qquad \boldsymbol{\nabla} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}\right) = (7x, 3y+3y^2)$$

3次元なら $\boldsymbol{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)$ $\qquad \boldsymbol{\nabla} p = \left(\frac{\partial p}{\partial x},\frac{\partial p}{\partial y},\frac{\partial p}{\partial z}\right)$

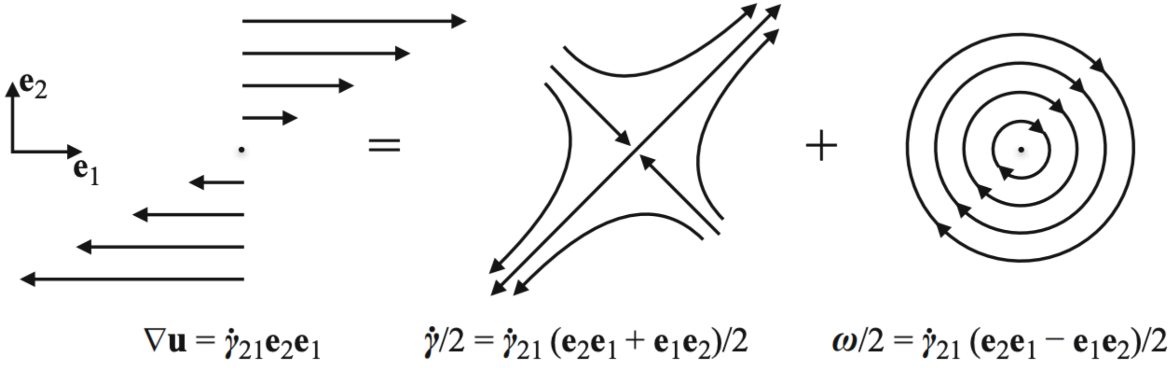


Fig: Spagnolie, *Complex Fluids in Biological Systems*

渦による流れの表現

ヘルムホルツ分解

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_{\mathrm{irr}} + \boldsymbol{u}_{\mathrm{sol}}$$

非回転場（渦なし場）と非発散場に分解できる

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{u}_{\mathrm{irr}} = q \qquad \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{u}_{\mathrm{sol}} = 0$$

$$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{u}_{\mathrm{irr}} = \boldsymbol{0} \qquad \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{u}_{\mathrm{sol}} = \boldsymbol{\omega}$$

マクスウェル方程式（静電磁場）

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E} = \varepsilon_0\rho \qquad \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{B} = 0$$

$$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E} = -\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t} \qquad \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B} = \mu_0\boldsymbol{j} + \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}$$

渦なし流れとポテンシャル流

$\boldsymbol{u}_{\mathrm{irr}} = \boldsymbol{\nabla}\phi$となるポテンシャル$\phi(\boldsymbol{x},t)$を用いて流れが書ける

非圧縮流れ　$q = 0$

- **非圧縮条件**（質量保存則による）
- 音速より十分遅い日常現象では成り立つ

※ 流れはどのように変化していくのか？はこの段階ではまだわからない

まとめ

[Day 1] 流れの方程式
§1: 流れを読む

- 「流れ」は(２次元or)３次元のベクトル場である
- 流れを全体像や局所的な振る舞いを表す表現を紹介した
- 渦度は局所的な流れの回転を表す

日常を彩る流体力学：
「ながれ」の数理モデル

[Day 1] 流れの方程式
§2 私たちのNS

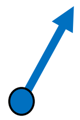
流体力学の始まり

ニュートン方程式

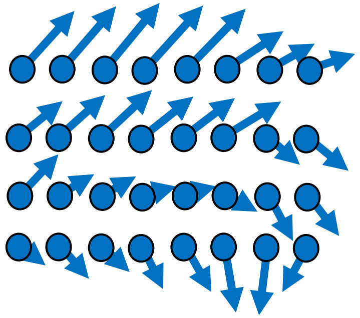
$$m\frac{d\boldsymbol{U}}{dt} = \boldsymbol{F}$$

(物体に働く力)

(慣性力)
=(質量)x(加速度)



粒子の運動
$\boldsymbol{U}(t)$



流体(水や空気)の運動

$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t)$

オイラー方程式 (1750年頃)

(その他の外力)

$$\rho\left[\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + (\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{u}\right] = -\boldsymbol{\nabla}p + \boldsymbol{f}$$

(慣性力)　(圧力)

レオンハルト・オイラー
(1707-1783)

- オイラーによって流体力学は数理科学としての第１歩を踏み出した
- 実はニュートンのプリンキピア第II編は流体に関する記述

流体の方程式

オイラー方程式

$$\rho\left[\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + (\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{u}\right] = -\boldsymbol{\nabla} p$$

(慣性力)　(圧力)

