

# 日常を彩る流体力学： 「ながれ」の数理モデル



## [Day 2] 解

京都大学数理解析研究所・石本 健太

# 昨日のおさらい

連続体(流体・弾性体)力学は  
ミクロと分離された閉じた理論体系  
(原子・分子の存在を仮定しない)

ナビエ・ストークス方程式 (1845年)

$$\rho \left[ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right] = -\nabla p + \mu \Delta \mathbf{u}$$

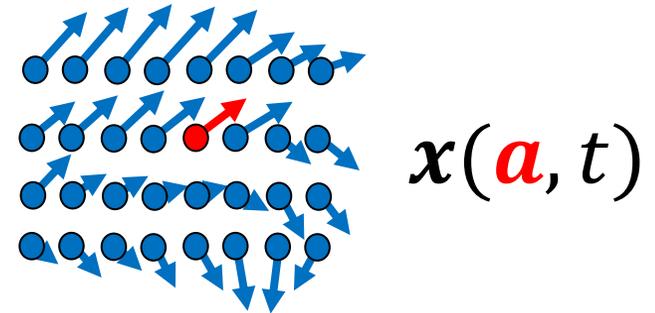
(慣性力) (圧力) (粘性力)

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \mathbf{u} \Big|_{t=0} = \mathbf{u}_0$$

- 壁面で流体の速度は壁面の速度に一致する  
(粘着境界条件・滑りなし境界条件・ディリクレ条件)

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_s$$

- 「水は方円の器にしたがう」
- 流体 = ラグランジュ座標 (基準配置) の取り方によらず応答が決まる物質のモデル
- 水や空気といった (内部構造を持たない) 流体はNS方程式 (運動量保存則・運動方程式) に従う



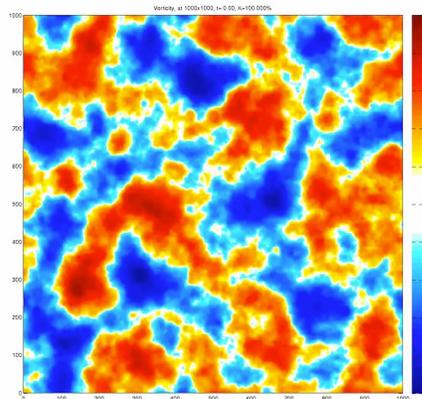
"流体粒子"をラベルづけ  
 $a$  : ラグランジュ座標 (ラベル)

# 流体の何を理解すれば良いの？

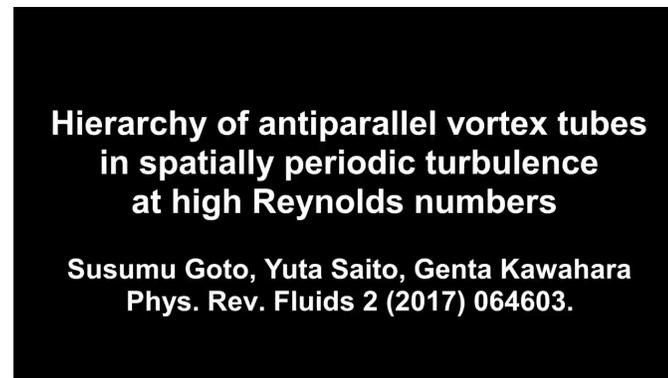
ナビエ・ストークス方程式 (1845年)

$$\rho \left[ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \underbrace{(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}}_{\text{(慣性力)}} \right] = -\underbrace{\nabla p}_{\text{(圧力)}} + \underbrace{\mu \Delta \mathbf{u}}_{\text{(粘性力)}}$$

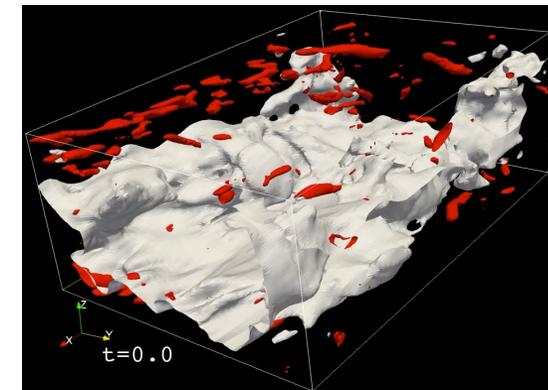
しかし、方程式があるからといって  
すぐに「解ける」わけではない　そして、すぐに「分かる」わけでもない



YouTube@ Mi Ian K



YouTube@ Susumu Goto  
<https://youtu.be/9p0f2UHt8pM>



By courtesy of Dr Eiichi Sasaki

# 日常を彩る流体力学： 「ながれ」の数理モデル

## [Day 2] 解

### §1 真実はいつもひとつ

# ポワズイユ流れ

## ハーゲン・ポワズイユ流れ(1840年頃)

- 圧力駆動による円管内流れ
- ナビエ・ストークス方程式の厳密解 (ストークス、1845)

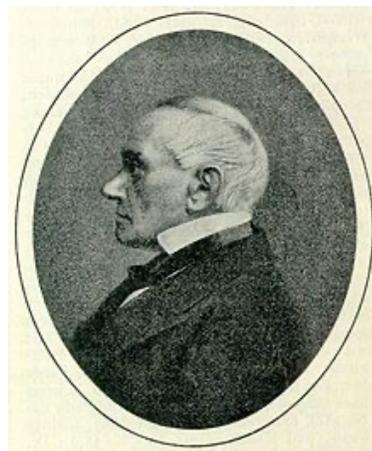
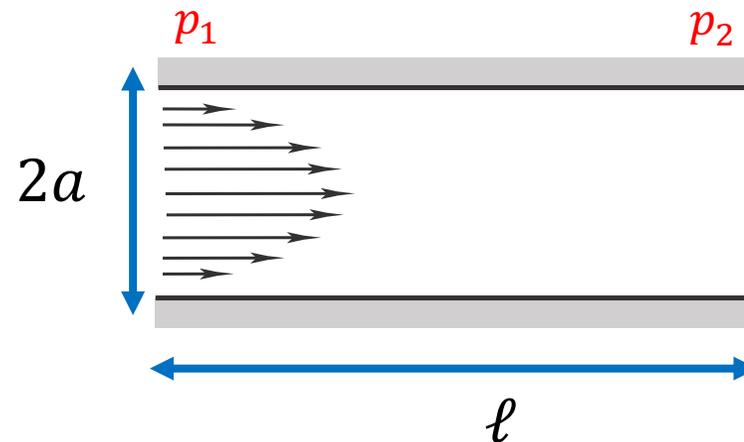
$$\mathbf{u} = (u, v, w)$$

$$u = U \left( 1 - \frac{r^2}{a^2} \right)$$

$$v = w = 0$$

$$Q = \int_S \int_0^\ell u(x, y, z) dx dS = \frac{\pi a^4 (p_1 - p_2)}{8\mu\ell}$$

$$U = \frac{a^4 (p_1 - p_2)}{\mu\ell}$$



ゴットヒルフ・ハーゲン  
(1797-1884)



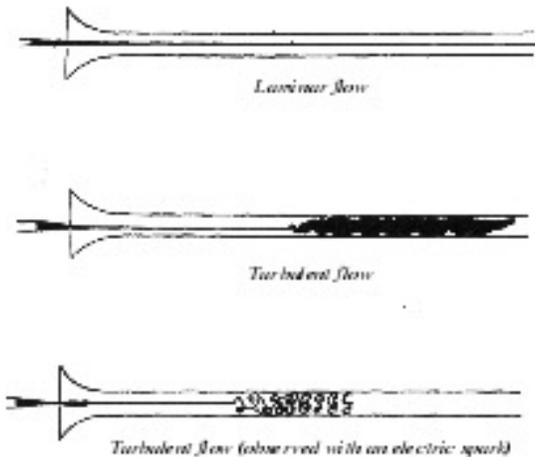
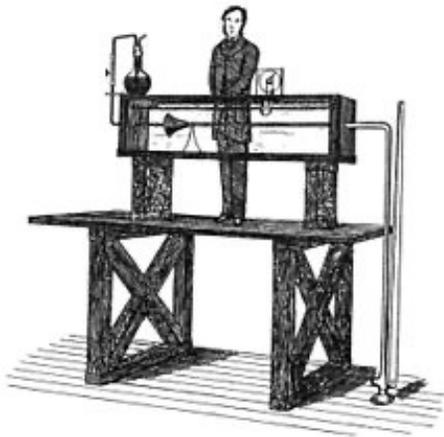
ジャン・ポワズイユ  
(1797-1869)

