令和４年度・数学入門公開講座

3 August 2022

# 日常を彩る流体力学：
## 「ながれ」の数理モデル

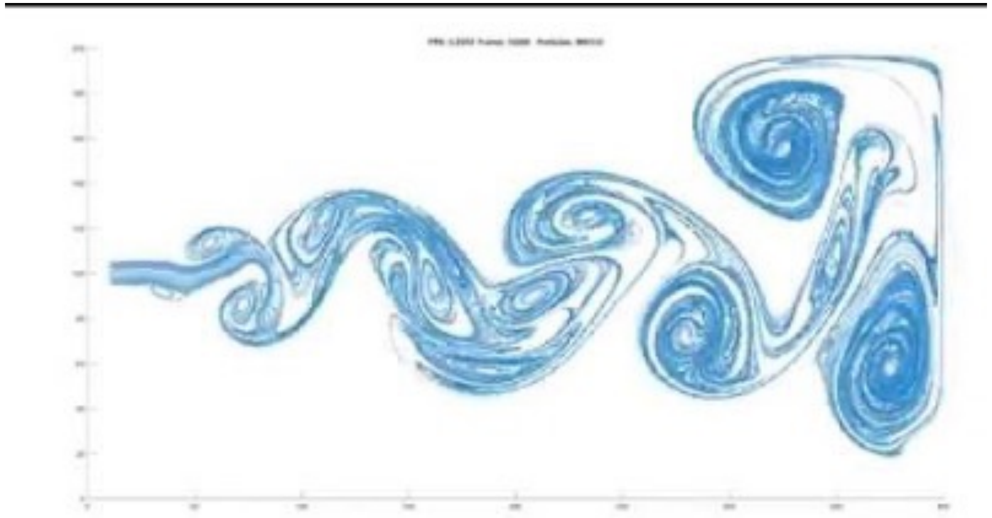
## ［Day 3］渦

京都大学数理解析研究所・石本 健太

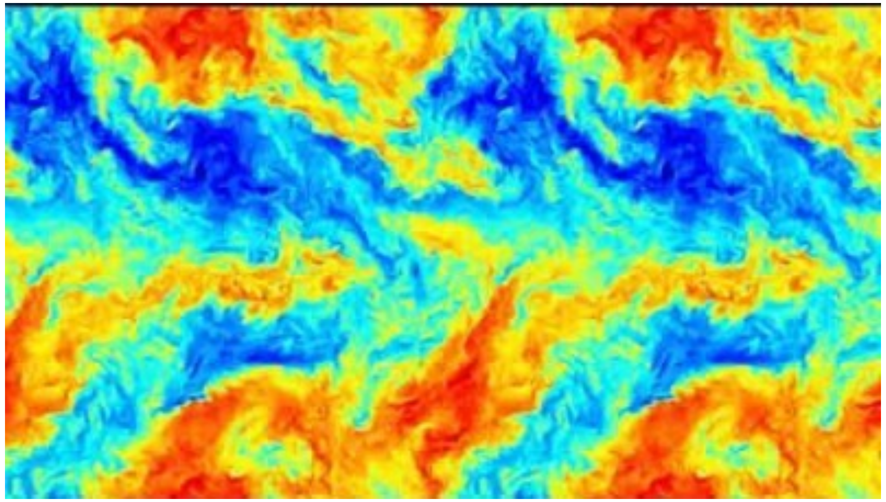
# 高レイノルズ数の複雑な流れ

**複雑な流体運動（ナビエ・ストークス方程式の解）の鍵を握るのは渦？**

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}^*}{\partial t^*} + (\boldsymbol{u}^* \cdot \boldsymbol{\nabla}^*)\boldsymbol{u}^* = -\boldsymbol{\nabla}^* p^* + \frac{1}{Re}\Delta^* \boldsymbol{u}^*$$



YouTube@Robert S.
https://youtu.be/cM47L5RddsM



YouTube@Jordan Raddick
https://youtu.be/tkFL3_0P0Gk

# 日常を彩る流体力学：
## 「ながれ」の数理モデル

# [Day 3] 渦
## §1 永遠のシンボル

# 古今東西　渦巻き(スパイラル)模様

古代ギリシャ
（紀元前8世紀）
Fig: Wikimedia commons

ゴッホ「星月夜」
Fig: Wikimedia commons

縄文土器
（縄文中期）

- 古代ギリシャでは
  「永遠のシンボル」

ニューグレンジ
（旧石器時代）
Fig: Wikipedia

Fig: 星降る中部高地の縄文世界
https://jomon.co/point/detail/12/

どろぼうの風呂敷
「唐草紋様」
@いらすとや

# 渦の発生源？

## 速度勾配＝渦の源

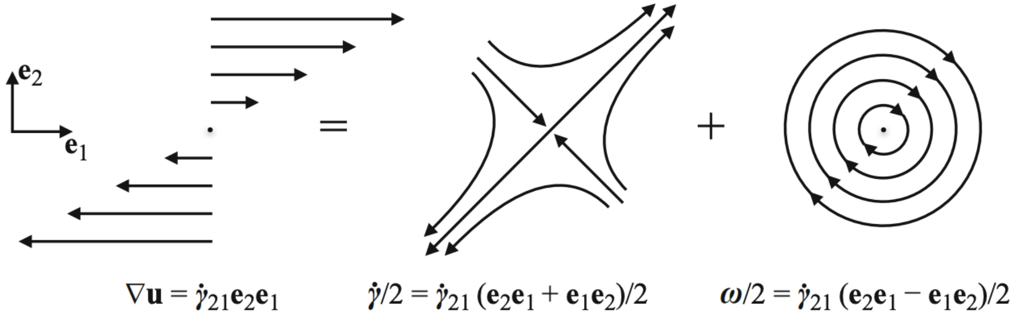
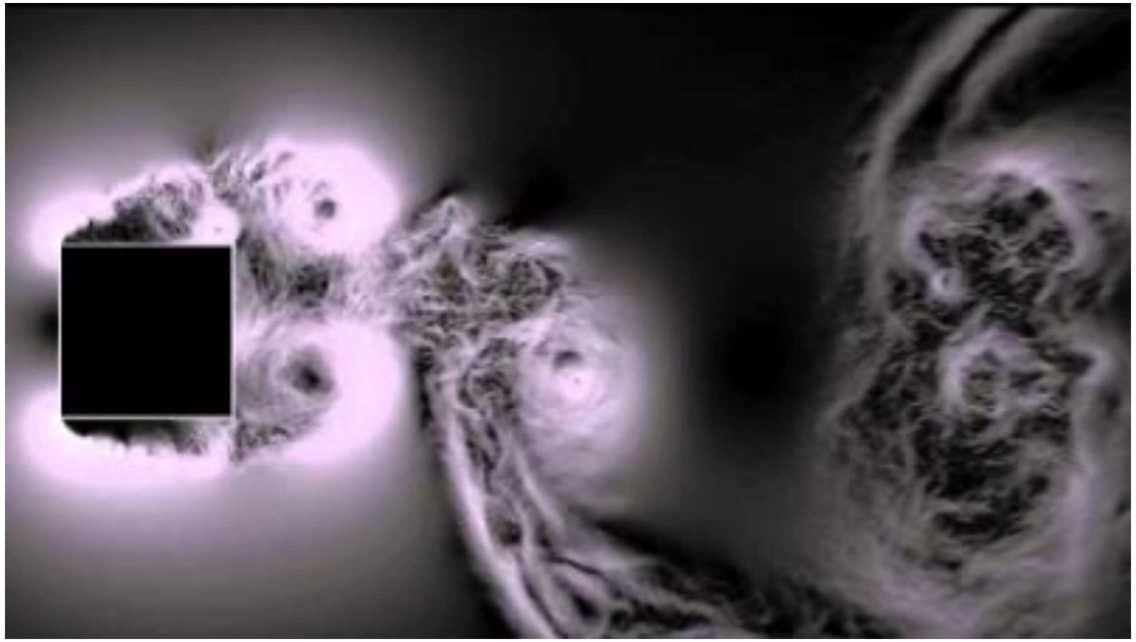