$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)$：流速ベクトル(流速場、速度ベクトル)
$p(\boldsymbol{x},t)$：圧力 (圧力場)
ρ ：流体の質量密度 (物質定数)

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x}$$

$$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p}{\partial y}$$

$$\rho\left(\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p}{\partial z}$$

$\boldsymbol{x} = (x, y, z)$

$\boldsymbol{u} = (u, v, w)$

$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\nabla} = u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y} + w\frac{\partial}{\partial z}$$

流体方程式は偏微分方程式
＝ 多変数関数が未知関数

流体粒子とラグランジュ微分

オイラー方程式

$$\rho\left[\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + (\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{u}\right] = -\boldsymbol{\nabla} p \longrightarrow \rho\frac{d\boldsymbol{u}}{dt} = \boldsymbol{f}$$

(慣性力)　　(圧力)

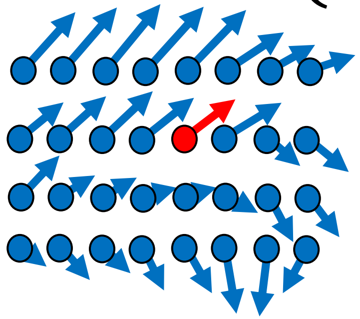
$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)$：流速ベクトル(流速場、速度ベクトル)

$p(\boldsymbol{x},t)$：圧力 (圧力場)

ρ ：流体の質量密度 (物質定数)

連続体(流体・弾性体)力学は
ミクロと分離された閉じた理論体系
（原子・分子の存在を仮定しない）

$\boldsymbol{x}(\boldsymbol{a},t)$



"流体粒子"を**ラベル**づけ

$\boldsymbol{a}$：ラグランジュ座標（ラベル）

流体粒子の速度= その場所の速度場

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{a},t),t) = \frac{d\boldsymbol{x}(\boldsymbol{a},t)}{dt}$$

流体粒子の加速度

$$\frac{d\boldsymbol{u}}{dt} = \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + \frac{d\boldsymbol{x}}{dt}\cdot\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{u} = \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{u}$$

ナビエ・ストークス方程式

オイラー方程式 (1750年頃)

$$\rho\left[\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}+(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{u}\right]=-\boldsymbol{\nabla}p$$

(慣性力)　(圧力)

ナビエ・ストークス方程式 (1845年)

$$\rho\left[\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}+(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{u}\right]=-\boldsymbol{\nabla}p+\mu\Delta\boldsymbol{u}$$

(慣性力)　(圧力)　(粘性力)

粘性: 流速の不均一性を無くそうとする流体の性質

μ: 粘性係数 = 粘性の度合いの強さ(物質定数)

$\Delta=\boldsymbol{\nabla}^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$ (ラプラシアン、ラプラス演算子)

(参考：梶野先生の講義)

ジョージ・ストークス
(1819-1903)

ナビエ・ストークス方程式

ナビエ・ストークス方程式 (1845年)

$$\rho\left[\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + (\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{u}\right] = -\boldsymbol{\nabla}p + \mu\Delta\boldsymbol{u}$$

(慣性力)　(圧力)　(粘性力)

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{u} = 0$$ (非圧縮条件)

ジョージ・ストークス
(1819-1903)

流体(水・空気)の運動をほぼほぼ完璧に記述する方程式

人類史上屈指の数理モデルの成功例

しかし、方程式があるからといって
すぐに「解ける」わけではない

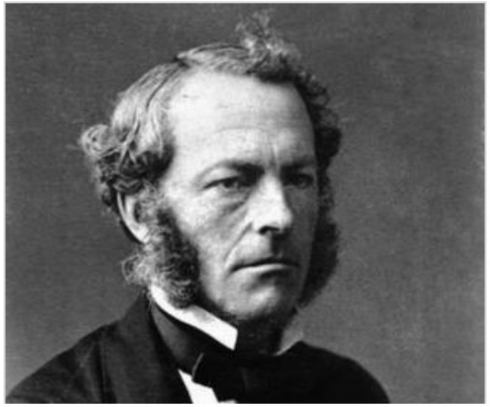
ミレニアム問題

CMI

ABOUT PROGRAMS MILLENNIUM PROBLEMS PEOPLE PUBLICATIONS EVENTS EUCLID

「ナビエ・ストークス方程式の解の存在と滑らかさ」

Navier–Stokes Equation



Waves follow our boat as we meander across the lake, and turbulent air currents follow our flight in a modern jet. Mathematicians and physicists believe that an explanation for and the prediction of both the breeze and the turbulence can be found through an understanding of solutions to the Navier-Stokes equations. Although these equations were written down in the 19th Century, our understanding of them remains minimal. The challenge is to make substantial progress toward a mathematical theory which will unlock the secrets hidden in the Navier-Stokes equations.