# 無次元数

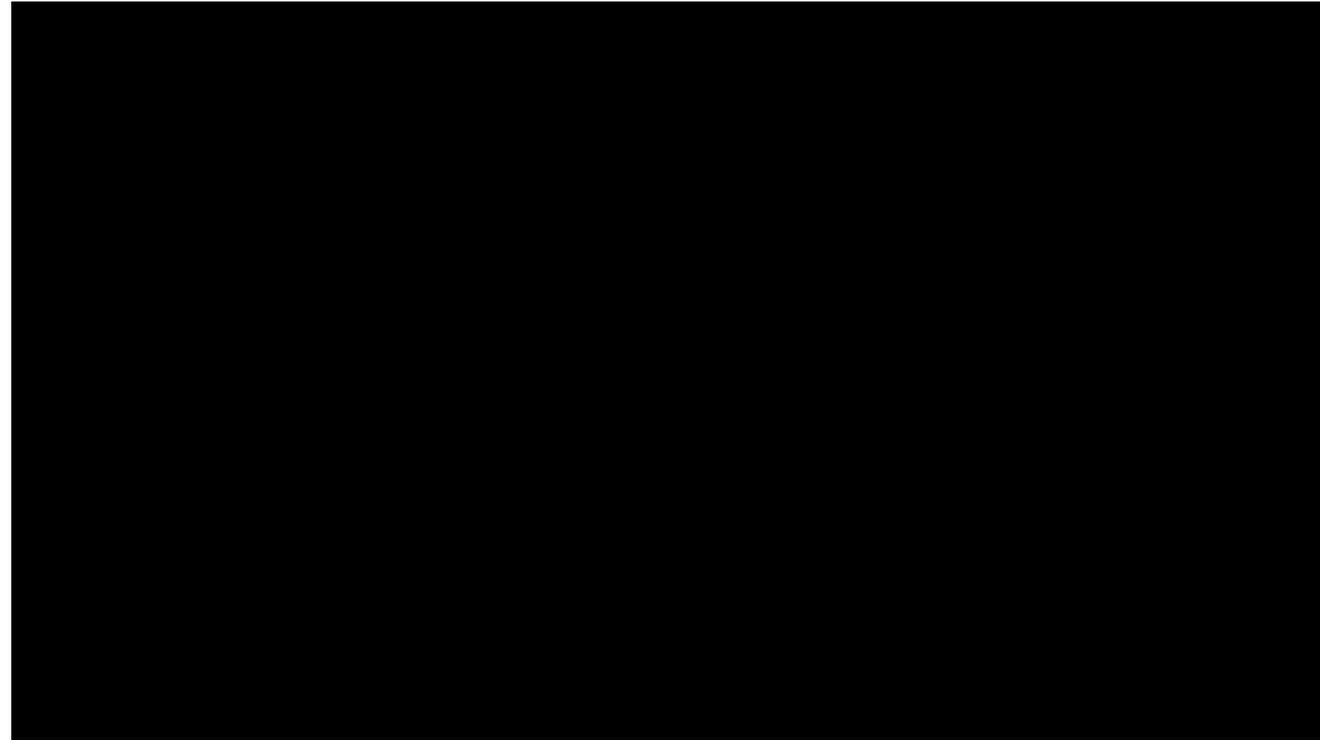
## レイノルズ数

- 流れの性質はあるひとつの定数で定まる

$$Re = \frac{\rho UL}{\mu} \quad L = 2a \quad U = u \Big|_{r=0}$$



Reynolds, Proc R Soc Lond A (1883)



YouTube @ Fluid Dynamics  
<https://youtu.be/BBiR6FWmyv4>

# ナビエ・ストークス方程式とレイノルズ数

## 方程式の無次元化

$$\rho \left[ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right] = -\nabla p + \mu \Delta \mathbf{u} \longrightarrow \frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial t^*} + (\mathbf{u}^* \cdot \nabla^*) \mathbf{u}^* = -\nabla^* p^* + \frac{1}{Re} \Delta^* \mathbf{u}^*$$

## レイノルズ数

$U$ : 現象の代表的な速さ  $\mathbf{u} = U \mathbf{u}^*$   
 $L$ : 現象の代表的な長さ  $\nabla = \nabla^* / L$

$$Re = \frac{\rho U L}{\mu} = \frac{\text{慣性効果}}{\text{粘性効果}}$$

$Re$ : 小 層流 (安定な定常解)  
 $Re$ : 大 乱流 (解が不安定化しカオスへ)

## Buckingham の $\pi$ 定理

物理次元は基本単位 (時間、長さ、質量、...) の積で記述できる。  
それぞれの変数を代表的なスケールで無次元化すると、  
独立な無次元量のみで系の性質を決めることができる

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \quad \text{動粘性係数}$$

# 熱対流のパターン

レイリー・ベナール不安定性

$$\rho_0 \left[ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right] = -\nabla p + \mu \Delta \mathbf{u} - \mathbf{g} [1 - \alpha(T - T_0)]$$

$$\left[ \frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) T \right] = \kappa \Delta T$$

$$\mathbf{u} \Big|_{z=0} = \mathbf{u} \Big|_{z=H} = 0 \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

$$T \Big|_{z=0} = T_0 \quad T \Big|_{z=H} = T_0 + \Delta T$$

- レイリー数があるところまで大きくなると、熱伝導状態から対流状態に遷移する

$$Ra = \frac{g \alpha \beta H^3 \Delta T}{\kappa \nu} \approx 1708$$

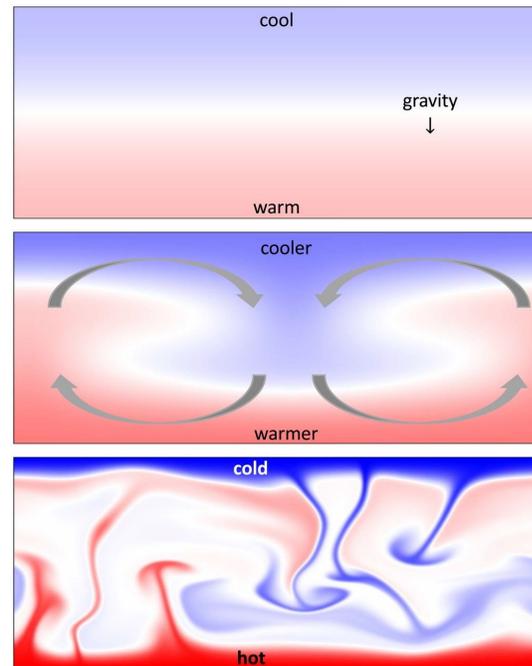


Fig: Doering (2020)

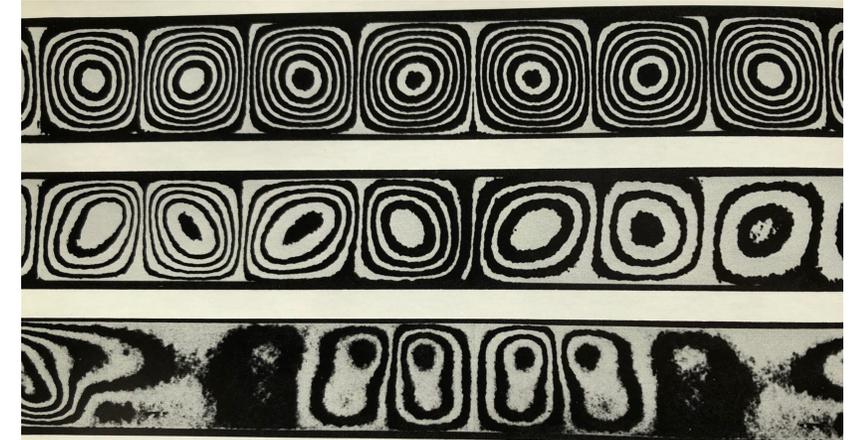


Fig: van Dyke, *An Album of Fluid Motion*

# ローレンツモデル

## ローレンツ方程式(1963年)

熱対流（自由境界）の形成に必要な  
「最も不安定な項のみに注目」して近似モデルを導出

$$\frac{dx}{dt} = -px + py$$

$$\frac{dy}{dt} = -xz + rx - y$$

$$\frac{dz}{dt} = xy - bz$$

$$p = \frac{\nu}{\kappa} \quad \text{プラントル数}$$

$$b = \frac{4}{1 + k^2 h^2}$$

$$r = \frac{Ra}{Ra_c}$$

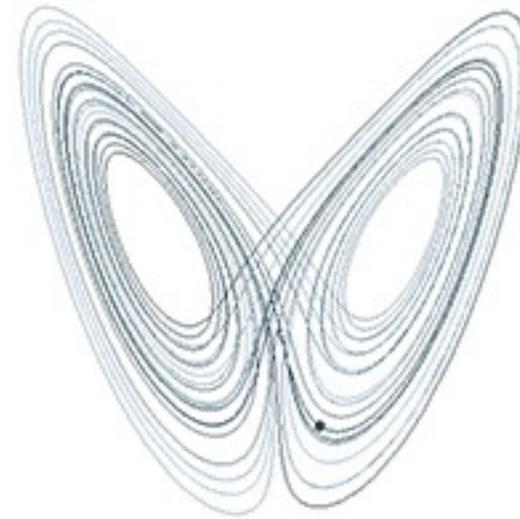
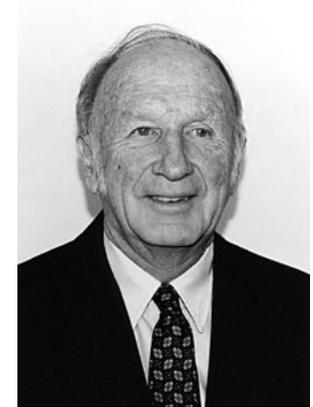


