

# 日常を彩る流体力学：「ながれ」の数理モデル

石本 健太

## 目次

はじめに	1
<b>1 物質の運動と流れ</b>	<b>2</b>
1.1 連続体の運動	2
1.2 流れの記述	3
1.3 連続体の基礎方程式	5
<b>2 流体運動の方程式</b>	<b>8</b>
2.1 ナビエ-ストークス方程式	8
2.2 流体方程式の境界条件	9
2.3 非ニュートン流体	10
<b>3 レイノルズ数と流れの方程式</b>	<b>11</b>
3.1 高粘性流れ	11
3.2 非粘性流	11
<b>4 非粘性流の諸定理</b>	<b>12</b>
4.1 ベルヌーイの定理	12
4.2 渦の諸定理	12
4.3 2次元渦なし流	13
参考文献	15

## はじめに

本稿は、令和4年度(2022年度)第43回京都大学数理解析研究所・数学入門公開講座の講義ノートです。本ノートでは、学部初年度の数学(線形代数・微分積分学・ベクトル解析)と力学(質点と剛体の運動)を基礎知識として、流体力学の基本的な内容をまとめました。このノートは講義の補足事項が中心で、ここに書かれていることが全くわからなくても楽しめるよう、講演は工夫したいと思います。

# 1 物質の運動と流れ

## 1.1 連続体の運動

身の回りにある「流れている」物質の運動を考える際、通常は、アボガドロ数オーダーの分子の巨視的な振る舞いに興味がある。このような視点は、物質を構成している分子や原子といったミクロの詳細には立ち入らず、物質自身をマクロな対象として捉える立場と言える。実際、原子や分子のスケールの性質が直接的にはマクロスケールの性質に影響を与えない場合には、マクロな変数で閉じた理論体系(数理モデル)は現象の良い記述となる。「どれだけ拡大していても全体と同じような構造を持つことを仮定した物質」を連続体と呼び、弾性体や流体という概念は連続体の範疇にある。連続体の運動を統一的に扱う理論体系が連続体力学であり、流体力学もこの中に含まれる。

例えば、空気であれば気体を構成する分子スケールよりも十分大きなスケールで物理量を平均化することで、このようなマクロな変数が得られる。この平均操作を行うスケールは平均自由行程の数倍程度の大きさで十分である。空気の平均自由行程は  $0.1\mu\text{m}$  程度である。水の場合には水分子の大きさ  $\sim 0.1\text{nm}$  と同程度になるので、 $10\text{nm}$  以上の大きさがあれば、連続体としての記述が十分可能である。以下、流体も、流体中の物体も連続体であるとして、これらの運動方程式を考えよう。

連続体物質 (continuum body) は 3次元ユークリッド空間  $\mathbb{R}^3$  内の滑らかな領域  $B$  で、以下に述べるように体積と質量密度が定義できるとする。 $\mathbf{x} \in B$  を物質点 (material point) といい、集合  $B$  のことを物質配置 (material configuration) という。 $B$  の内部領域  $\Omega$  に対して、体積  $\text{vol}[\Omega]$  と質量  $\text{mass}[\Omega]$  を導入する。体積は、 $\text{vol}[\Omega] = \int_{\Omega} dV_{\mathbf{x}}$  であり、質量は質量密度 (mass density)  $\rho$  によって  $\text{mass}[\Omega] = \int_{\Omega} \rho(\mathbf{x}) dV_{\mathbf{x}}$  で表される。これより、重心は  $\mathbf{X} = \frac{1}{\text{mass}[\Omega]} \int_{\Omega} \mathbf{x} \rho(\mathbf{x}) dV_{\mathbf{x}}$  と書ける。物質の全体積は  $V = \text{vol}[B]$ 、全質量は  $m = \text{mass}[B]$  である。

次に、物体の運動を考えよう。物体は変形や流動といった運動をする。もとの配置  $B$  から別の配置  $B'$  への写像、 $\varphi : B \rightarrow B'$  は変形写像 (deformation map) と呼ばれ、もとの配置  $B$  を基準配置 (reference configuration)、 $B'$  を現配置 (current configuration) と言う。基準配置としては、例えば運動の初期時刻での配置を考えればよい。物質点  $\mathbf{a} \in B$  を  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$  と書いたとき、 $a_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) を物質座標あるいはラグランジュ (Lagrange) 座標 (あるいはラグランジュラベル) という。 $\mathbf{a}$  は変形によって  $B'$  の物質点  $\mathbf{x} = \varphi(\mathbf{a})$  に移る。これを  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ 、あるいは  $x_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) と書き、空間座標、またはオイラー (Euler) 座標という。これを単に  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{a})$  と書くことにする。

連続体力学における物体の運動 (motion) とは、物体の時刻に沿った連続な変形、 $\varphi : B \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^3$  のことである。時刻  $t$  を止める毎に滑らかな変形  $\varphi(\cdot, t) = \varphi_t : B \rightarrow \mathbb{R}^3$  によって各時刻の配置  $B_t = \varphi_t(B)$  が定まる (図 1)。以下、 $\varphi_0$  を恒等写像にとることにする。これにより、 $\psi_t = \varphi_t^{-1}$  が定まり、 $\psi_t : B_t \rightarrow B$  により、物体のラグランジュ座標  $\mathbf{a} = \psi_t(\mathbf{x}) = \psi(\mathbf{x}, t)$  が得られる。一方、 $\mathbf{x} = \varphi(\mathbf{a}, t)$  は物質点の軌道を表す。

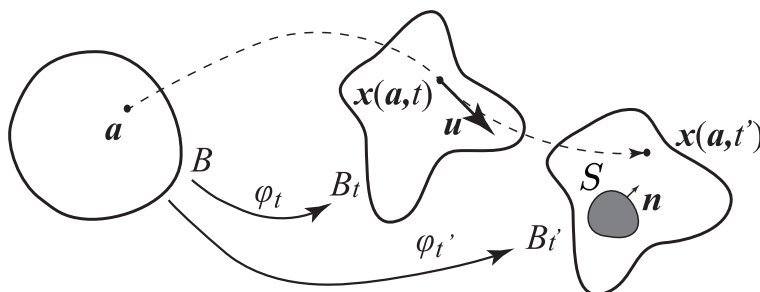


図 1: 連続体の変形と運動.