Fig: Spagnolie, *Complex Fluids in Biological Systems*



YouTube@F.Xavier Trias, https://youtu.be/c8zKWaxohng

## 境界層

- 固体壁表面では速度はゼロ（境界条件）
- レイノルズ数が大きいと、壁面表面に渦度がゼロでない薄い層＝**境界層**が生じる

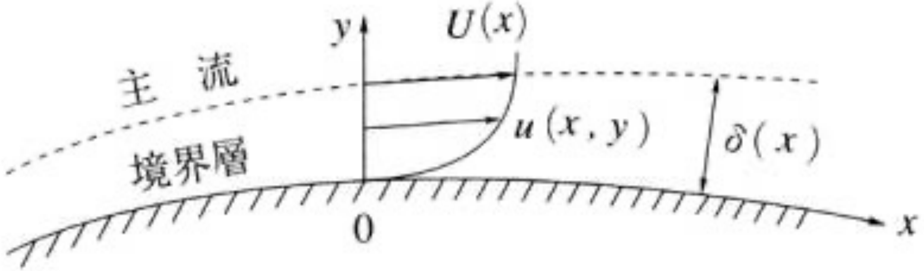



Fig: 日本機械学会機械工学辞典
www.jsme.or.jp/jsme-medwiki/09:1002871

# 非粘性流

**非粘性極限**　（固体）境界から離れたところ
レイノルズ数が十分大きい

**オイラー方程式**

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}^*}{\partial t^*} + (\boldsymbol{u}^* \cdot \boldsymbol{\nabla}^*)\boldsymbol{u}^* = -\boldsymbol{\nabla}^* p^* + \frac{1}{Re}\Delta^* \boldsymbol{u}^* \longrightarrow \rho\left[\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{u}\right] = -\boldsymbol{\nabla} p$$

境界条件は滑りありを採用

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n} = \boldsymbol{u}_s \cdot \boldsymbol{n}$$

**ベルヌーイの定理**

- エネルギー保存則（エネルギー積分）に対応
- 特に、定常流れの場合には

$$H = \frac{\rho}{2}|\boldsymbol{u}|^2 + p = \text{一定（流線に沿って）}$$

（渦なし流れの場合には）$H = \frac{\rho}{2}|\boldsymbol{u}|^2 + p =$ 一定（全空間で）

# 渦の定理

## 渦と渦度

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \boldsymbol{u}$$

渦線 (渦度場の"流線") $d\boldsymbol{x} \parallel \boldsymbol{\omega}$

渦管 (ある閉曲線$C$を通る渦線の集合)

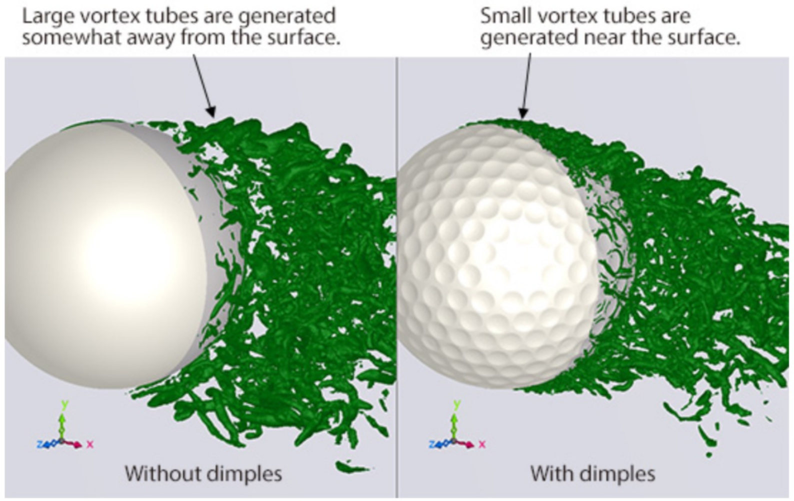
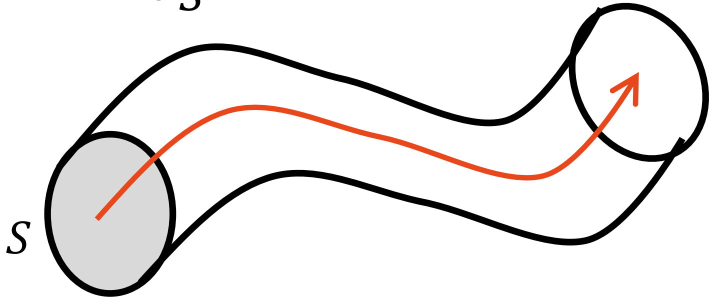



Fig: Itami (2019) https://www.cradle-cfd.com/media/column/a170

## ケルビンの循環定理(1869年)

「渦管は流れに沿って保たれ、粘性がなければ、その"強さ"(循環)は保存される」
(**渦は流体に凍結される**)

$$\Gamma = \int_S \boldsymbol{\omega} \cdot d\boldsymbol{S} = 一定$$

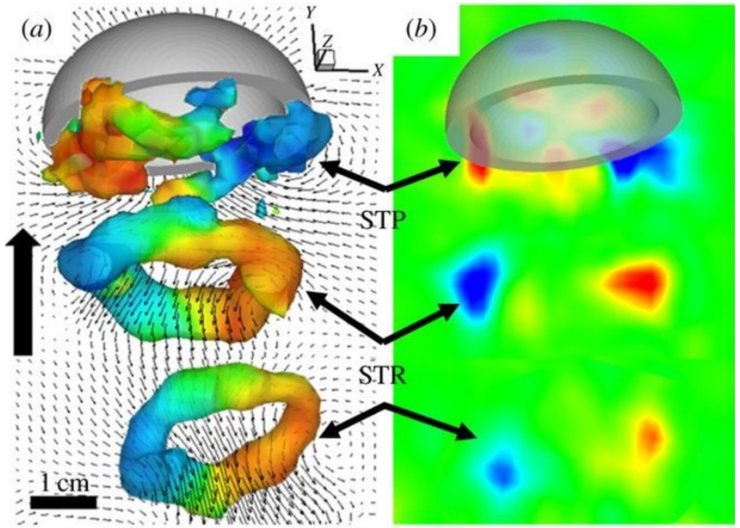



2次元なら $\nabla \times \boldsymbol{u} = \left(0, 0, \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y}\right)$

# 渦輪

**渦輪** (閉じた渦管)

Fig: Wikipedia




Gemmel et al. J R Soc Interface (2015)

YouTube@ Newsflare

https://youtu.be/JXkWSgU-CL0

# 渦とトポロジー

## ヘリシティ

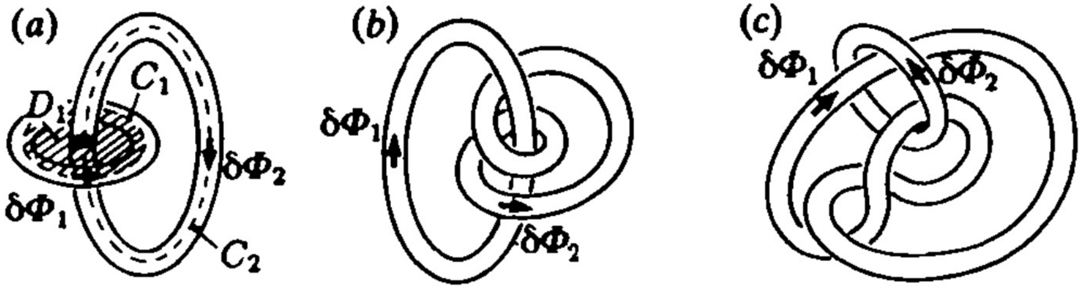
渦線の絡み具合を表す量＝トポロジー的不変量

非粘性流において

$$h = \int_V \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\omega}dV = (\text{時間的に})\text{一定}$$

$$= 2n\Gamma_1\Gamma_2$$

$n$ :絡み数




$n = 1$　　$n = -2$　　$n = 0$

Fig: Moffat & Ricca, Proc R Soc A（1992）

## ケルビンの"渦原子論"

- 物質は「エーテルの渦輪」からできている
- 「結び目のトポロジー」の発端

（参考：石川勝巳先生の講義）

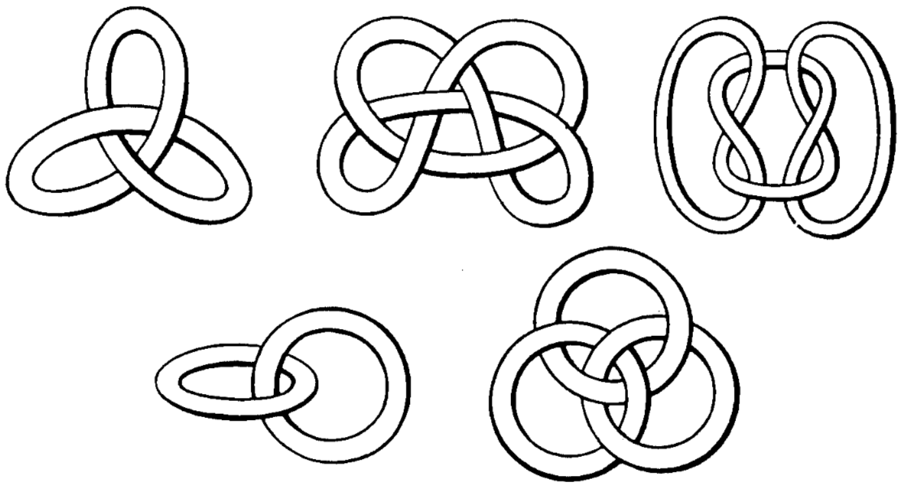
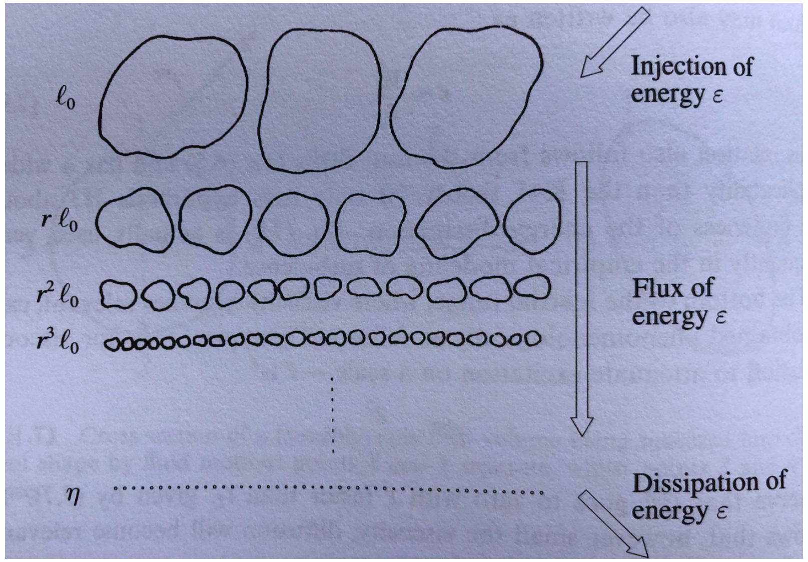