Fig: Wikipedia



エドワード・ローレンツ  
(1917-2008)

$0 < r < 1$       熱伝導状態

$1 < r < 24.74$       対流状態

$r > 24.74$       カオス状態

# ローレンツモデル

ローレンツ方程式(1963年)

$$\frac{dx}{dt} = -px + py$$

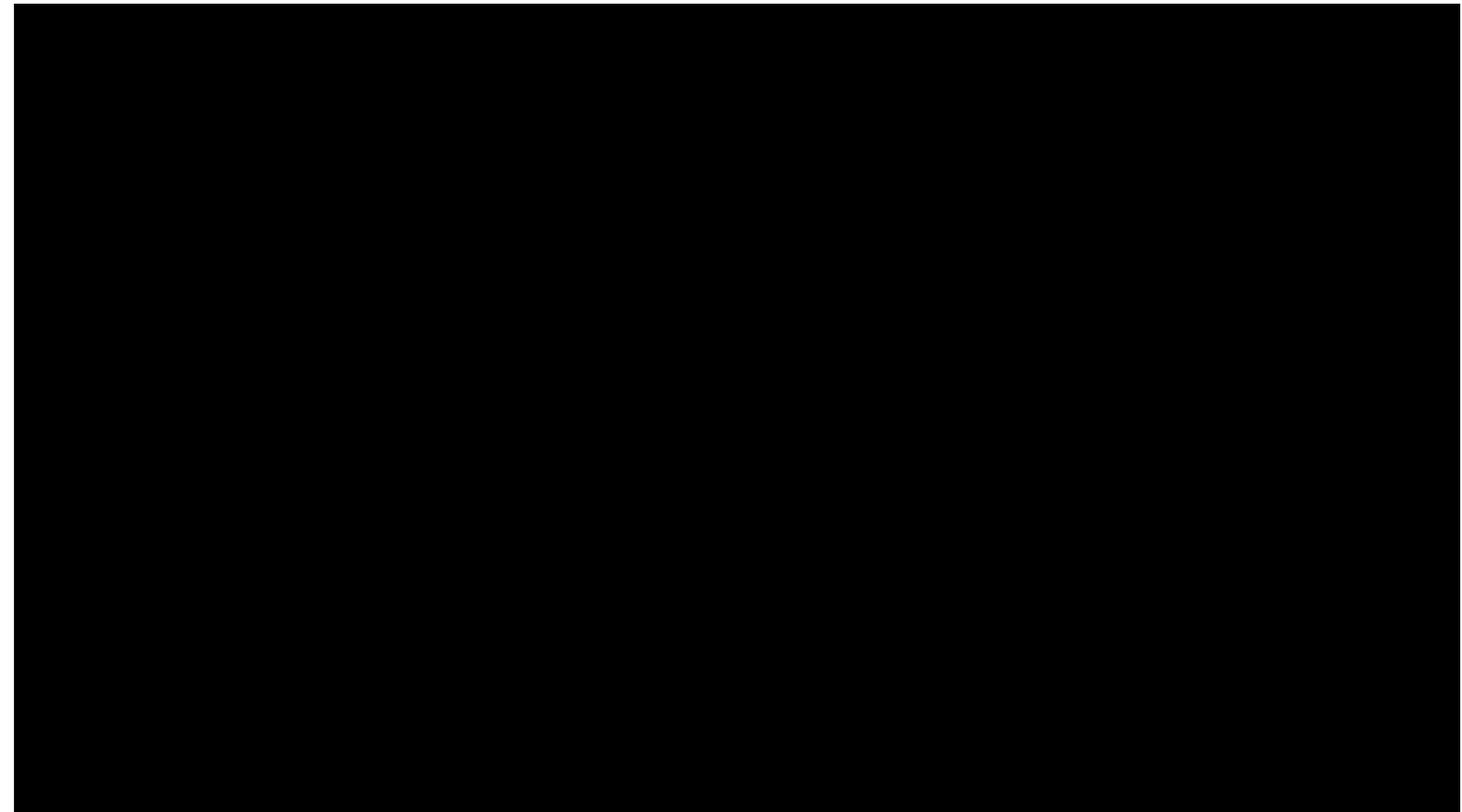
$$\frac{dy}{dt} = -xz + rx - y$$

$$\frac{dz}{dt} = xy - bz$$

$0 < r < 1$       熱伝導状態

$1 < r < 24.74$       対流状態

$r > 24.74$       カオス状態



restart @9:05

YouTube@Ross School  
[https://youtu.be/CeCePH\\_HL0g](https://youtu.be/CeCePH_HL0g)

## (連続)力学系

時間・状態空間・時間発展ルール  
の3つ組

$$\frac{dX}{dt} = F(X, t)$$

$X \in X$  (流体方程式のある時刻の)解 = 流れ場

$F: X \times [0, T] \rightarrow X$  解軌道

解の分岐構造や力学系の構造を調べる

流体ダイナミクスを解空間(無限次元)の軌道として捉える

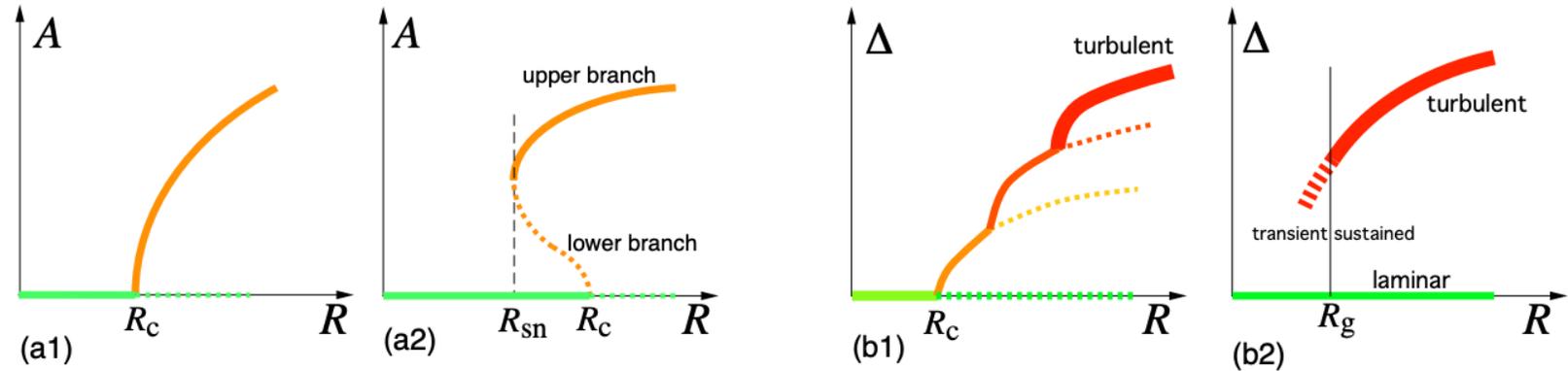
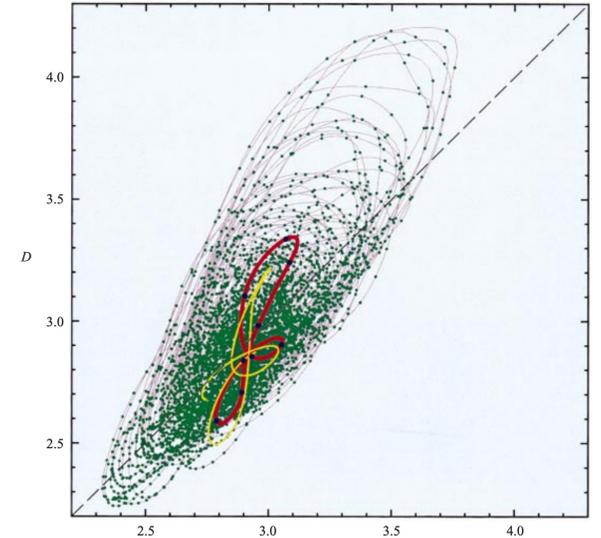


Fig: Manneville, Mech Eng Rev (2016)