注 1. 通常の連続体力学で扱う領域は、その境界  $\partial B$  は区分的に滑らかで向き付け可能とし、開領域を考える。また、変形写像は全単射で向き付けが不変であることを仮定する。すなわち、 $J_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial a_j}$  で定まる変形勾配テンソル (deformation gradient tensor) と呼ばれる 2 階のテンソルに対して、「任意の  $\mathbf{a} \in B$  に対して  $\det \mathbf{J} > 0$ 」が成り立つ<sup>1</sup>。

変形物体の速度は、どのように表されるだろうか。ある物質点  $\mathbf{a} \in B$  の軌跡は  $\mathbf{x}(\mathbf{a}, t)$  で与えられるので、その速度は  $\mathbf{u}(\mathbf{a}, t) = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{x}(\mathbf{a}, t)$  で与えられる。ここで、 $t$  による微分が  $\mathbf{a}$  を固定した時の微分であることを明示するために、 $\partial$  の代わりに  $D$  を用いて  $\mathbf{u} = \frac{D}{Dt} \mathbf{x}$  と書く。これを物質微分あるいはラグランジュ微分という。また、これを速度場のラグランジュ表示という。同様に加速度は  $\frac{D^2}{Dt^2} \mathbf{x}(\mathbf{a}, t) = \frac{D}{Dt} \mathbf{u}(\mathbf{a}, t)$  で与えられる。後に見るように、流体の記述の場合、ラグランジュ表示よりもオイラー表示の方が便利な場合が多い。すなわち、速度場であれば、

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \left[ \frac{D}{Dt} \mathbf{x}(\mathbf{a}, t) \right]_{\mathbf{a}=\psi(\mathbf{x}, t)} \quad (1)$$

とオイラー座標  $\mathbf{x}$  と時刻  $t$  で表したい。これは、物質点  $\mathbf{x}$  を追った速度ではなく、ある空間上の点  $\mathbf{x} \in B'$  での流速を表現している。この座標系の取り替えの公式を次にまとめておこう。

定理 1 (ラグランジュ微分).  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  を速度場のオイラー表示とする。このとき、オイラー表示のスカラー関数  $\phi(\mathbf{x}, t)$  とベクトル値関数  $\mathbf{w}(\mathbf{x}, t)$  を用いて、ラグランジュ表示の時間微分はそれぞれ

$$\frac{D\phi}{Dt} = \frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \phi, \quad \frac{D\mathbf{w}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{w}. \quad (2)$$

証明. まずスカラー関数の場合について考える。 $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{a}, t)$  に注意して、多変数関数の微分公式を使えば<sup>2</sup>,

$$\frac{D}{Dt} \phi(\mathbf{x}(\mathbf{a}, t), t) = \frac{\partial \phi}{\partial t}(\mathbf{x}, t) + \frac{Dx_i(\mathbf{a}, t)}{Dt} \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} \phi(\mathbf{x}, t)$$

となり、(2) 式の 1 つ目の式が得られる。ベクトル値関数に関しても同様。□

## 1.2 流れの記述

この速度ベクトル場  $\mathbf{u}$  が、通常流体力学における「流れ」であり、研究の主題である。 $\mathbf{u}$  は速度場、流速場、流れ場など様々な表現で呼ばれる。ある時刻での流れの記述法としては、代表的な位置での速度ベクトルを矢印で表記するのが一般的であるが、これでは全体の流れの構造がわかりにくい場面も多い。その場合には、各点の接線が速度場に平行になっている曲線群である流線 (streamline) がよく用いられる (図 2 参照)。これは、曲線パラメータ  $s$  に関する微分方程式

$$\frac{d}{ds} \mathbf{x}(s) = \mathbf{u}(\mathbf{x}(s)) \quad (3)$$

の解曲線群を表示する方法であるが、一方で局所的な流速の大きさを表示することはできない。流線は、 $\mathbf{u}$  が時刻  $t$  に依存しない定常流れの場合には、実際の流れに沿った点の運動、すなわち物質点の軌跡を表すが、 $\mathbf{u}$  が時刻  $t$  に依存する場合には実際の点の運動を表すわけではないことに注意。特に 3 次元空間で時間に依存する非定常な流れの記述には、問題に応じた工夫が必要となる。

流れの様子はその局所的な振る舞いでも特徴づけられる。速度場を位置  $\mathbf{x}_0$  の周りでテイラー展開すると、

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}(\mathbf{x}_0) + (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \cdot \nabla \mathbf{u}|_{\mathbf{x}_0} + O(|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^2) \quad (4)$$

<sup>1</sup>本稿では、ベクトル及びテンソルとそのデカルト座標系での成分表示を同一視する。

<sup>2</sup>繰り返しの添え字については、1 から 3 までの和をとるアインシュタインの記法を用いる。

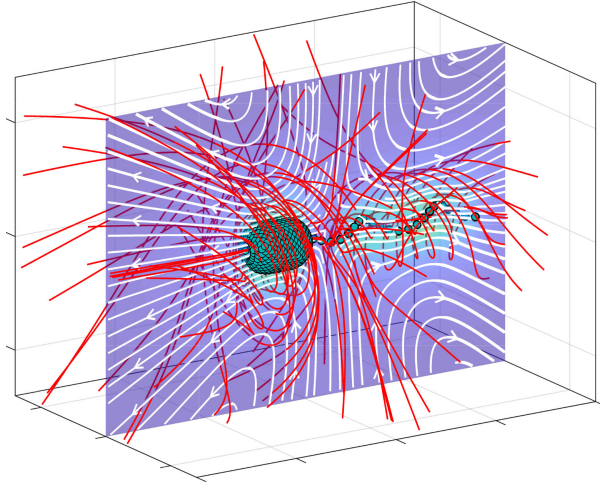


図 2: 流れ場の例. バクテリア周りの流れ (図は [1] を改変した.). ある 2 次元断面内の流線 (白矢印) と 3 次元中の流線 (赤色). 2 次元面内の色は速度場の大きさを表し, 明るくなるほど流れは速い.