Fig: ケルビンのスケッチ

# 渦の運命は・・・

## ラグランジュの渦定理

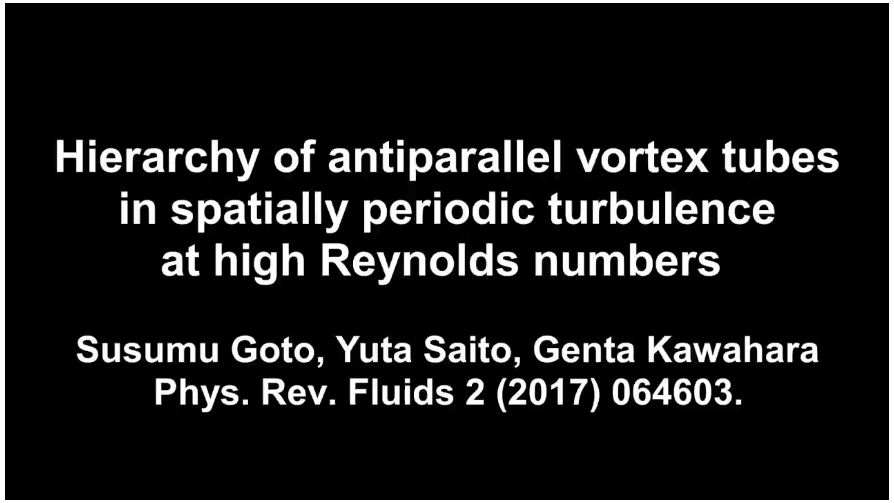
- 非粘性流において「渦は不生不滅」
- 渦なし流れは永遠に渦なし流れ
- 実際には粘性により渦が発生する（境界層）




Frisch, *Turbulence*

## 大小さまざまな渦

- 作られた渦はより小さな渦を生み出し
- 小さい渦は流体の粘性によって消える（散逸）




YouTube@ Susumu Goto
https://youtu.be/9p0f2UHt8pM

# まとめ

## [Day 3] 渦
## §1: 永遠のシンボル

- 非粘性流において「渦は流体とともに動く」
- 固体壁付近の境界層で渦は生じる
- 渦運動は流体運動の骨格をなす

# 日常を彩る流体力学：
## 「ながれ」の数理モデル

# [Day 3] 渦
## §2 空想を現実に

# 流体力学と言えば、やっぱり

## 飛行機

- 空を飛びたいという人類の夢
- 仮定法の例文「I wish I were a bird」

Fig: トウシルウェブサイトより
https://media.rakuten-sec.net/articles/-/21638

Fig: wikipedia

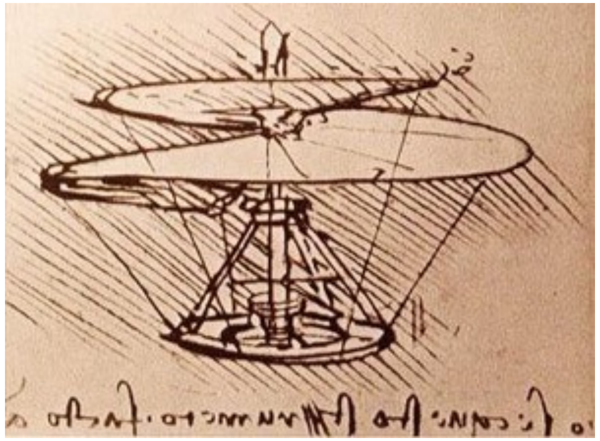


Fig: Leonardo’s rotocraft, Paris Ms. f.83b

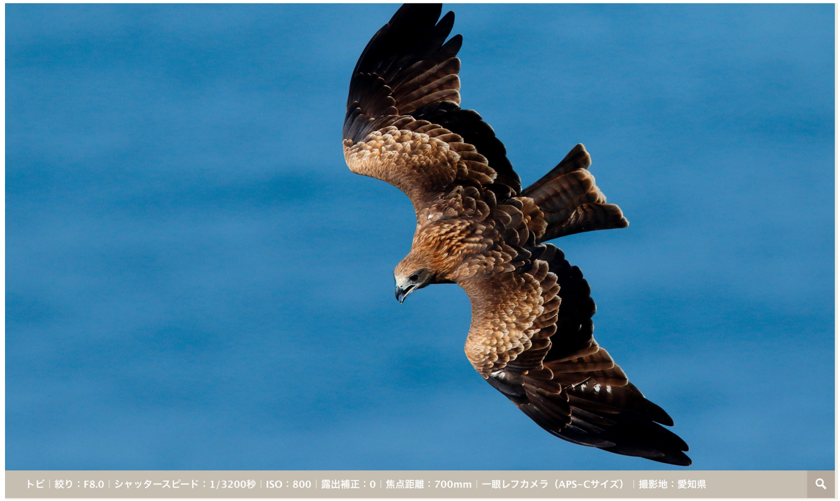
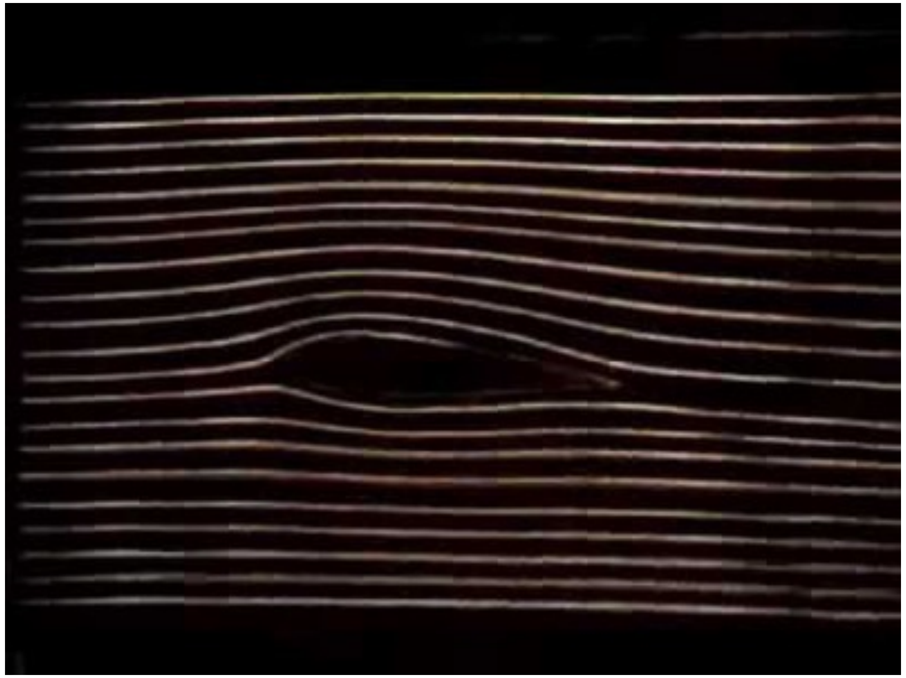


Fig: Canon野鳥写真図鑑
https://global.canon/ja/environment/bird-branch/photo-gallery/tobi/index.html