Image: Sir George Gabriel Stokes (13 August 1819–1 February 1903). Public Domain

This problem is:	Unsolved

Rules:

Rules for the Millennium Prizes

Related Documents:

Official Problem Description

Related Links:

Lecture by Luis Cafarelli

クレイ数学研究所が2000年に100万ドルの懸賞金をかけた７つの問題のひとつ

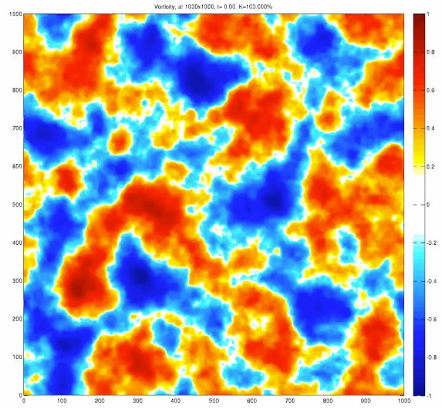
流体の何を理解すれば良いの？

ナビエ・ストークス方程式 (1845年)

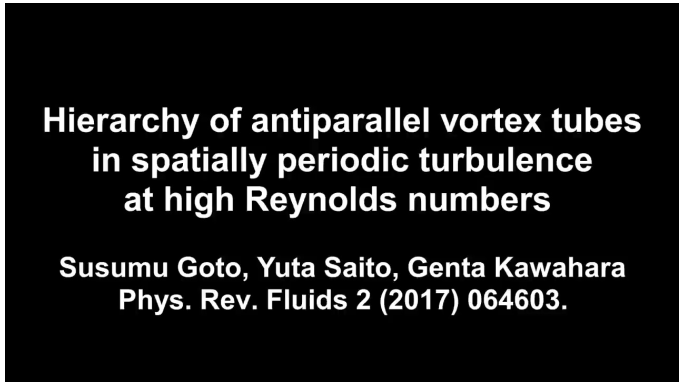
$$\rho\left[\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + (\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{u}\right] = -\boldsymbol{\nabla}p + \mu\Delta\boldsymbol{u}$$

(慣性力)　(圧力)　(粘性力)

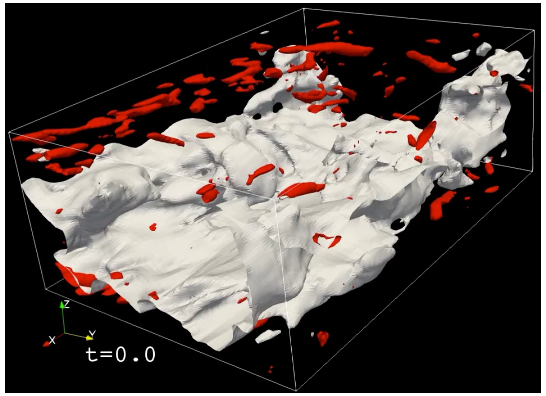
しかし、方程式があるからといって
すぐに「解ける」わけではない　そして、すぐに「分かる」わけでもない



YouTube@ Mi Ian K



YouTube@ Susumu Goto
https://youtu.be/9p0f2UHt8pM



By courtesy of Dr Eiichi Sasaki

まとめ

[Day 1] 流れの方程式
§2: 私たちのNS

- 日常の水や空気の流れはナビエ・ストークス方程式に従う
- 流体には速度場の拡散に対応する粘性が存在する
- 方程式が数値的に解けても、複雑な流れが分かるわけではない

日常を彩る流体力学：
「ながれ」の数理モデル

[Day 1] 流れの方程式
§3 忘れられた存在

流体とはなんだったのか？

ナビエ・ストークス方程式

$$\rho\left[\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}+(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{u}\right]=-\boldsymbol{\nabla}p+\mu\Delta\boldsymbol{u}$$

(慣性力)　(圧力)　(粘性力)

コーシーの運動方程式
（連続体の運動量保存則）

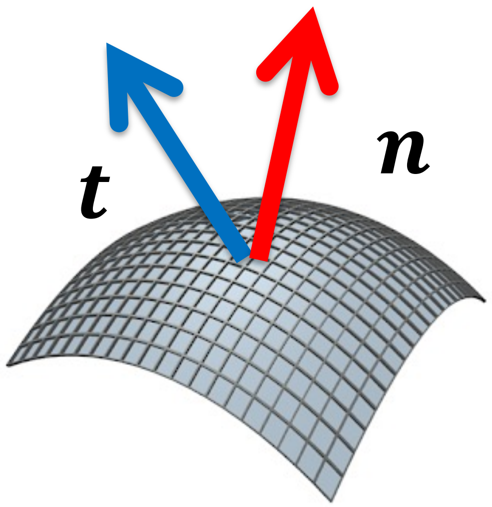
$$\rho\left[\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}+(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{u}\right]=\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\sigma}$$