となるが, ここで,  $\mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$  の 1 次の量  $\frac{\partial u_i}{\partial x_j} r_j$  に注目してみよう.  $G_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$  を速度勾配テンソル (velocity deformation tensor) という. その対称成分と反対称成分は

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad W_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (5)$$

であり, 対称成分  $E_{ij}$  を歪み速度テンソル<sup>3</sup>(rate-of-strain tensor), あるいは変形速度テンソル, 反対称成分  $W_{ij}$  をスピテンソルと呼ぶ.

ある閉曲面  $S$  から出ていく流量  $Q$  は,  $S$  の外向き法線を  $\mathbf{n}$  とすれば,  $Q = \int_S \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS$  である. ガウスの定理を用いると  $S$  で囲まれる領域を  $V$  とすれば,  $Q = \int_V \nabla \cdot \mathbf{u} dV = \int_V \text{tr} \mathbf{E} dV$  となり, 歪み速度テンソルのトレースが局所的な流れの湧き出しや吸い込みを表す. 後で見るように, 日常スケールの流体現象では通常, 速度場が非発散 (solenoidal, divergence-free), すなわち  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$  が成り立っている.  $E_{ij}$  は実対称行列なので, 直交行列で対角化できる. 直交する 3 つの固有ベクトルの方向に流れが生じており, 固有値が正であればその方向に流れの湧き出し, 負であれば吸い込みが起きている.

一方,  $W_{ij}$  は回転する流れ, すなわち渦のような流れを表す. この局所的な回転を表す量  $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}$  を渦度 (vorticity) という. 実際,  $\mathbf{W}\mathbf{r} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$  となっているので, 局所的な回転角速度  $\boldsymbol{\Omega}$  と渦度の間には  $\boldsymbol{\omega} = 2\boldsymbol{\Omega}$  の関係があることがわかる. 次に, ある閉曲線  $C$  上の速度場の線積分

$$\Gamma = \oint_C \mathbf{u} \cdot d\mathbf{x} \quad (6)$$

を考えよう.  $\Gamma$  を循環 (circulation) という. ストークスの定理より,  $C$  を境界とする曲面  $S$  を用いて,

$$\Gamma = \oint_S \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n} dS \quad (7)$$

と書き直せるので, 循環は曲面を貫く渦度ベクトルの量を表している. 流線に対応して, 各点の接線が渦度場に平行になっている曲線群を渦線 (vortex line) という. また, ある閉曲線上の各点を通る渦線によって形成される曲面を渦管 (vortex tube) という. 次の性質より, 循環  $\Gamma$  は渦管の特徴量になっており, そのために渦管の強さと呼ぶこともある.

**定理 2.** 渦管の断面  $S$  としたとき, 循環  $\Gamma = \int_S \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n} dS$  は  $S$  に依らない.

<sup>3</sup>読み方は「ひずみ」速度

証明. 2つの断面  $S, S'$  をとる. 定義より, 渦管は自己交差しないので, 渦管は  $S, S'$  によって切り取られる. その側面を  $S''$  としよう. 循環  $\Gamma[S''] = \int_{S''} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n} dS$  は,  $S''$  が渦管の表面にあることから,  $\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n} = 0$  より,  $\Gamma[S''] = 0$ . ストークスの定理より,  $\Gamma[S''] = \Gamma[S] - \Gamma[S']$  であるから,  $\Gamma[S] = \Gamma[S']$ .  $\square$

これ以外にも様々な流れ場の分解が知られている. 中でも重要なものが, ヘルムホルツ (Helmholtz) 分解である. 詳細はベクトル解析の教科書 ([2] 等) を参考されたい.

**定理 3** (ヘルムホルツ分解). 流れ場は渦度がゼロになる非回転場 (irrotational, rotational-free) と, 発散がゼロになる非発散場に一意に分解できる. すなわち,  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_{\text{irr}} + \mathbf{u}_{\text{sol}}$  と書いたとき,

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_{\text{irr}} = q, \quad \nabla \times \mathbf{u}_{\text{irr}} = \mathbf{0}, \quad (8)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_{\text{sol}} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{u}_{\text{sol}} = \boldsymbol{\omega}. \quad (9)$$

非回転場は, 渦度がゼロであることから, 渦なし流れとも呼ばれる. 領域が単連結であれば, 速度ポテンシャル  $\phi$  を用いて,  $\mathbf{u}_{\text{irr}} = \nabla\phi$  と表現することができる. すると, 式 (8) の第 1 式より, 速度ポテンシャルはポアソン方程式  $\nabla^2\phi = q$  に従う. 速度場が非発散の条件を満たしていれば,  $q = 0$  より, ラプラス方程式  $\nabla^2\phi = 0$  になる. ラプラス方程式を解く際の境界条件としては, 速度場の法線成分が境界で一致する, という条件を考える. すなわち, 境界の速度場  $\mathbf{U}$  と法線ベクトル  $\mathbf{n}$  を用いて,  $\nabla\phi \cdot \mathbf{n} = \mathbf{u}_{\text{irr}} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{n}$ .