# 翼の周りの流れ

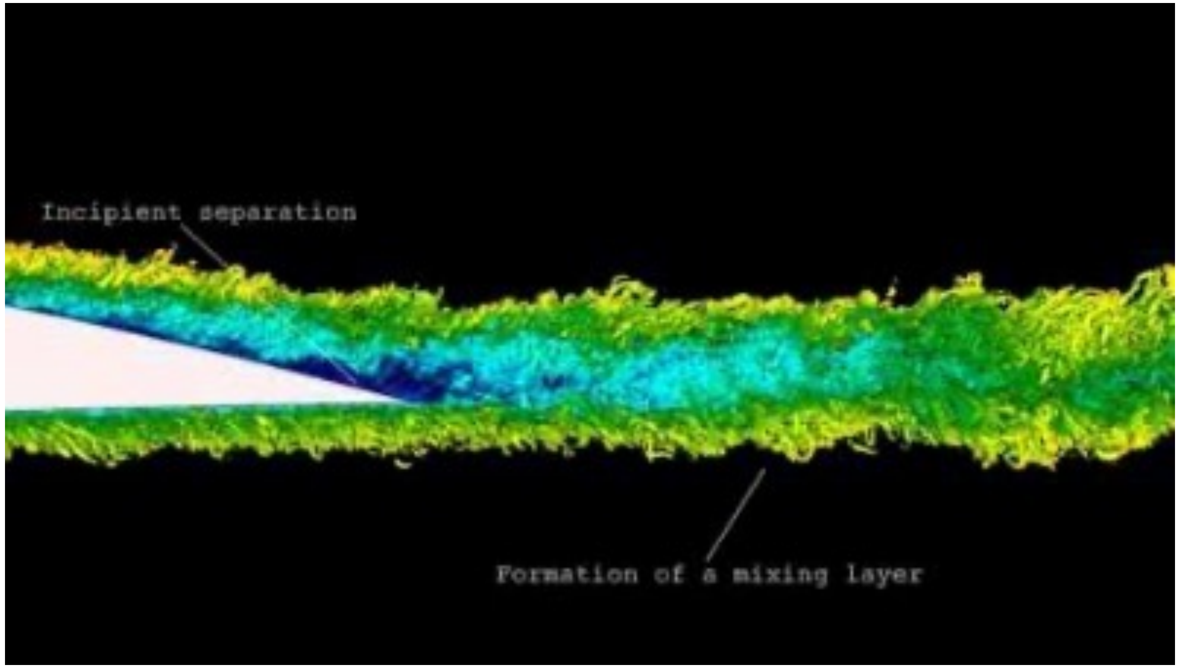
## 翼周りは渦なし流れ？

- 迎角が小さいときは流れは乱れない
- 大きな迎角で流れが剥離＝大きな渦が生じる



‘0”53～ YouTube@Francis Villatoro
https://youtu.be/6UlsArvbTeo?t=53

- 実際には非常に薄い境界層が存在する




‘1”40～ YouTube@Linné FLOW Centre
https://youtu.be/aR-hehP1pTk?t=100

# 流体力学と複素解析

## コーシー・リーマンの関係式と複素速度ポテンシャル

- ２次元の渦なし流れ

$$\boldsymbol{u} = (u, v, 0)$$

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \qquad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

$\psi$: 流れ関数

$\phi$: 速度ポテンシャル

- コーシー・リーマンの関係式

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \qquad \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