$\boldsymbol{\sigma}$　：ストレステンソル（応力）

※ 隣り合う流体表面に働く力　$[\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\sigma}]_i=\dfrac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}$

- 流体粒子の表面に働く力　$\boldsymbol{t}$
- コーシーの応力原理

$$\boldsymbol{t}=\boldsymbol{t}(\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{x})$$



- **コーシーの基本定理**

微小領域における面積力のつりあい

$$\boldsymbol{t}=\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{n}\qquad t_i=\sigma_{ij}n_j$$

流体とは？

構成則（構成方程式）

- 流体や弾性体など「どんな物質か」を指定する関数系
- 「物質」の数理モデル
- 水や空気といった(NSに従う)**ニュートン流体**では

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{E}$$

ストークスの流体公理

- $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{E})$
- 空間一様性（$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{E})$は$\boldsymbol{x}$に陽には依存しない）
- 空間等方性（どの方向も等価である）
- $\mathbf{E} = \mathbf{0}$のとき、$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I}$

Fig: Wikipedia

- さらに、 $\boldsymbol{\sigma}$は$\mathbf{E}$の線形関数という条件（＋非圧縮）で $\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{E}$

流体とは？-再考-

力学の公理化の夢

- 1960年代に興った連続体力学の公理化の試み（トゥルースデルやノルによる）
- ニュートンのrational mechanics(有理力学) とヒルベルトの第六問題（物理学の公理化）を強く意識

有理力学における構成方程式の公理（原理）

- 応力決定の原理： $\boldsymbol{\sigma}$は物体の運動履歴で決まる
- 局所作用の原理：ラグランジュ座標$\boldsymbol{a}$の点における$\boldsymbol{\sigma}$はその近傍の運動のみで決まる
- 物質客観性の原理：構成則は観測者の座標系によらない

有理力学からの解答

- 「水は方円の器にしたがう」
- ラグランジュ座標（基準配置）の取り方によらず応答が決まる

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + \boldsymbol{\tau}\left[\mathbf{E}(t-s)\Big|_{s>0}\right]$$

ただし、$\mathbf{E} = \mathbf{0}$のとき、$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I}$

初期条件と境界条件

流体方程式の完全な形

$$\rho\left[\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + (\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{u}\right] = -\boldsymbol{\nabla}p + \mu\Delta\boldsymbol{u}$$

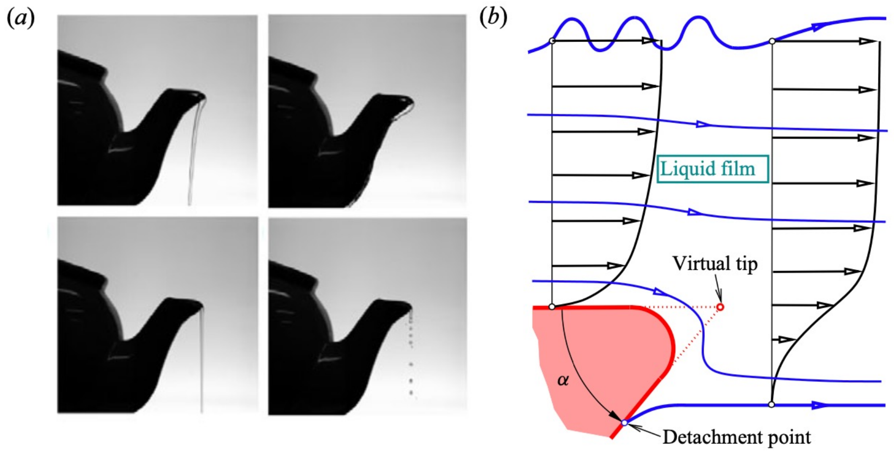
$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{u} = 0 \qquad \boldsymbol{u}\Big|_{t=0} = \boldsymbol{u}_0$$

- 壁面で流体の速度は壁面の速度に一致する（粘着境界条件・滑りなし境界条件・ディリクレ条件）

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_s$$

※ミレニアム問題は境界がない（$\mathbb{R}^3$ or $\mathbb{T}^3$ ）

- 流体間の境界条件は一般には複雑
- （水の場合）表面張力
- 滑りあり境界（$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n} = \boldsymbol{u}_s\cdot\boldsymbol{n}$）



Duez et al. Phys Rev Lett (2010), Scheichl et al. J Fluid Mech (2021)

“God made the bulk; surfaces were invented by the devil”
ウォルフガング・パウリ

まとめ

[Day 1] 流れの方程式
§3: 忘れられた存在

- 流体はラグランジュラベルによらない応答を示す連続体のモデルである
- ナビエ・ストークス方程式に従うのはニュートン流体である
- 方程式を解くためには、初期条件に加えて適切な境界条件が必要である