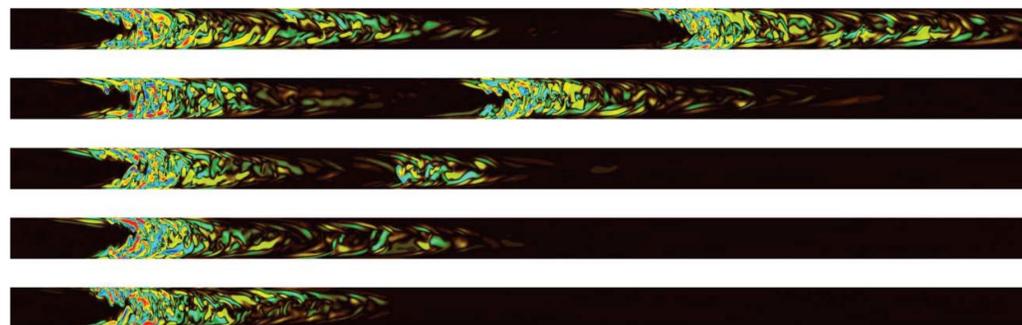


Kawahara & Kida, J Fluid Mech (2001)

# ポワズイユ流れ -再考-

## 乱流へのルート？

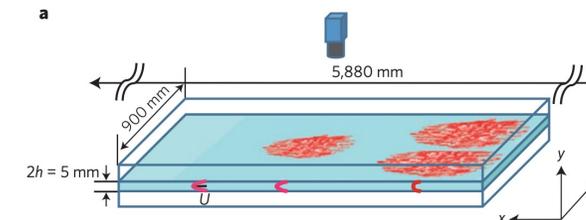
- 放物型の層流は低レイノルズ数では唯一解
- 任意のレイノルズ数で線形安定（と考えられている）



Avila et al, Science (2011)

## 局所的な乱流構造

- 局所的な渦構造の生成・消滅・分裂と全体への伸張
- 乱流転移とパーコレーション（浸透）モデルの類似性（統計力学における臨界現象のユニバーサリティクラス）



Sano & Tamai, Nat Phys (2016)

## [Day 2] 解

### §1: 真実はいつもひとつ

- 複雑な流れを力学系の軌道として見るアプローチがある
- 無次元化により現れるレイノルズ数を用いて力学系の構造を分類できる
- ナビエ・ストークス方程式の限らず多くの非線形系で用いられる手法である

# 日常を彩る流体力学： 「ながれ」の数理モデル

[Day 2] 解

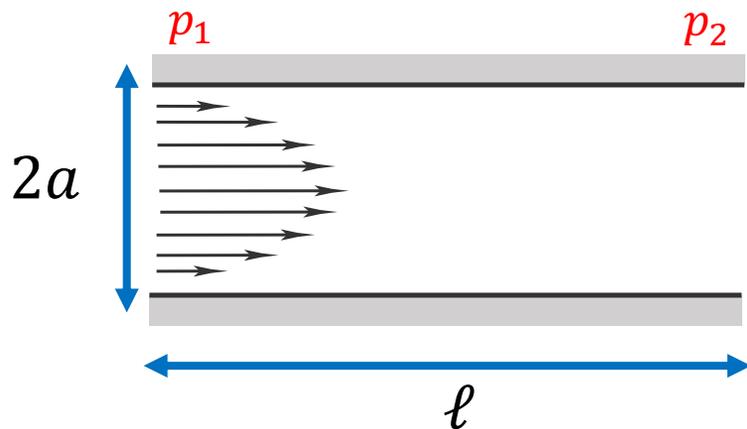
§2 いつも心に流体力学

# ポワズイユと生物流体力学

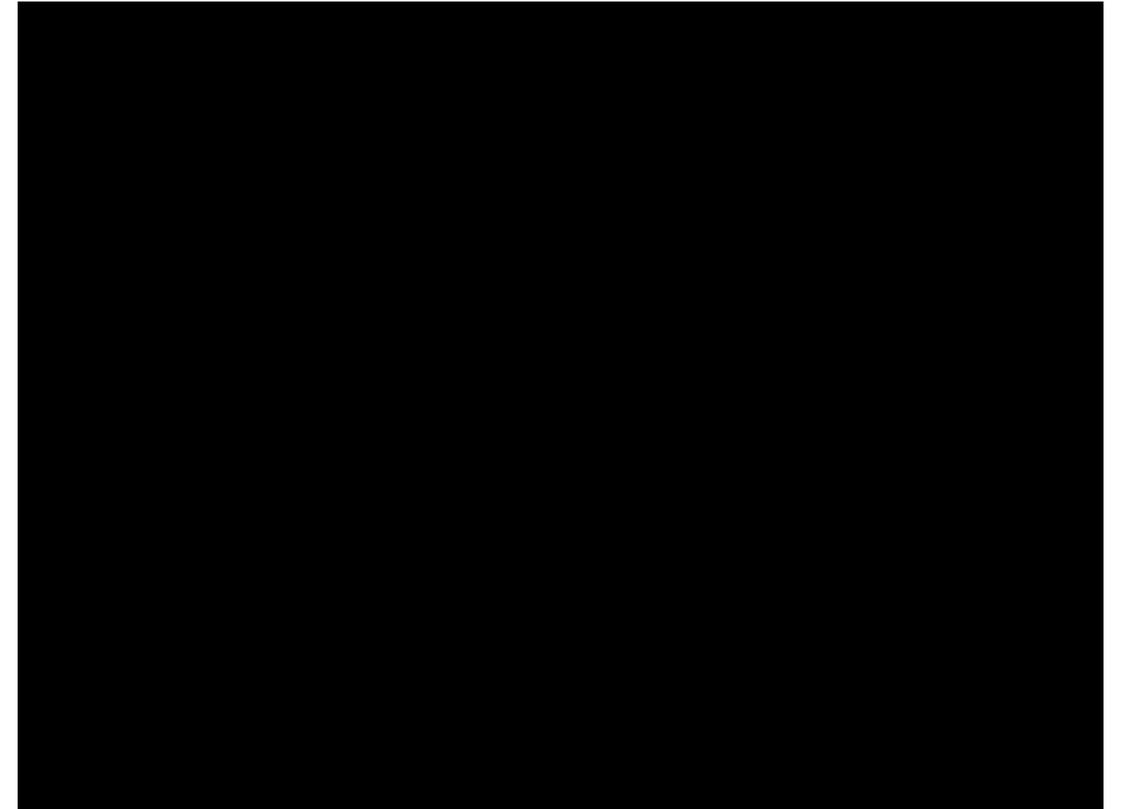
## ポワズイユ流れ

- 血流の研究が発端
- 生物に関わる流体力学 = 生物流体力学

$$u = U \left( 1 - \frac{r^2}{a^2} \right) \quad U = \frac{a^4(p_1 - p_2)}{\mu \ell}$$



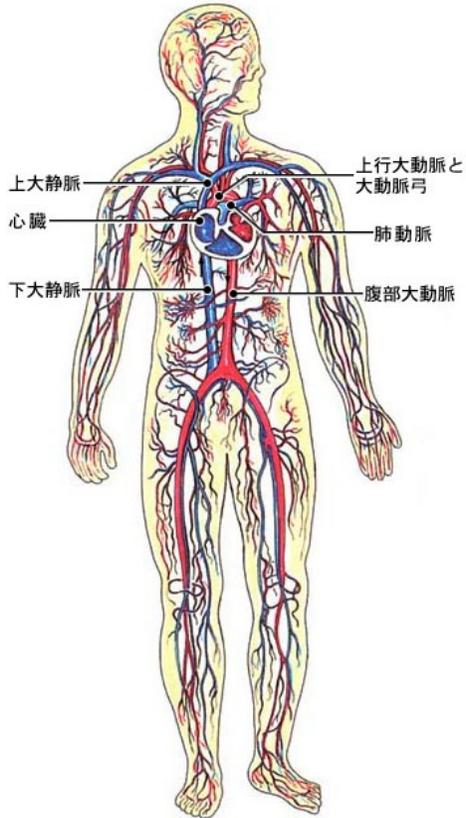
ジャン・ポワズイユ  
(1797-1869)



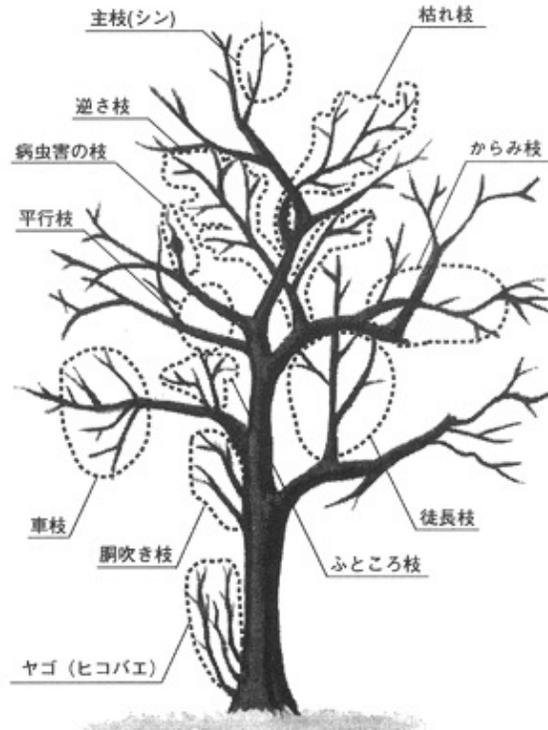
YouTube@ Society for Industrial and Applied Mathematics  
<https://youtu.be/gE8qms8P4jg>