- 複素速度ポテンシャル

$$W = \phi + i\psi$$

- 正則関数 $W(z)$ が流れ場を決定する

$$\frac{dW}{dz} = w = u - iv$$ ：複素速度

$$z = x + iy$$

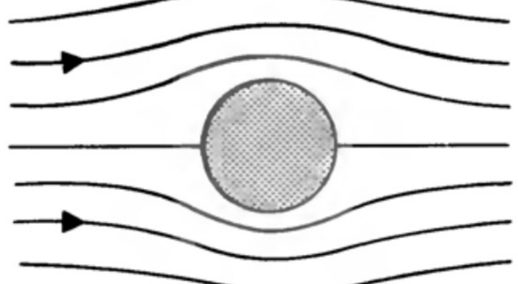


Fig: Acheson, *Elementary Fluid Dynamics*

# 揚力の起源

## クッタ・ジューコフスキーの定理(1906年)

- 非粘性渦なし流れ
- 速さ$U$の一様流中の静止物体に働く力

抗力： $D = 0$

揚力： $L = -\rho U \Gamma$

- 循環$\Gamma$は境界条件だけでは決まらない

## ダランベールのパラドックス(1743年)

- 定常渦なし流れでは抗力がゼロ・・・現実と矛盾？
- 粘性によって渦が（流体内に）生じることが必要

- 翼の各場所での力の和＝線積分
- 留数定理により流れ場の一位の極が拾われる
- 点渦（渦線の断面）がそれに対応

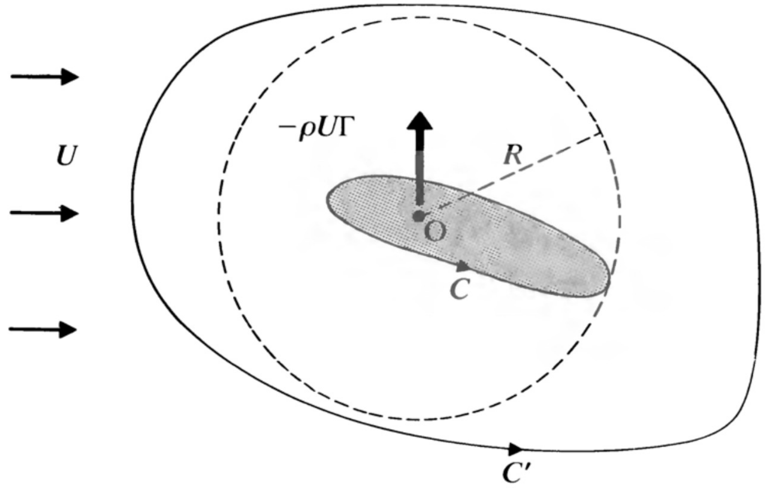



Fig: Acheson, *Elementary Fluid Dynamics*

# 翼の周りの流れ

## クッタの条件

- 循環Γを決めるための現象論的な条件
- 流れが翼後端で離れる（観測結果）
- 淀み点（＝速度のゼロ点）の位置を仮定

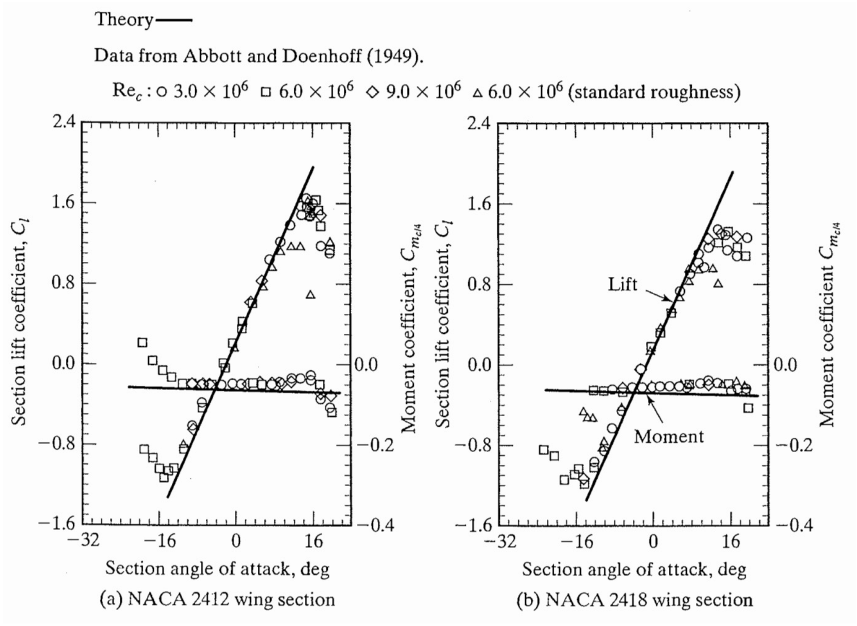



Fig: Bertin, *Aerodynamics for Engineers*

## 等角写像

- 正則関数$Z = f(z)$は等角写像
- 任意翼形状周りの流れの問題を円柱周りの流れに置き換える（リーマンの写像定理）

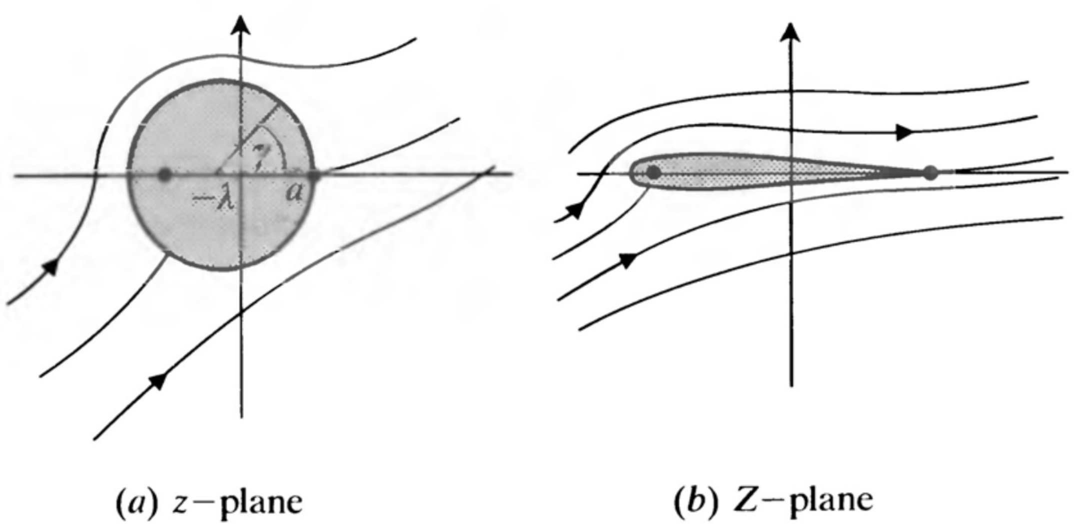
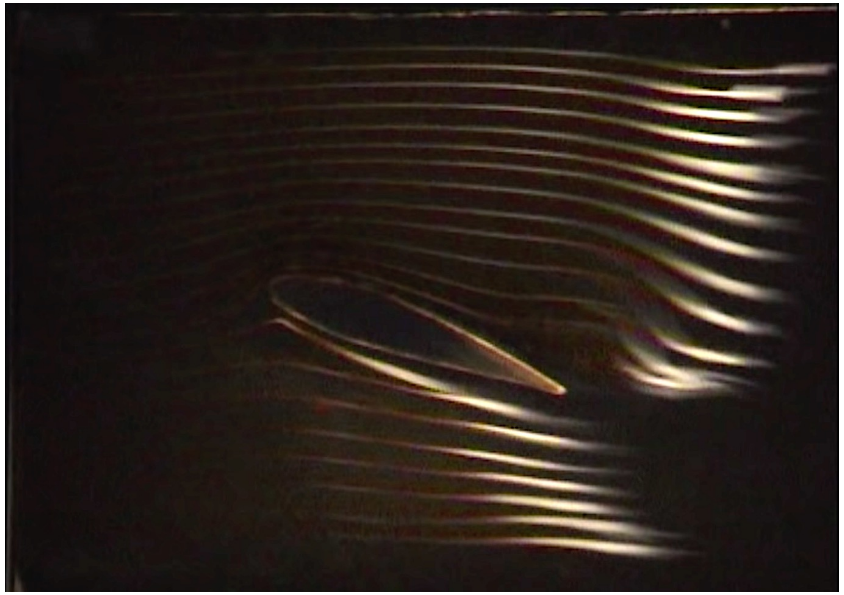



Fig: Acheson, *Elementary Fluid Dynamics*

# 翼理論を振り返る

## 翼理論からわかること

- 流線型の翼周りの流れ（観測結果）が土台
- 非粘性渦なし流による**単純化された数理モデル**
- 渦の剥離位置に関する付加条件



YouTube@Cambridge University
https://youtu.be/UqBmdZ-BNig

## 飛行機が飛べる理由？
## ＝十分な揚力が発生するメカニズム？

- ベルヌーイの定理による圧力差による説明
- 作用反作用の原理による反力による説明
- クッタ・ジューコフスキーの定理による循環による説明

キレイに飛んでるときの説明

実際にどういう流れになっているのか？
やってみないとわからない

- 力学研究における「メカニズム」の理解は、いくつもの階層を有する

# まとめ

## [Day 3] 渦
## §2: 空想を現実に

- 流体力学の発展と飛行機は切っても切り離せない
- 翼理論は複素解析の応用としても華々しい成果を上げた
- 力学現象のメカニズムの理解は階層的である

# 日常を彩る流体力学：
## 「ながれ」の数理モデル

# [Day 3] 渦
## §3 信じれば飛べる

# マルハナバチのパラドックス

Fig: animal dynamicsのウェブサイトより
https://www.animal-dynamics.com/how-do-bumblebees-fly/


Simon & Schuster (2010)

「流体力学の理論によればマルハナバチは空を飛べない」
(1930年代、ゲッチンゲン)

# 羽ばたき飛行のメカニズム

## キーワードは「渦」

➢ 打ち下ろしによる反力＋前縁渦(LEV)による揚力

YouTube@APS Physics
https://youtu.be/b4sv8xLqNc8?t=27

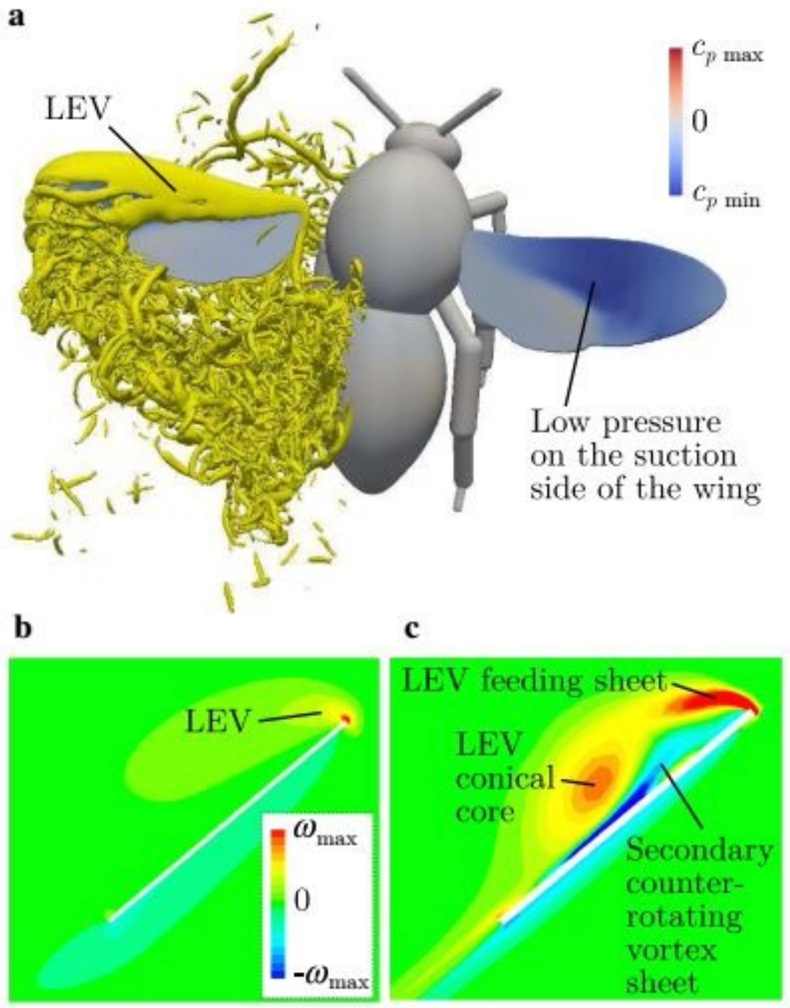



Fig: Liu et al, Acta Mechanica Sinica (2017)

# レイノルズ数と飛行形態

## 羽ばたきvs滑空

- 大きな翼があれば滑空も可能

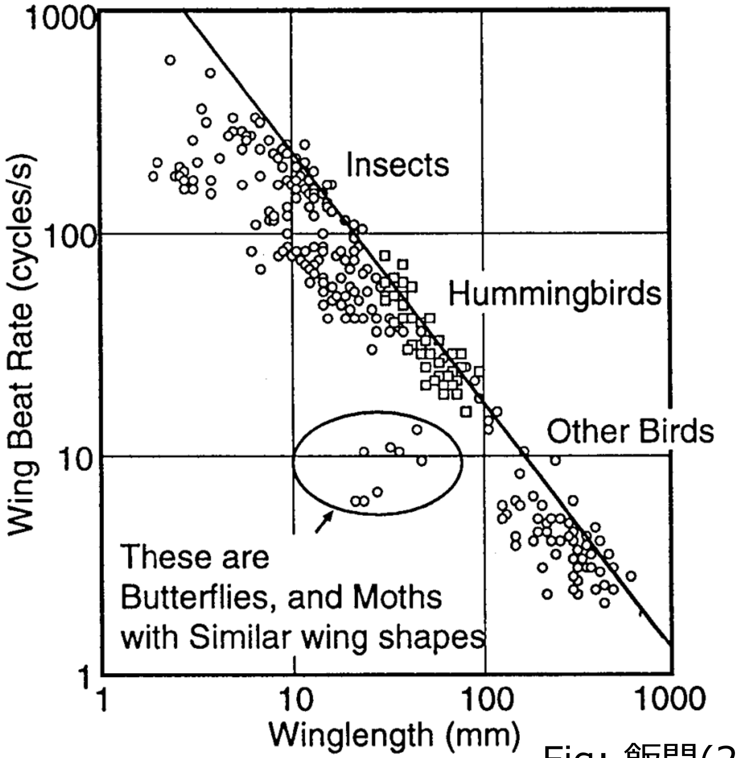


Fig: 飯間(2001)