式 (8)-(9) は, 静電場・静磁場の条件下での電磁気学のマクスウェル方程式に等しい. 実際, 渦度場  $\boldsymbol{\omega}$  が既知関数の場合には, 式 (9) の第 2 式からビオ-サバル (Biot-Savart) の法則によって, 速度場を形式的に求めることができる.

ここまで, 流れ場はいずれも既知関数として表現されていたことに注意したい. 次に, これらの流れ場が従う法則について述べていこう.

### 1.3 連続体の基礎方程式

実際の連続体物質は, 質量保存則や運動量保存則といった力学法則に基づいており, そこから得られる運動方程式に従って (一般には) 変形を伴って移動する. 特に, 変形をしない剛体運動の場合にはニュートン-オイラー (Newton-Euler) の運動方程式に従うことを思い出そう. 物体の運動量を  $\mathbf{P}$ , 空間に固定されたある点  $\mathbf{x}_0$  まわりの角運動量を  $\mathbf{L}$  と書けば, これらの時間変化はそれぞれ物体に働く力  $\mathbf{F}$  と  $\mathbf{x}_0$  まわりのトルク (力のモーメント)  $\mathbf{M}$  である. すなわち,

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{F}, \quad \frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M} \quad (10)$$

である. 剛体運動に対するニュートン-オイラーの運動方程式では通常, 力やトルクは物体の外部から働いていることを想定している. しかし, 一般の連続体物質を考える際には物体の内部にも力が働いていることに注意しないといけない. このような内部力も変形を生み出しているからである. 力には, 重力や電磁力のような接触を伴わない力があり, これらは**体積力**と呼ばれる. 単位質量あたりの体積力を  $\mathbf{b}$  と書けば,  $B$  内の任意の領域  $\Omega$  に対して, 体積力による力と  $\mathbf{x}_0$  まわりのトルクはそれぞれ

$$\mathbf{f}_b[\Omega] = \int_{\Omega} \rho(\mathbf{x}) \mathbf{b}(\mathbf{x}) dV_{\mathbf{x}}, \quad \mathbf{m}_b[\Omega] = \int_{\Omega} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \times [\rho(\mathbf{x}) \mathbf{b}(\mathbf{x})] dV_{\mathbf{x}} \quad (11)$$

である. 一方, 接触を伴い, 面に対して働く力を**面積力**という. これには流体力も含まれる.  $S$  を  $B$  内の任意の向き付き可能平面としたとき, 法線ベクトル  $\mathbf{n}$  が定まる. 通常  $\mathbf{n}$  は表面に対して外向きにとる (図 1). 表面  $S$  に働く単位面積あたりの力を  $\mathbf{t}_n$  で表し, これは**表面力**<sup>4</sup> (traction) と呼ばれる. コー

<sup>4</sup>応力ベクトル (stress vector) あるいは, 単に応力と呼ぶこともある.

シー (Cauchy) は  $\mathbf{x}$  での応力がその場所での法線ベクトル  $\mathbf{n}$  だけで定まると仮定し、 $\mathbf{t} = \mathbf{t}(\mathbf{n}(\mathbf{x}), \mathbf{x})$  と表されるとした。これをコーシーの応力原理という。これより、 $S$  に働く面積力による力とトルクは、

$$\mathbf{f}_s[S] = \int_S \mathbf{t} dS_{\mathbf{x}}, \quad \mathbf{m}_s[S] = \int_S (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \times \mathbf{t} dS_{\mathbf{x}} \quad (12)$$

となる。ここで、 $dS_{\mathbf{x}}$  は面積要素である。これらを使うと、物体に働く力と点  $\mathbf{x}_0$  まわりのトルクは、体積力と面積力の和であるから、

$$\mathbf{F} = \mathbf{f}[B] = \mathbf{f}_b[B] + \mathbf{f}_s[\partial B], \quad \mathbf{M} = \mathbf{m}[B] = \mathbf{m}_b[B] + \mathbf{m}_s[\partial B] \quad (13)$$

となる。

以下、この節では、弾性体や流体に限定せず、連続体の運動の時間発展を記述する基本法則についてまとめておこう。質量保存則、運動量保存則、角運動量保存則、エネルギー保存則の4つである。これらの保存則を連続体力学では「公理」として認める。それぞれの保存則から得られる時間発展方程式を導くために次のレイノルズの輸送定理 (Reynolds' transport theorem) を準備しておこう

**定理 4 (レイノルズの輸送定理).** 連続体の運動に対して、 $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  を速度場のオイラー表示とする。時刻  $t$  での任意の領域  $\Omega_t \subseteq B_t$  で、任意のスカラー場  $\phi(\mathbf{x}, t)$  に対して、次が成り立つ。

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \phi dV_{\mathbf{x}} = \int_{\Omega_t} \left[ \frac{D\phi}{Dt} + \phi(\nabla \cdot \mathbf{u}) \right] dV_{\mathbf{x}} \quad (14)$$

$$= \int_{\Omega_t} \frac{\partial \phi}{\partial t} dV_{\mathbf{x}} + \int_{\partial \Omega_t} \phi(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) dS_{\mathbf{x}}. \quad (15)$$

ここで、 $\mathbf{n}$  は  $\partial \Omega_t$  の外向き法線ベクトルである。

**証明.**  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{a}, t)$  を変数  $\mathbf{a}$  から  $\mathbf{x}$  への変数変換だと見なせば、式 (14) の左辺は基準配置  $B$  での積分に置き換えられる。 $dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial a_k} da_k$  と変換できるので、変形勾配テンソル  $J_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial a_j}$  を用いれば、

$$\int_{\Omega_t} \phi(\mathbf{x}, t) dV_{\mathbf{x}} = \int_{\Omega_0} \phi(\mathbf{x}(\mathbf{a}, t), t) \det \mathbf{J} dV_{\mathbf{a}}. \quad (16)$$