# 血流のフラクタル構造

## ●循環器系の構造



【心臓と血管系】



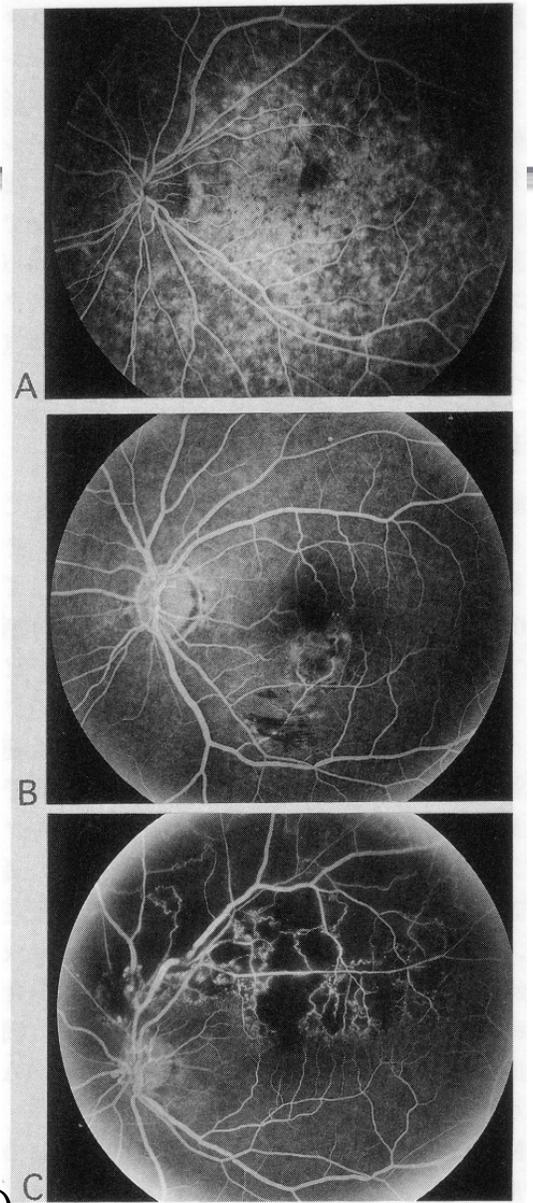
一般社団法人 日本緑化センターウェブサイトより  
[http://www.jpgreen.or.jp/kyoukyu\\_jyouhou/gijyutsu/sentei/index.html](http://www.jpgreen.or.jp/kyoukyu_jyouhou/gijyutsu/sentei/index.html)

時事メディカルウェブサイトより  
<https://medical.jiji.com/medical/003-0011-11>

## ヒトの網膜

フラクタル次元 $D$  ( $1 < D < 2$ )

Matsuo & Ohno-Matsui, Med Imag Tech (1997)



# 血管分岐の3乗則

## マレーの法則 (1926年)

- 血管の分岐前と分岐後の血管半径に関する法則
- 輸送に関わるエネルギー損失を最小にする

$$r^3 = r_1^3 + r_2^3$$

- 長さ $\ell$ 、半径 $r$ の血管に流れを輸送するための (単位時間あたり) エネルギー
- 血管表面でのエネルギー損失 + 体積に比例する 血液の維持に必要なエネルギー

$$P = \frac{8\mu\ell Q^2}{\pi r^4} + C\pi r^2\ell \quad \frac{dP}{dr} = 0 \quad \longrightarrow \quad Q = \frac{\pi}{4} \sqrt{\frac{C}{\mu}} r^3$$

$$Q = \sum_k Q_k \quad \longrightarrow \quad r^3 = \sum_k r_k^3$$

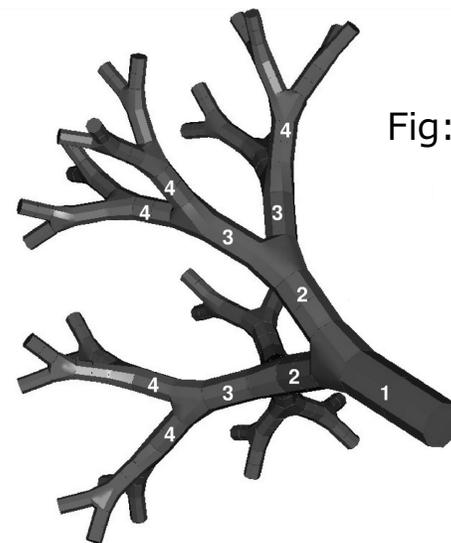
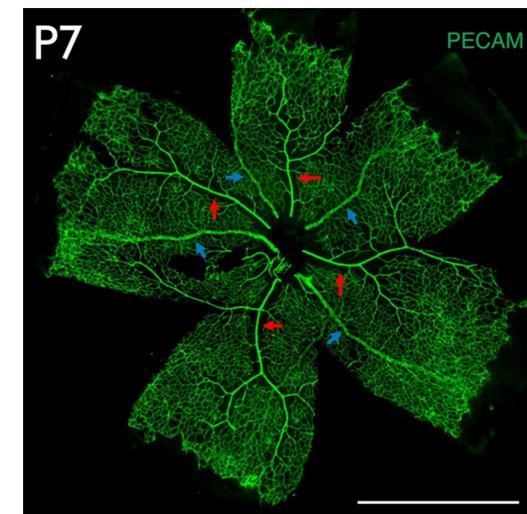


Fig: Moreau & Mauroy (2015)



## マウスの網膜

Iizuka et al, PLoS ONE (2020)

# クライバー則

## クライバー則(1947年)

$$B \propto M^{\frac{3}{4}}$$

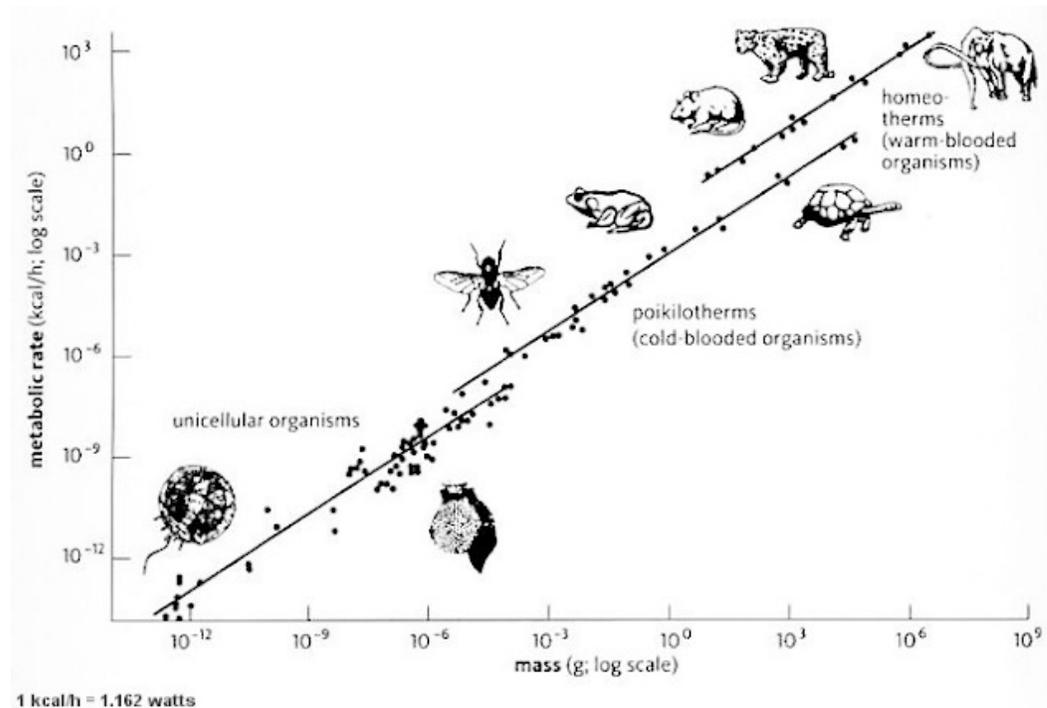
$B$  : 基礎代謝 (単位時間のエネルギー消費)