メガネウラ


Fig: wikipedia

プテラノドン


Fig: 恐竜図鑑ウェブサイトより
https://kyouryu.info/pteranodon.php

絶滅した生物の生態を流体力学的に明らかにできないか？

生き物のデザインは流体力学的に洗練されているのか？

# 流体インパルスと渦

## 渦による力積＝インパルス

- 渦インパルス

$$\boldsymbol{I} = \frac{1}{2}\int_V \boldsymbol{x}\times\boldsymbol{\omega}\, dV$$

- 渦による物体に働く力

$$\boldsymbol{F} = -\rho\frac{d\boldsymbol{I}}{dt}$$

生き物の動きによって生じた
運動量は周りの渦が抱えている

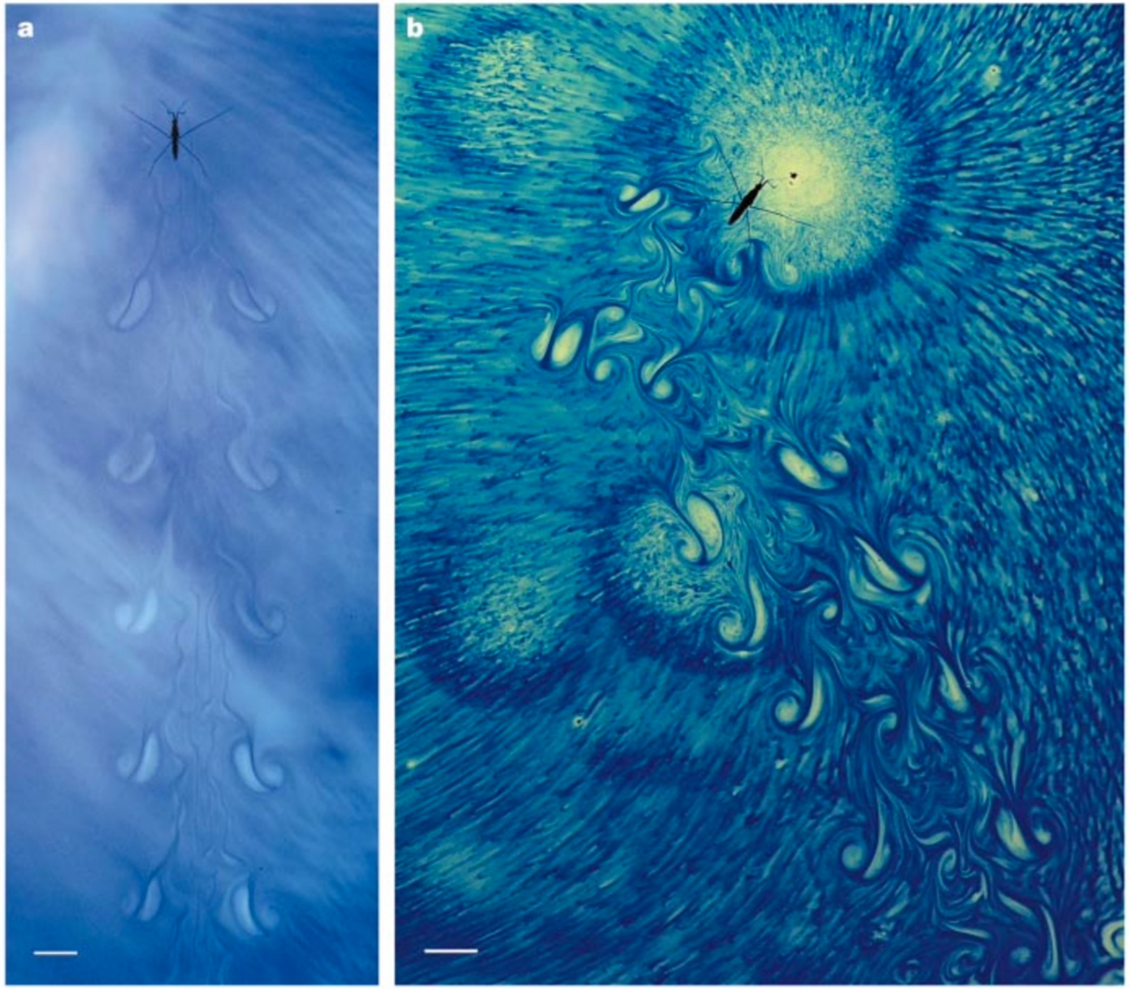
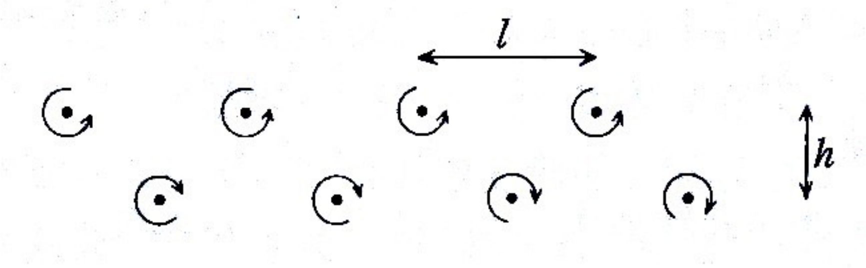



Fig: Fu et al, Nature (2003)

## カルマン渦列

定常な渦の無限列は不安定な配置
(巧妙な複素関数論の理論)



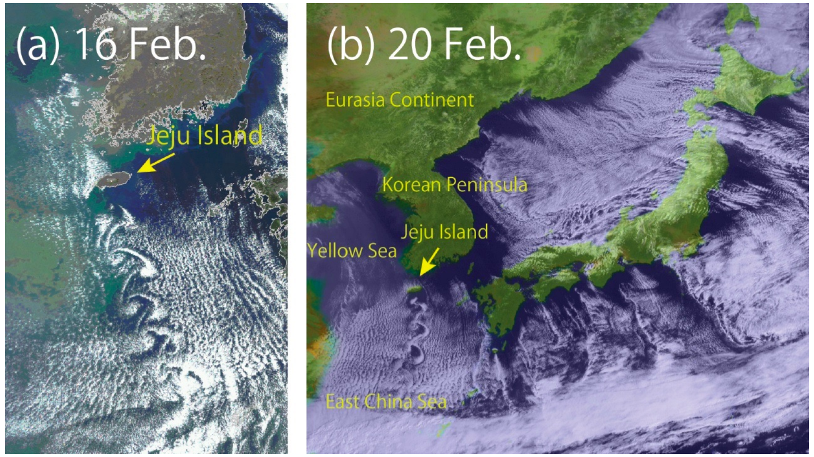
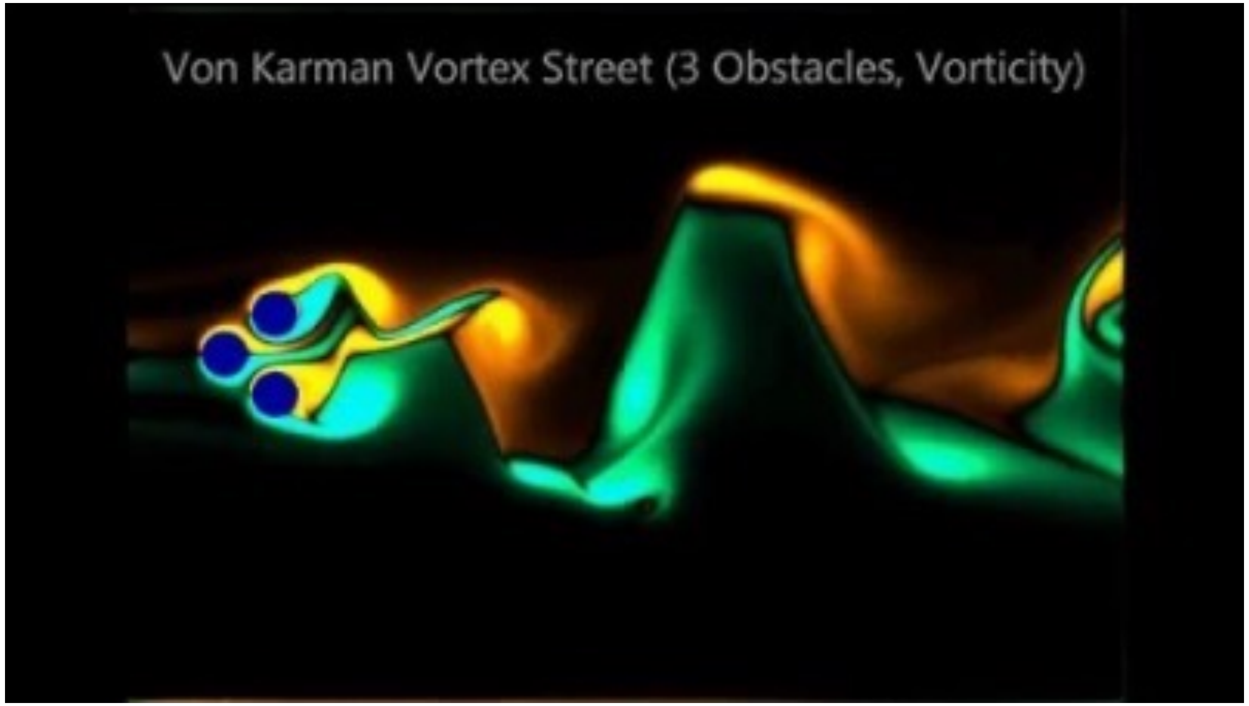
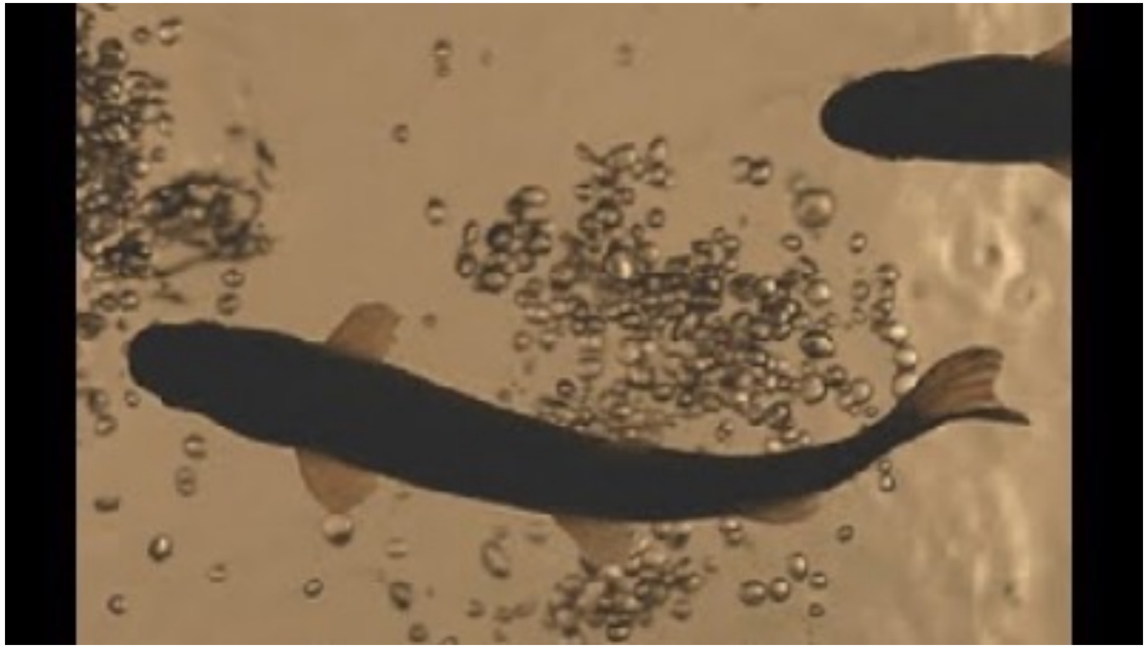