ここで、 $\det \mathbf{J}$  はヤコビ行列式。式 (16) の両辺を  $t$  で微分すれば、右辺は領域  $\Omega_0$  が時間に依存しないので、

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \phi dV_{\mathbf{x}} &= \int_{\Omega_0} \frac{D}{Dt} [\phi(\mathbf{a}, t) \det \mathbf{J}] dV_{\mathbf{a}} \\ &= \int_{\Omega_0} \left[ \frac{D\phi(\mathbf{a}, t)}{Dt} \det \mathbf{J} + \phi(\mathbf{a}, t) \frac{D \det \mathbf{J}}{Dt}(\mathbf{a}, t) \right] dV_{\mathbf{a}}. \end{aligned} \quad (17)$$

ここで、行列式の微分公式を考える。 $\mathbf{A}(t)$  を正方行列とすれば

$$\frac{d}{dt} \det \mathbf{A}(t) = \det \mathbf{A} \cdot \text{tr} \left( \frac{d\mathbf{A}}{dt} \mathbf{A}^{-1} \right) \quad (18)$$

が成り立つ。ここで、 $\frac{D J_{ij}}{Dt} = \frac{D}{Dt} \frac{\partial x_i}{\partial a_j} = \frac{\partial}{\partial a_j} \frac{D x_i}{Dt} = \frac{\partial u_i}{\partial a_j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial a_j}$  であることに注意すれば、 $\text{tr} \left( \frac{d\mathbf{J}}{dt} \mathbf{J}^{-1} \right) = \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial a_j} \frac{\partial a_j}{\partial x_i} = \nabla \cdot \mathbf{u}$ 。これと式 (18) から、式 (17) を変形すれば、

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \phi dV_{\mathbf{x}} &= \int_{\Omega_0} \left[ \frac{D\phi(\mathbf{a}, t)}{Dt} \det \mathbf{J} + \phi(\mathbf{a}, t) (\det \mathbf{J}) (\nabla \cdot \mathbf{u}) \right] dV_{\mathbf{a}} \\ &= \int_{\Omega_0} \left[ \frac{D\phi(\mathbf{a}, t)}{Dt} + \phi(\mathbf{a}, t) (\nabla \cdot \mathbf{u}) \right] \det \mathbf{J} dV_{\mathbf{a}} \\ &= \int_{\Omega_t} \left[ \frac{D\phi(\mathbf{x}, t)}{Dt} + \phi(\mathbf{x}, t) (\nabla \cdot \mathbf{u}) \right] dV_{\mathbf{x}} \end{aligned} \quad (19)$$

を得る．ここで最後の等式は積分変数の変換を行っている．2つ目の等式 (15) は，さらにラグランジュ微分の公式 (2) を使って，

$$\int_{\Omega_t} \left[ \frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \phi + \phi(\nabla \cdot \mathbf{u}) \right] dV_{\mathbf{x}} = \int_{\Omega_t} \left[ \frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot (\phi \mathbf{u}) \right] dV_{\mathbf{x}} \quad (20)$$

と変形した後にガウスの発散定理を用いればよい．  $\square$

以上の準備のもと，保存則から得られる時間発展方程式を導く．今回は流体運動の記述を最終的な目標としているので，オイラー表示で導出を行う．弾性体の場合にはラグランジュ表示の方が便利ながことが多い．

**公理 1 (質量保存則)**．連続体の運動に対して，時刻  $t$  での任意の領域  $\Omega_t \subseteq B_t$  での質量は保存する．

$$\frac{d}{dt} \text{mass}[\Omega_t] = 0. \quad (21)$$

**定理 5 (連続の式)**．質量保存則から，次の連続の式（あるいは連続方程式）と呼ばれる質量密度  $\rho$  の時間発展方程式が得られる．

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho = -\rho \nabla \cdot \mathbf{u} \quad \text{あるいは} \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0. \quad (22)$$

**証明**．レイノルズの輸送定理 (14) に  $\phi = \rho(\mathbf{x})$  を適用すれば， $\text{mass}[\Omega_t] = \int_{\Omega_t} \rho(\mathbf{x}, t) dV_{\mathbf{x}}$  なので，

$$\int_{\Omega_t} \left[ \frac{D\rho}{Dt} + \rho(\nabla \cdot \mathbf{u}) \right] dV_{\mathbf{x}} = 0 \quad (23)$$

となる．任意の  $\Omega_t$  に対して成り立つので，変数が十分滑らかであれば，任意の  $\mathbf{x} \in B_t$  で  $\frac{D\rho}{Dt} + \rho(\nabla \cdot \mathbf{u}) = 0$  が成り立つ．ラグランジュ微分の公式を用いると，これは (22) の第 1 式に等しい．第 2 式は  $\nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = \mathbf{u} \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \cdot \mathbf{u}$  より従う．  $\square$

**公理 2 (運動量保存則)**．連続体の運動に対して，時刻  $t$  での任意の領域  $\Omega_t \subseteq B_t$  での運動量は保存する．

$$\frac{d}{dt} \mathbf{P}[\Omega_t] = \mathbf{F}[\Omega_t]. \quad (24)$$

連続体の運動量保存則から，連続体力学の中心的な定理であるコーシーの基本定理 (Cauchy's fundamental theorem) が得られる．証明は標準的な連続体力学，あるいは流体力学の教科書（例えば [3, 4]）を参照されたい．