$M$  : 質量

異なるサイズに生物における統一的な法則を目指して

**べき乗則 = アロメトリー**

エネルギーの必要量が表面積に比例するなら (表面から熱が逃げるため)  $B \propto M^{\frac{2}{3}}$



Hemmingsen (1960)

# 血流のフラクタル構造による説明

## WBE理論 (1997年)

- **(仮定)** ネットワークはフラクタル構造
- **(仮定)** Volume-filling (直線部分を含むような球の体積は分岐前後で不変)
- **(仮定)** 最終サイズは生き物の大きさによらない (例: 毛細管による拡散現象)
- **(仮定)** エネルギーが最小になるようにネットワークは決まる (流体抵抗が最小になる)

$n_k =: n$  枝分かれの数

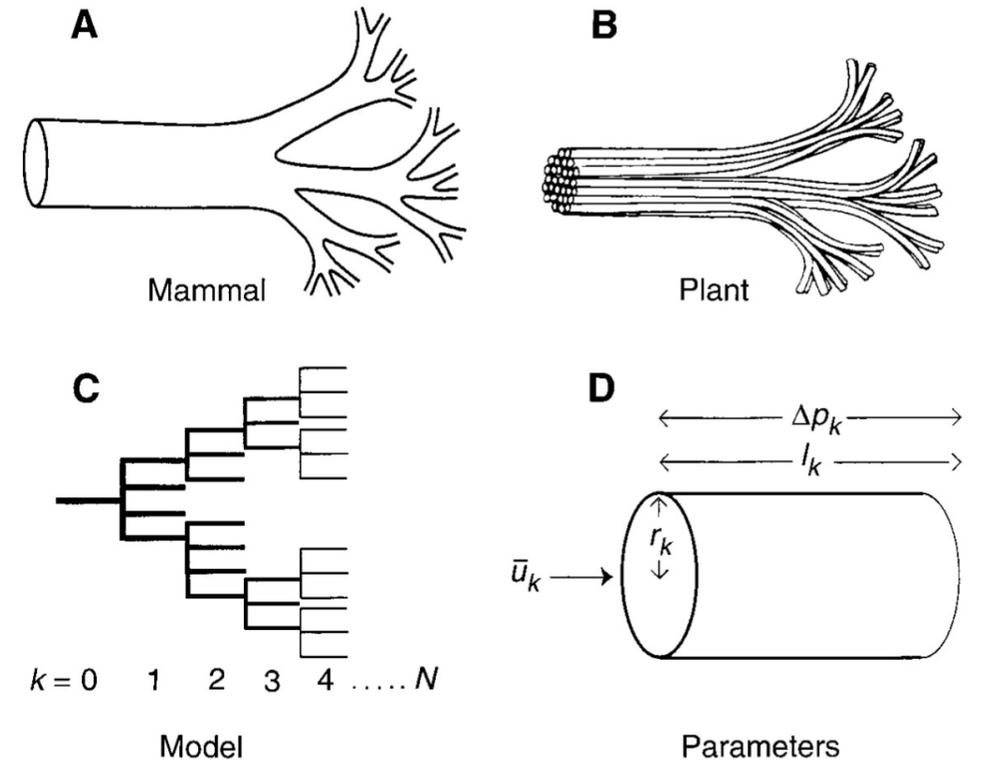
$$\beta_k = \frac{r_{k+1}}{r_k} =: \beta$$

$$\gamma_k = \frac{\ell_{k+1}}{\ell_k} =: \gamma$$

$$B \propto Q_0 \propto M^a$$

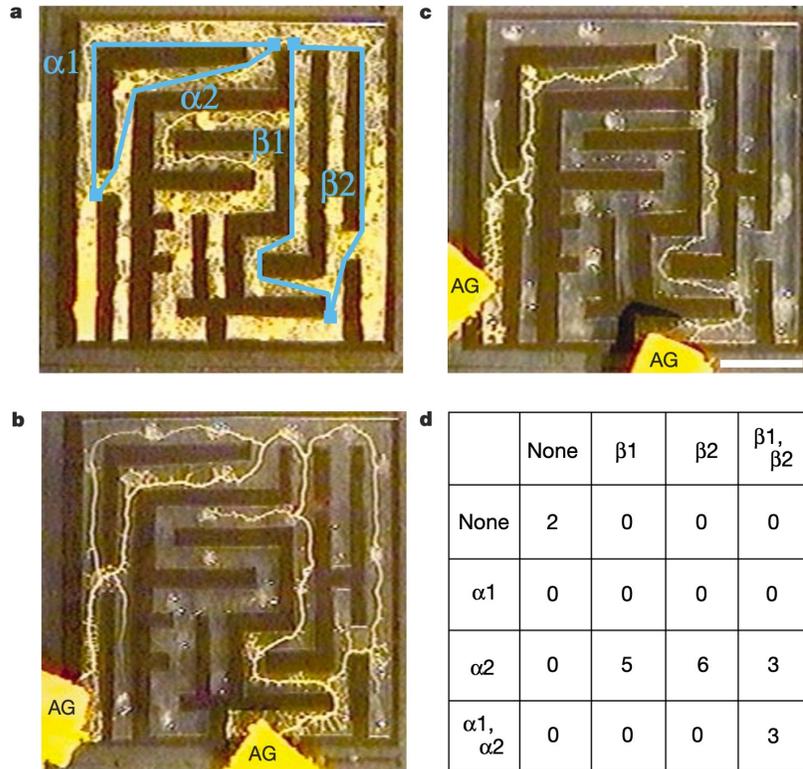
$$a = -\frac{\log n}{\log(\gamma\beta^2)} \longrightarrow a = \frac{3}{4}$$

血管が剛体のパイプだとすれば



West et al. Science (1997)

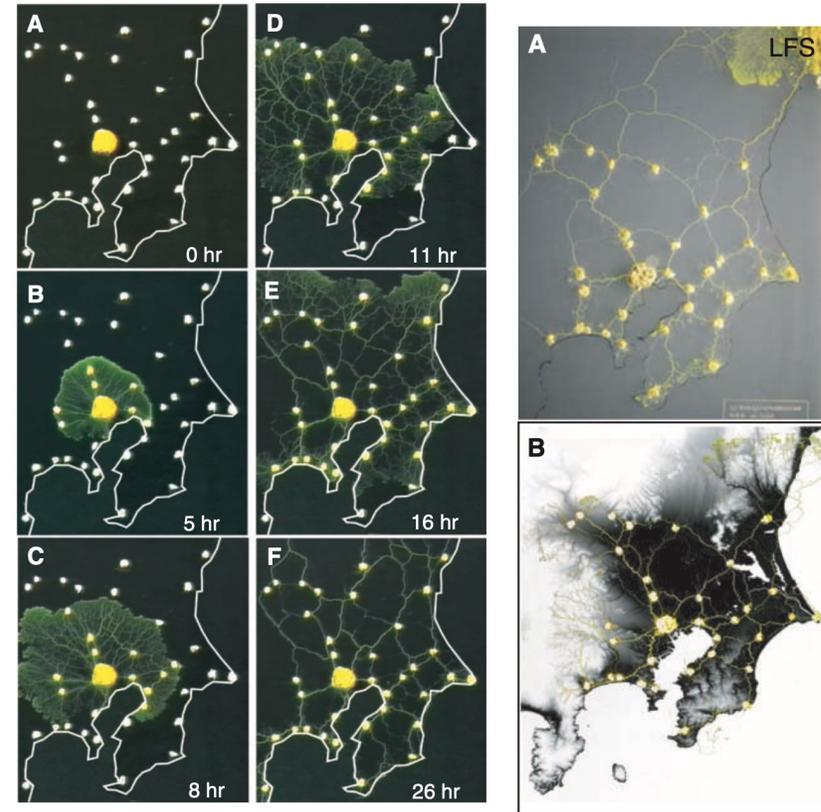
# 粘菌のを見つける解



Nakagaki et al. Science (2000)



イグノーベル  
認知科学賞 (2008)



Tero et al. Science (2010)