Fig: Ito & Niino (2016)

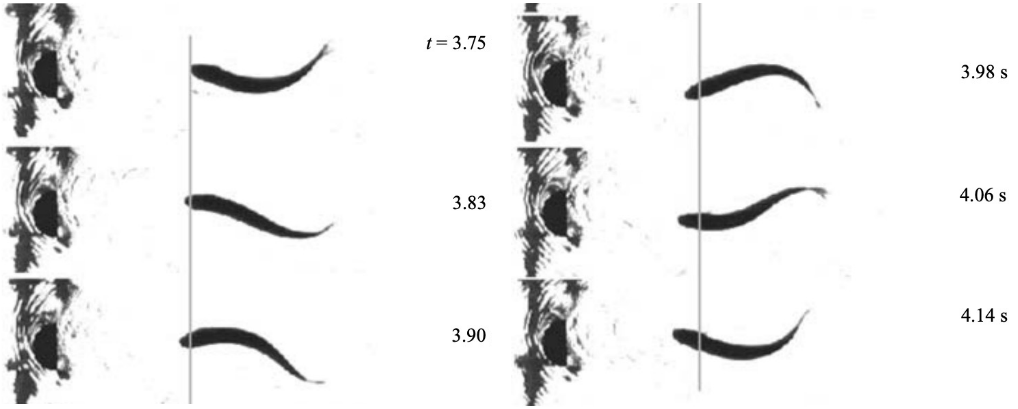



‘0”16～ YouTube@ Physics Graphics
https://youtu.be/f3LmjJ1N7YE?t=16

# 渦と物体の相互作用



YouTube@fish code studios
https://youtu.be/aRWgqDi-ihs?t=82




Beal et al. J Fluid Mech (2006)

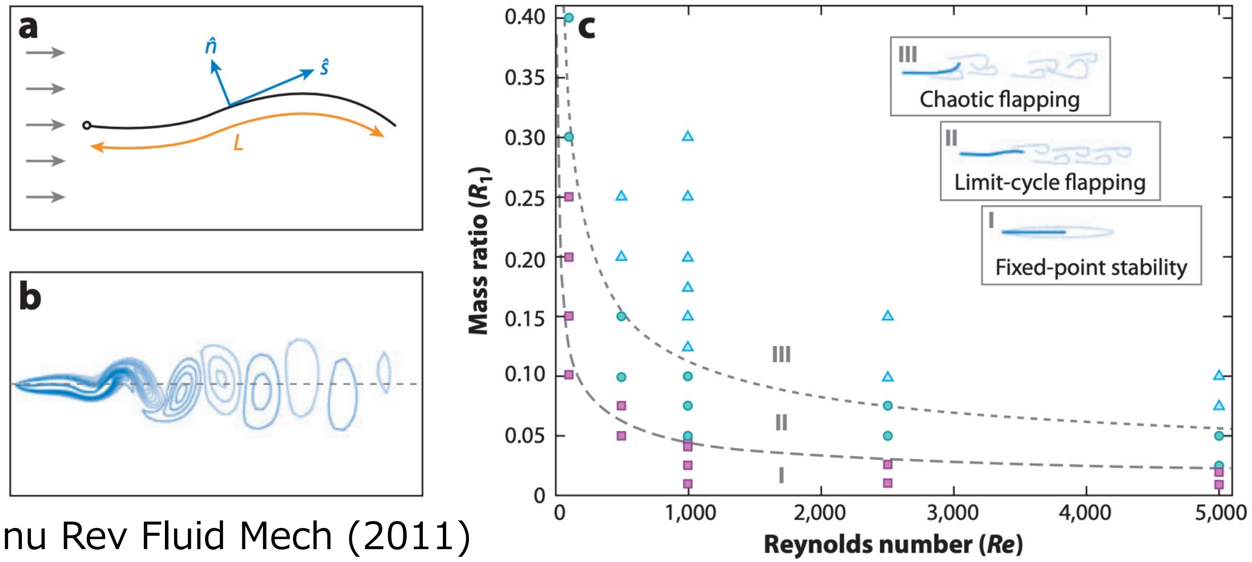



Fig: Shelly & Zhang, Annu Rev Fluid Mech (2011)

# 魚の遊泳

## 逆カルマン渦列

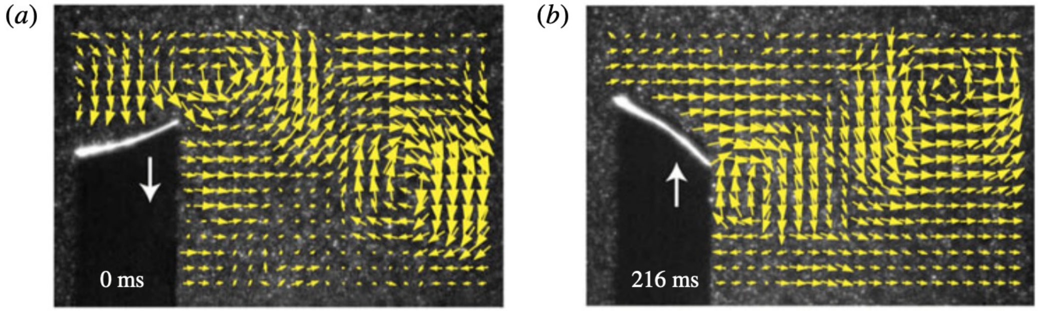



Fig: Smiths, J Fluid Mech (2019)