**定理 6 (コーシーの基本定理)**．応力ベクトル  $\mathbf{t}$  は応力テンソル (stress tensor) とよばれる 2 階のテンソル  $\sigma_{ij}(\mathbf{x}, t)$  を用いて， $t_i = \sigma_{ij} n_j$  と表される．応力テンソルは単に応力と呼ばれることも多い．

**定理 7 (コーシーの運動方程式)**．連続体における運動量保存則から次のコーシーの運動方程式と呼ばれる時間発展方程式

$$\rho \left[ \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right] = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho b_i \quad (25)$$

が得られる．

**証明**．レイノルズの輸送定理は，ベクトル値関数にもすぐに拡張できる． $\Omega_t \subseteq B$  の運動量は  $\mathbf{P}[\Omega_t] = \int_{\Omega_t} \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) dV_{\mathbf{x}}$  であるからこれにレイノルズの輸送定理を用いる．すると，連続の式 (22) を使えば，

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \rho \mathbf{u} dV_{\mathbf{x}} &= \int_{\Omega_t} \left[ \frac{D\rho}{Dt} \mathbf{u} + \rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} + \rho \mathbf{u}(\nabla \cdot \mathbf{u}) \right] dV_{\mathbf{x}} \\ &= \int_{\Omega_t} \left[ -\rho(\nabla \cdot \mathbf{u}) \mathbf{u} + \rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} + \rho \mathbf{u}(\nabla \cdot \mathbf{u}) \right] dV_{\mathbf{x}} \end{aligned} \quad (26)$$

となり, これは  $\int_{\Omega_t} \rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} dV_{\mathbf{x}}$  に一致する. 一方,  $\mathbf{F}[\Omega_t]$  は, (13) 式より面積力と体積力の和であるから,

$$F_i[\Omega_t] = \int_{\partial\Omega_t} t_i dS_{\mathbf{x}} + \int_{\Omega_t} \rho b_i dV_{\mathbf{x}} = \int_{\Omega_t} \left( \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho b_i \right) dS_{\mathbf{x}} \quad (27)$$

となる. ここで, コーシーの定理  $t_i = \sigma_{ij} n_j$  とガウスの発散定理を用いた. ここでも任意の  $\Omega_t$  に対して成り立つので, 式 (25) を得る.  $\square$

また, 証明は省略するが, 角運動量保存則<sup>5</sup>から次が従う.

**定理 8 (応力テンソルの対称性).** 角運動量保存則  $\frac{d}{dt} \mathbf{L}[\Omega_t] = \mathbf{M}[\Omega_t]$  から応力テンソルが対称であること, すなわち  $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$  がわかる.

エネルギー保存則は, 上記の保存則と同様, 時刻  $t$  での任意の領域  $\Omega_t \subseteq B_t$  に対するエネルギー収支の関係式である. 一般にはエネルギー保存則に加えて状態方程式が必要となる. 状態方程式は熱力学的な量の間関係として与えられ, 例えば, 圧力  $p$ , 密度  $\rho$ , 温度  $T$  の間関係式  $f(p, T, \rho) = 0$  の形で与えられる. しかし, 温度の変化が無視できる場合には, エネルギー収支の関係式は運動の方程式と分離されている. 音速より十分遅い日常レベルでの水や空気の流体運動に対しては「 $\rho(\mathbf{x}, t) = \rho$  は一定」という非圧縮性の条件を課しても良く, この場合も, 熱的な関係式は流体運動と独立に定まる. また, 次はすぐ分かる.

**定理 9.** 非圧縮条件が成り立つとき, 連続の式は  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$  となる.

## 2 流体運動の方程式

### 2.1 ナビエ-ストークス方程式

これまで, 弾性体・流体の区別なく連続体の運動一般を考えてきた. この節では, 日常スケールの流体现象に焦点を当てよう. 弾性体や流体といった物質の性質は, 物質の応答を指定する応力テンソル  $\sigma_{ij}$  で定まる. 応力テンソルの関数系を決定する式を構成方程式 (あるいは構成式, constitutive relation) という.

水や空気のような流体の運動は, ニュートン流体と呼ばれる数理モデルが運動をよく記述する. ニュートン流体の構成方程式は非圧縮条件のもとで,  $\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu E_{ij}$  の形で与えられる. ここで,  $\delta_{ij}$  はクロネッカーのデルタ,  $E_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$  は歪み速度テンソルである.  $\mu$  は粘性係数と呼ばれる物質定数であり, スカラー関数  $p$  は圧力である.

**定理 10 (非圧縮ナビエ-ストークス方程式).** 非圧縮条件のもとで, ニュートン流体の運動は次の非圧縮ナビエ-ストークス方程式に従う.

$$\rho \left[ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right] = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \rho \mathbf{b}. \quad (28)$$

これを単にナビエ-ストークス方程式と呼ぶことも多い. ここで  $\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla$  はラプラシアンである.

**証明.**  $\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + \mu \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial u_j}{\partial x_j}$  となるので,  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$  に注意してコーシーの運動方程式 (25) に代入すれば, (28) が得られる.  $\square$

粘性係数がゼロの流体, すなわち構成式が  $\sigma_{ij} = -p\delta_{ij}$  となっているものを非粘性流体といい, その運動方程式はオイラー方程式という. これは, 1750 年代にオイラーがはじめて流体の運動を数学的

<sup>5</sup>力による角運動量しか存在しないこと, すなわち内部角運動量がないこと仮定する.