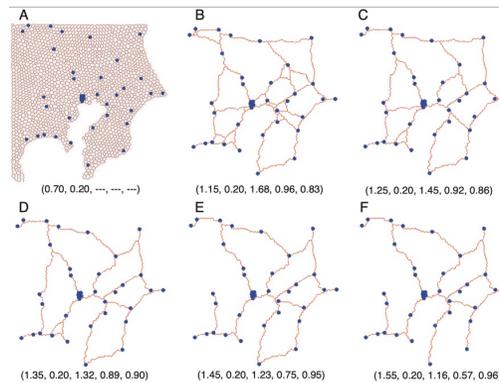
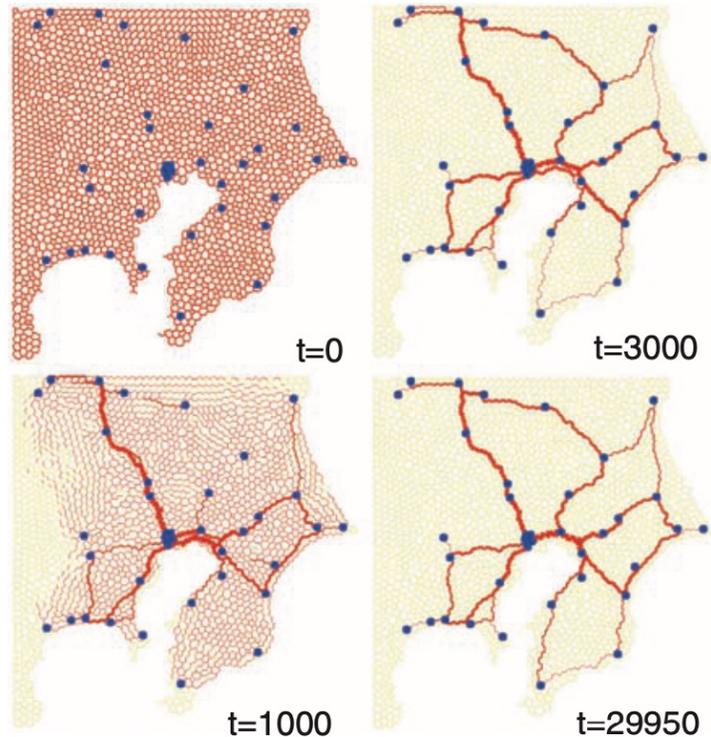


イグノーベル  
交通計画賞 (2010)

# 粘菌ネットワーク

## 流体モデル

- 粘菌を血管網と同様にモデル化
- よく流れるところは太く、使われないところは消える



Tero et al. Science (2010)

$$Q_{ij} = \frac{\pi r^4 (p_i - p_j)}{8\mu L_{ij}} = \frac{D_{ij} (p_i - p_j)}{L_{ij}}$$

$$\sum_j Q_{1j} = I_0 \quad \sum_j Q_{2j} = -I_0 \quad \sum_{i \geq 3} Q_{ij} = 0$$

$$\frac{dD_{ij}}{dt} = f(|Q_{ij}|) - D_{ij}$$

$$f(x) = \frac{x^\gamma}{1 + x^\gamma}$$

# 学術変革領域「ジオラマ行動力学」

- 生き物（原生生物）の環境適応能力とアルゴリズム
- 「力学」の名の下に定式化し原生知能を明らかにする



代表：中垣俊之氏（北大）2021年度～2025年度

<https://diorama-ethology.jp/>

## [Day 2] 解

### §2: いつも心に流体力学

- 生物現象の流体力学も古くから研究が進められてきた
- 自然の形のデザインも流体力学の制限を強く受けている
- 生命は長い進化の中で最適な解を見つけているのだろうか

# 日常を彩る流体力学： 「ながれ」の数理モデル

[Day 2] 解

§3 流体的ビジネスマナー

# 英国式アカデミックマナー . . .

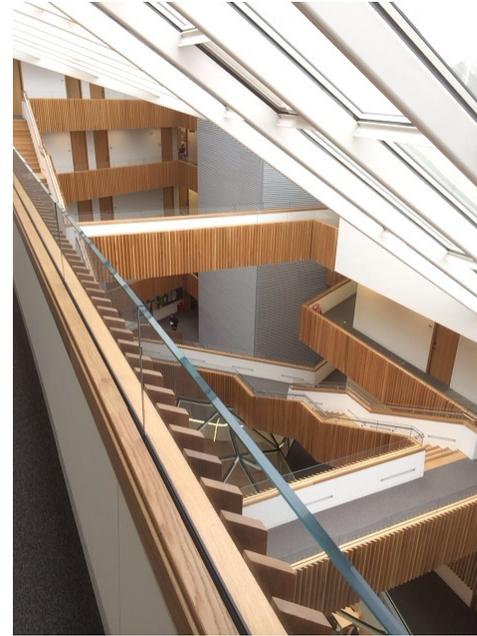


セントメアリー教会からの眺望



クライストチャーチカレッジ

# 数学研究所 アンドリュー・ワイルズ・ビルディング



“Let no one ignorant of geometry enter!”  
プラトン／アカデメイア

“A mathematician is a device for turning coffee into theorems”  
アルフレード・レーニ

# なぜコーヒーはこぼれるのか？

PHYSICAL REVIEW E 85, 046117 (2012)

## Walking with coffee: Why does it spill?

H. C. Mayer and R. Krechetnikov

*Department of Mechanical Engineering, University of California, Santa Barbara, California 93106, USA*

(Received 23 December 2011; published 26 April 2012)

In our busy lives, almost all of us have to walk with a cup of coffee. While often we spill the drink, this familiar phenomenon has never been explored systematically. Here we report on the results of an experimental study of the conditions under which coffee spills for various walking speeds and initial liquid levels in the cup. These observations are analyzed from the dynamical systems and fluid mechanics viewpoints as well as with the help of a model developed here. Particularities of the common cup sizes, the coffee properties, and the biomechanics of walking proved to be responsible for the spilling phenomenon. The studied problem represents an example of the interplay between the complex motion of a cup, due to the biomechanics of a walking individual, and the low-viscosity-liquid dynamics in it.



イグノーベル  
流体力学賞 (2012)



Mayer & Krechetnikov, Phys Rev E (2012)

パソコンに飲み物をこぼす人のイラスト



@いらすとや

仕事中にうっかりコーヒーをノートパソコンにこぼしてしまった人のイラストです。

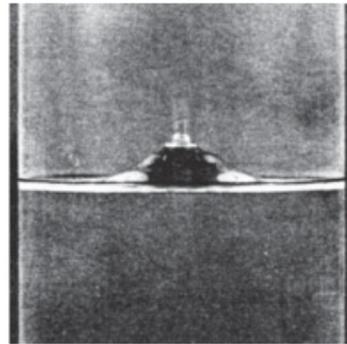
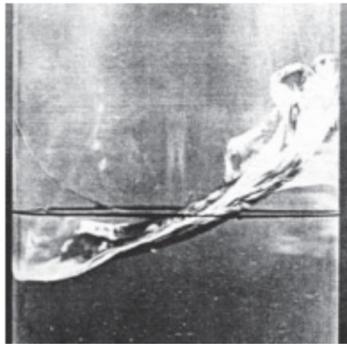
# 水面波とスロッシング

- スロッシング
- 渦なし・非粘性・微小変形
- 円柱タンク(高さ $H$ , 半径 $R$ )、重力( $g$ )、表面張力( $\sigma$ )
- ラプラス方程式+自由境界条件

$$\mathbf{u} = \nabla\phi \quad \nabla^2\phi = 0$$

- 基本振動数 (固有振動数)  $J'_m(\epsilon_{mn}) = 0$

$$\omega_{mn}^2 = \frac{g\epsilon_{mn}}{R} \tanh\left(\frac{\epsilon_{mn}H}{R}\right) \left[1 + \frac{\sigma}{\rho g} \left(\frac{\epsilon_{mn}}{R}\right)^2\right]$$



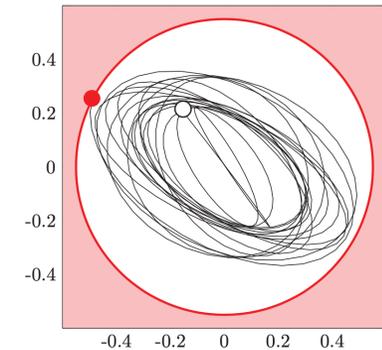
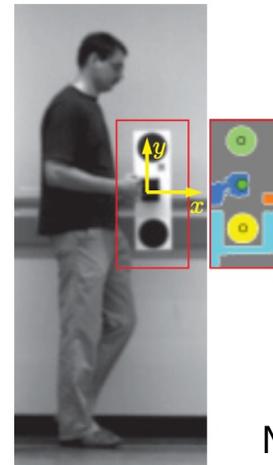
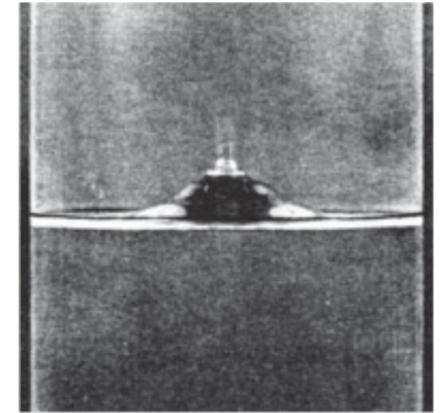
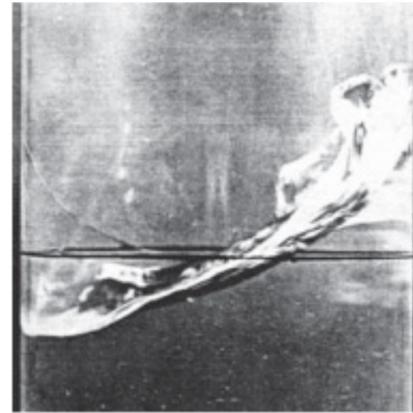
Mayer & Krechetbikov, Phys Rev E (2012)