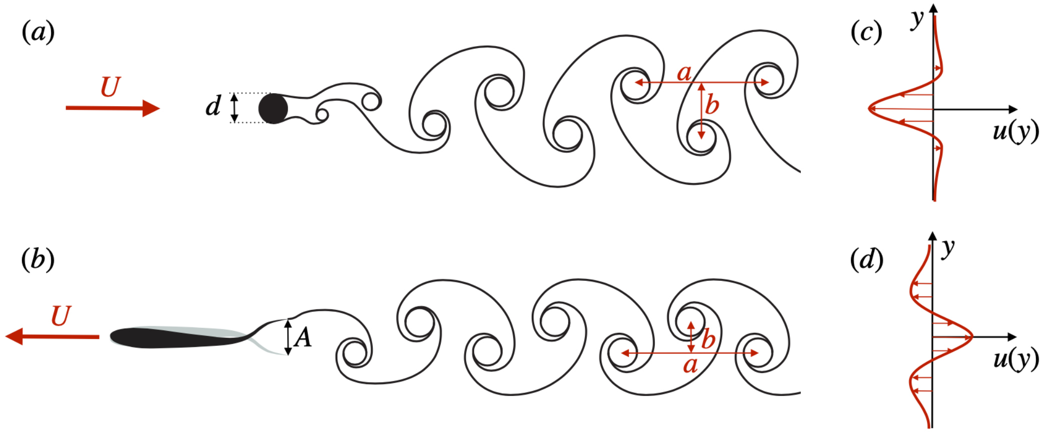
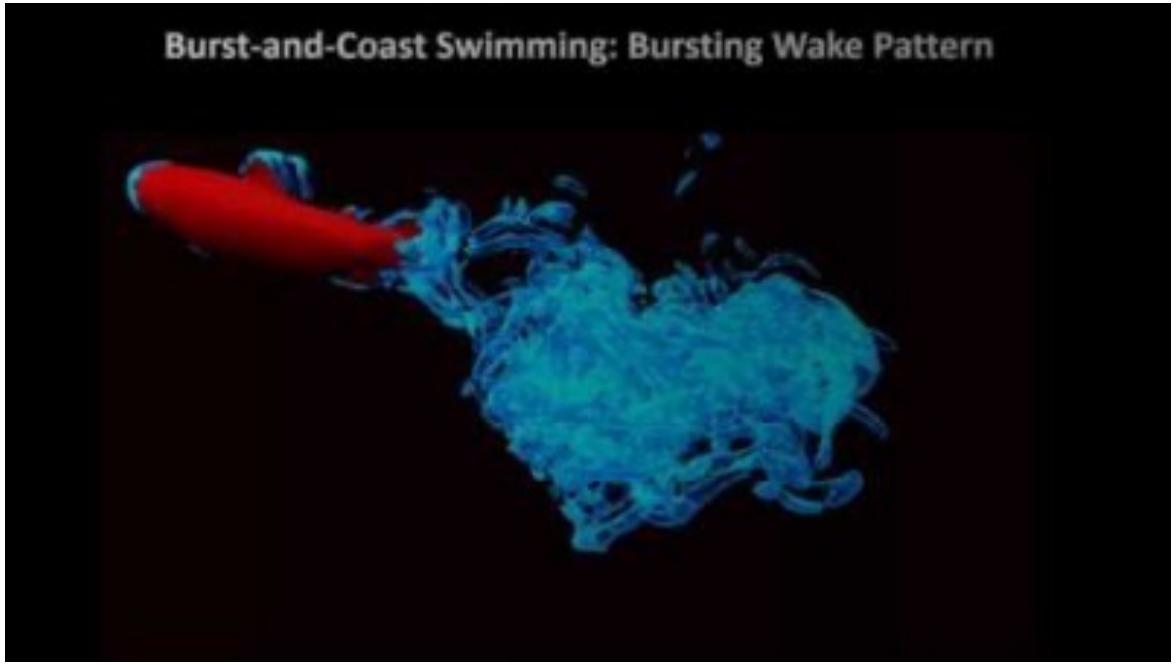



Fig: Eloy, J Fluid Struct (2012)




'1"00~

YouTube @ Ren et al.
APS Physics 2015 Gallery of Fluid Motion
https://youtu.be/I5Phg4q5EBU?t=60

# レイノルズ数と遊泳のスケーリング

## ストローハル数

$$0.2 < St = \frac{fA}{U} < 0.35$$

$f$:遊泳振動数[Hz]　$A$:遊泳の振幅[m]

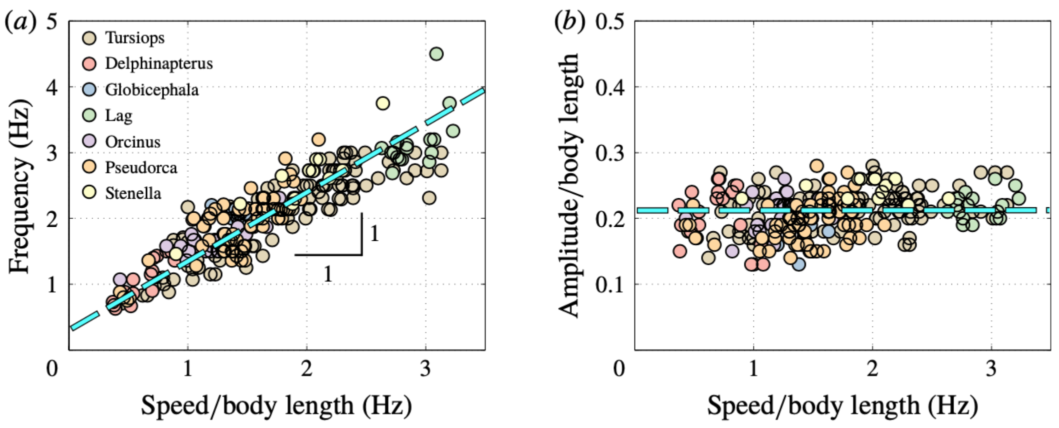
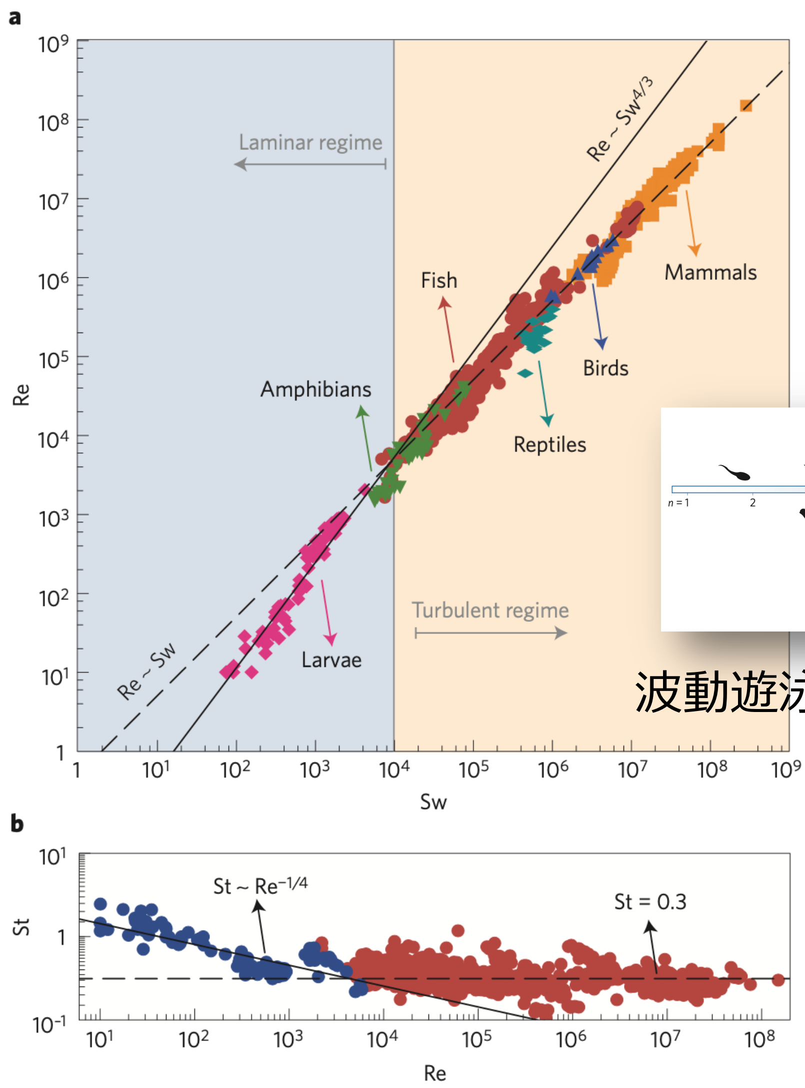
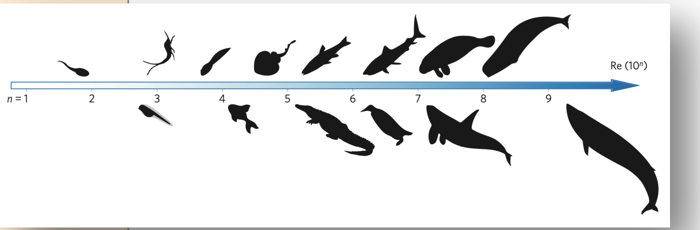



Fig: Smiths, J Fluid Mech (2019)




波動遊泳は多くの生物で見られる

Fig: Gazzola, Nat Phys (2016)

# まとめ

## [Day 3] 渦
## §3: 信じれば飛べる

- 数値流体力学の発展により生物の飛翔・遊泳が定量的な研究が進んでいる
- 遊泳・飛翔は物体と流体の相互作用
- ここでも渦は流れを読み解く鍵となっている