に定式化したことに由来する。この場合、外力  $\mathbf{b}$  が存在しなくても、ある方向（これを  $x$  軸とする）に流れる定常な速度場  $\mathbf{u} = U(x)\mathbf{e}_x$  は圧力を  $p = -\frac{1}{2}\rho U^2$  とすれば、オイラー方程式

$$\rho \left[ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right] = -\nabla p \quad (29)$$

を満たしていることがわかる。ただし、 $\mathbf{e}_x$  は  $x$  軸を表す単位ベクトルである。

式 (28) の右辺第 2 項は粘性による応力を表している。粘性の効果はニュートン流体に名を残すニュートンがその考察のはじまりだとも言われているが、現在ナビエ-ストークス方程式として知られているこの粘性流体の方程式は 1840 年代にストークスによって導かれた（発見したのはナビエ (1827) という事になっている）。しかし、ナビエ-ストークス方程式が粘性流体の良い数理モデルであることは、その後の 19 世紀後半にレイノルズを始めとした実験や理論が進むことで認識されたことに注意したい。

ここでは天下一的に流体の構成式を導入した。構成方程式が満たすべき対称性や、対称性に基づく連続体の分類などの体系は有理力学 (rational mechanics) として、1950 年代から整備されてきた。その全体像については、例えば [5, 6] を参照されたい。また、ニュートン流体の構成方程式は、ストークスによって導出された。導出の際の仮定は (1)  $\sigma_{ij}$  は  $E_{ij}$  の 1 次関数である、(2)  $E_{ij} = 0$  のとき、非粘性のオイラー方程式に一致する、(3) 構成方程式は座標系の回転に対して不変 (流体の等方性) である、の 3 つである。詳細は流体力学の標準的な教科書 [3, 4]、および数学者向けの導出 [7] を参照されたい。

## 2.2 流体方程式の境界条件

偏微分方程式 (28) を解くにあたっては、初期条件と境界条件が必要である。最も基本的なものは、弾性体を含む固体壁面での境界条件であり、通常滑り無し境界条件 (粘着境界条件) を用いる。すなわち、境界での速度場  $\mathbf{u}$  は壁面の速度  $\mathbf{u}_s$  に一致して、

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_s(\mathbf{x}, t) \quad (30)$$

が成り立つ。

次に、2 種類の流体が界面で接している状況を考えよう。両者ともニュートン流体であれば、それぞれの粘性係数  $\mu$ ,  $\mu'$  が流体の物体としての性質を表す。 $\mu' \rightarrow \infty$  とすれば、固体壁面の問題に一致する。 $\mu' = 0$  は非粘性流体を表し、例えば、流体中の気泡のモデルになっている。ここで、注意しなければならないのは、2 つの流体領域の界面での境界条件である。一般に 2 つの流体間の境界では、2 つの流体の速度は界面の速度一致するため、速度場は連続になる。しかし、流体による表面力は、界面の内外の流体領域で異なっており不連続性が生じる。

外部と内部の表面力の差を  $\mathbf{q} = \mathbf{f} - \mathbf{f}'$  としよう。 $\mathbf{q}$  を与える関数系が界面の構成方程式である。界面の構成方程式として最も基本的なものは表面張力であろう。表面張力係数を  $\gamma$  とすると、これは一般には界面の位置の関数になっている。粘性係数が  $\mu$  の流体から外向きに法線ベクトル  $\mathbf{n}$  をとる。2 つの流体界面の間に、表面張力のみが働くとする、界面での流体力の差は、

$$q_i = \gamma n_i \frac{\partial n_j}{\partial x_j} - (\delta_{ij} - n_i n_j) \frac{\partial \gamma}{\partial x_j} \quad (31)$$

と書ける。 $\gamma$  が定数で、界面が半径  $a$  の球の場合には、 $q_i = \frac{2\gamma}{a} n_i$  となる。特に、表面張力が大きな極限では、界面の形状は変化せず、このときの境界条件は、式 (31) の代わって、接線応力の連続性が課される。また、形状変化が無いので、境界の速度を  $\mathbf{U}$  とすると、 $\mathbf{U} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$  が成り立つ。

## 2.3 非ニュートン流体

非圧縮ナビエ-ストークス方程式は細胞スケールから大気スケールまで幅広い現象に現れる水や空気の運動を非常に良く記述する。しかし、これまでの導出過程で見てきたように、ナビエ-ストークス方程式は極めて限定的な構成式をもつニュートン流体にしか適用できない。ニュートン流体でない流体はまとめて非ニュートン流体と呼ばれる。血液や食品といった糖類や高分子・タンパク質などを含んだ懸濁液、ゲル・ゾルなどは、流れる物体ではあるが、ニュートン流体では記述できない。このような非ニュートン流体を表す流体のモデルは、応力テンソル  $\sigma_{ij}$  と歪み速度テンソル  $E_{ij}$  の関係式である構成方程式によって記述される。

ニュートン流体の構成方程式は、

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \mu E_{ij} \quad (32)$$

であった。ここで、粘性係数  $\mu$  を定数とせず、歪み速度テンソルの関数としたものを一般化ニュートン流体という。例えば、 $xy$  平面内の一様せん断流れ  $\mathbf{u} = (u, 0, 0)$ ,  $u = \dot{\gamma}y$  を考えてみよう。 $\dot{\gamma}$  はせん断強さと呼ばれる定数である。このときの応力応答を実験的に調べた際に、 $\sigma_{xy}/\dot{\gamma}$  が定数であればニュートン流体であり、そうでない場合が非ニュートン流体である。 $E_{xy}$  に対して増加関数となっていれば、シアシックニング (shear-thickning), 減少関数の場合にはシアシニング (shear-thinning)<sup>6</sup> という。

また、振動流れを与えたときには、式 (32) を時間に関してフーリエ変換して、振動数  $\omega$  の関数である複素粘性率  $\hat{\mu}(\omega)$  を用いて物体のレオロジー特性を特徴づけることも多い。フーリエ係数に対して、

$$\hat{\sigma}_{ij} = -\hat{p}\delta_{ij} + \hat{\mu}(\omega)\hat{E}_{ij}. \quad (33)$$