YouTube@ JSME FED  
<https://youtu.be/wk4UhP3cTs4?t=30>

# 歩行のバイオメカニクス

- 表面張力は効かない
- 表面張力波 = さざ波 (波長2cm以下が目安)
- もっとも低振動のモード=2.6-4.3Hz
  
- 歩行の振動数  $\approx$  コーヒーカップの振動数  $\approx$  1-2.5 Hz
- 共鳴振動数と近くなってしまう
  
- 前後揺れとピッチング揺れが問題
- 縦揺れ・横揺れは問題ない
  
- 加速度が大きくなるとこぼれる
- 歩行に現れるノイズが旋回流を生み出す
- 球面振り子の数理モデル



Mayer & Krechetbikov, Phys Rev E (2012)

# じゃあ結局どうすれば良いの？

## 流体力学の観点から

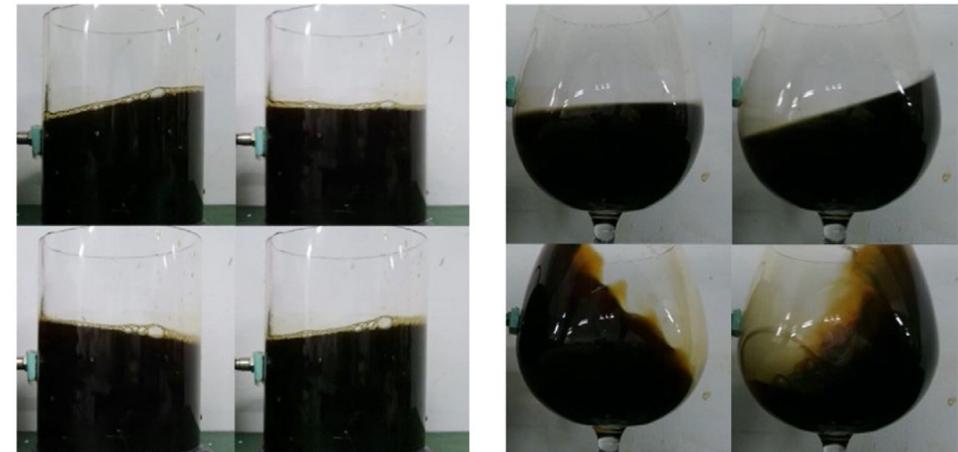
- 柔らかい入れ物
- バッフル（波を消すもの）

Mayer & Krechetbikov (2012)



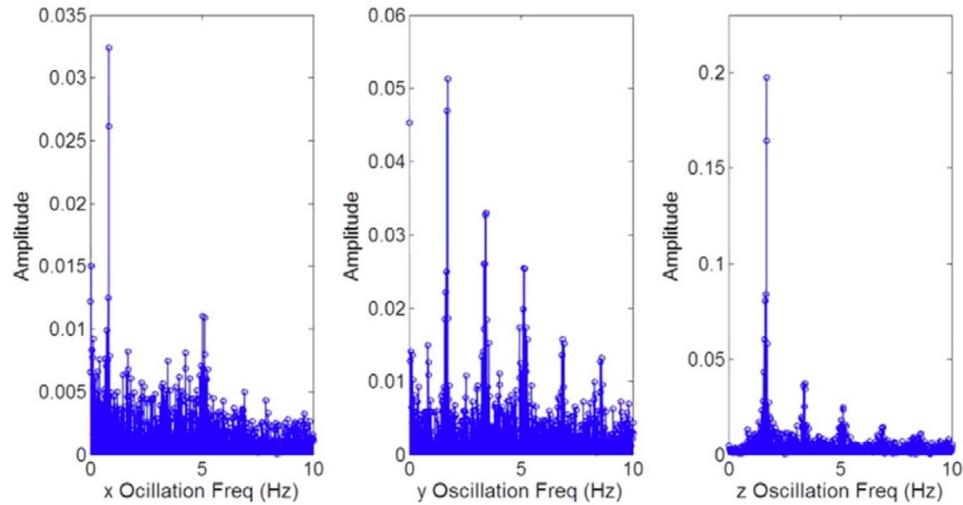
YouTube@CouchToons  
<https://youtu.be/-qHzwPjazfk>

## 再検討



# じゃあ結局どうすれば良いの？

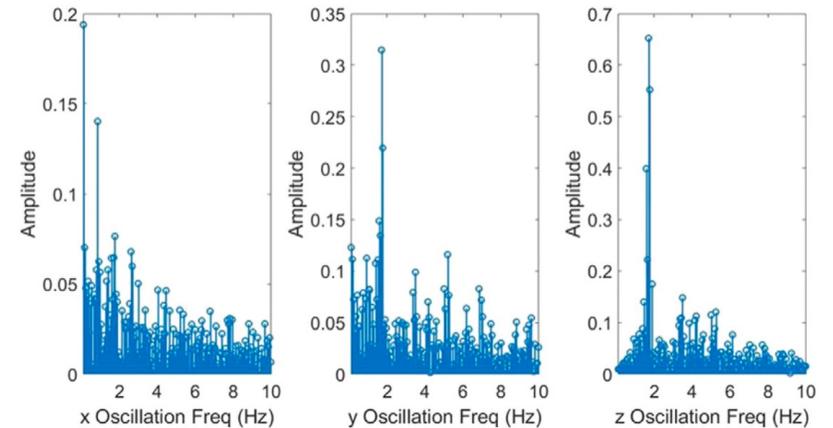
- 後ろ向きに歩く、鷺掴みをする



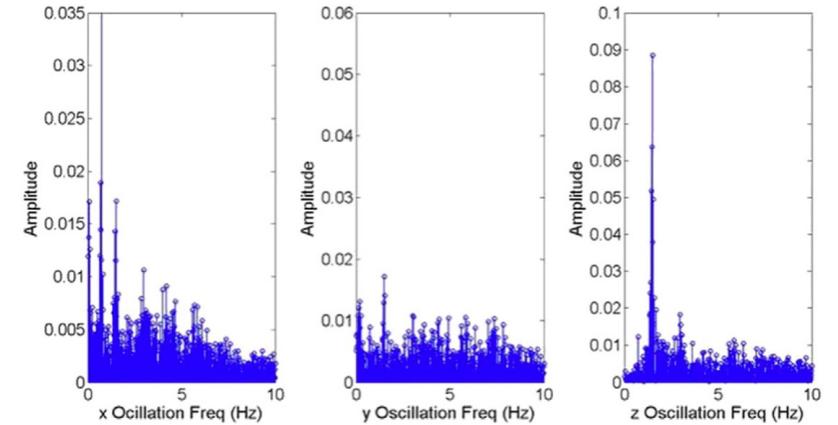
Han, Ach Life Sci (2016)



イグノーベル  
流体力学賞 (2017)



後ろ向きに歩く



鷺掴みで歩く

# まだまだある流体的ビジネスマナー



国際会議@ポルトガル (2013)

## ワインの涙

- マランゴニ効果
- 表面張力の不均一性による流れ

## ビールの泡



国際会議@アイルランド (2018)



YouTube@Las Vegas Review-Journal

[https://youtu.be/J27\\_xI0sPAg?t=27](https://youtu.be/J27_xI0sPAg?t=27)

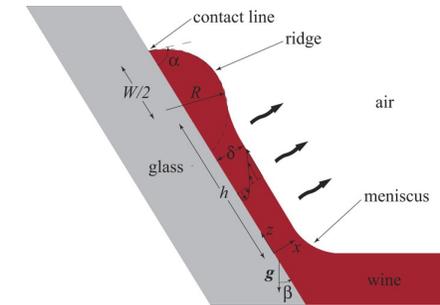


Fig: Wikipedia Venerus & Simavilla, Sci Rep (2015)

SCIENTIFIC REPORTS

OPEN Bubble cascade in Guinness beer is caused by gravity current instability

Tomoaki Watamura<sup>1</sup>, Fumiya Iwatsubo<sup>1</sup>, Kazuyasu Sugiyama<sup>1</sup>, Kenichiro Yamamoto<sup>2</sup>, Yuko Yotsumoto<sup>2</sup> & Takashi Shiono<sup>2</sup>

Watamura et al, Sci Rep (2019)

## [Day 2] 解 §3: 流体的ビジネスマナー

- 身近な現象は意外と難しい
- 波や泡・表面張力なども流体力学の主要なテーマ
- それでは素敵なアフターファイブを