の関係式を考え、 $\hat{\mu}(\omega)$  を実験的に調べる。式 (33) も一般化ニュートン流体と呼ばれることがある。

流体が弾性的な性質を示すとき、粘弾性流体 (viscoelastic fluid) と呼ばれる。連続体の構成方程式を圧力項とそれ以外に分けて

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \tau_{ij} \quad (34)$$

と書いておこう。 $\tau_{ij}$  は余剰応力 (deviatoric stress) と呼ばれる。ニュートン流体の場合には、 $E_{ij}$  を歪み速度テンソルとして  $\tau_{ij} = 2\mu E_{ij}$  で与えられた。一般の粘弾性体は  $\tau_{ij}$  が  $E_{ij}$  の瞬時の値だけでなく、過去の履歴に依存した関数系として与えられる。あるいは、微分方程式の形、

$$(1 + \mathcal{A})\tau_{ij} + \mathcal{M}(\tau_{ij}, u_i) = 2\mu(1 + \mathcal{B})E_{ij} + \mathcal{N}(E_{ij}, u_i) \quad (35)$$

で書かれる場合もある。 $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$  は時間に関する線形の微分演算子、 $\mathcal{M}$ ,  $\mathcal{N}$  は  $\mathbf{u}$  に依存する非線型の微分演算子である。特に、線形演算子のみで書かれる場合、線形粘弾性流体と呼ばれる。

例えば  $\mathcal{M} = \mathcal{N} = 0$ ,  $\mathcal{A} = \tau \frac{\partial}{\partial t}$ ,  $\mathcal{B} = 0$  とした構成方程式を持つ粘弾性モデルはマクスウェル (Maxwell) 流体として知られている。ここで、 $\tau$  は弾性的応答の緩和時間を表す定数である。これをフーリエ変換すると、式 (33) で  $\hat{\mu} = \frac{1}{1+i\tau\omega}$  とした場合と同じ構成方程式であることが分かる。 $De = \tau\omega$  は弾性緩和時間と、関心を持っている流体運動の時間スケールの比を表す無次元数であり、デボラ数 (Deborah 数) と呼ばれる。 $De$  が 1 より小さければその物体は流体的に振る舞い、反対に  $De$  が 1 より大きいと弾性体として振る舞う。

構成方程式を与える微分方程式 (35) は、物体座標系の取り方によらないことが要請される。連続体力学の原理の一つとして理解されており、物質客観性の原理 (principle of material objectivity) と呼ばれる。マクスウェル流体を含む線形粘弾性モデルは、いずれも物質客観性の原理を満たさない。そのため、線形粘弾性流体は、常に一種の有効モデルであるという認識が必要である。一方で、物質客観性を満たす非線形粘弾性モデルも多数存在するが、それらに含まれる物質パラメータを実験的に定めることは容易ではない。

<sup>6</sup>せん断増粘性、せん断減粘性という訳語も存在する。

### 3 レイノルズ数と流れの方程式

#### 3.1 高粘性流れ

今考えている系における代表的な長さの値を  $L$ 、代表的な速さの値を  $U$  とする。非圧縮のナビエ-ストークス方程式 (28) をこれらの代表値を用いて無次元化しよう。今、外力  $\mathbf{b}$  が無い ( $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ ) とする。応力テンソルが  $\frac{\mu U}{L}$  の次元であることに注意<sup>7</sup>して、無次元物理量に \* をつけて表記すると、 $u_i = U u_i^*$ 、 $x_i = L x_i^*$ 、 $t = T t^*$ 、 $\sigma_{ij} = \frac{\mu U}{L} \sigma_{ij}^*$  となる。これを式 (28) に代入すれば、

$$\frac{\rho U}{T} \frac{\partial u_i^*}{\partial t^*} + \frac{\rho U^2}{L} u_j^* \frac{\partial u_i^*}{\partial x_j^*} = \frac{\mu U}{L^2} \frac{\partial \sigma_{ij}^*}{\partial x_j^*} \quad (36)$$

を得る。ここで、レイノルズ数 (Reynolds number)  $Re = \frac{\rho U L}{\mu}$  を定める。すると式 (36) は、

$$Re \left[ \frac{\partial u_i^*}{\partial t^*} + u_j^* \frac{\partial u_i^*}{\partial x_j^*} \right] = \frac{\partial \sigma_{ij}^*}{\partial x_j^*} \quad (37)$$

となる。

考えている系の代表長さが小さい、代表速さが小さい、粘性係数が大きい、といった場合にはレイノルズ数は小さくなる。例えば、マイクロスケールの物体周りの流れや、マイクロ流路内の流れを考える場合が典型的である。 $Re \lesssim 1$  の場合、左辺の慣性の効果に比べて、右辺の粘性の効果が支配的であり、式 (28) の左辺の 2 つの項を無視した方程式、 $\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0$  が流体運動をよく記述する。具体的に書けば

$$\mu \nabla^2 \mathbf{u} = \nabla p \quad (38)$$

であり、これを定常ストークス方程式、あるいは単にストークス方程式という。

ナビエ・ストークス方程式の近似としてのストークス方程式には、数学的な問題点があることが知られており、特に物体まわりの流れの問題 (外部問題) に対しては、物体の遠方で、その近似が悪くなる。それでも、ストークス方程式の解はナビエ・ストークス方程式の第 1 近似を与えることが理解されており、基本的には  $Re$  が小さくなるほど、その近似は良くなる。実用的には、 $Re \lesssim 1$  であれば実験結果を十分に説明する「良い」数理モデルだ、と考えるべきであろう。

#### 3.2 非粘性流

次に、レイノルズ数の大きな流れを考える。日常スケールの流れのほとんどで  $Re \gtrsim 1$  であり、粘性項に比べて慣性の効果が大きい。式 (29) でも示した通り、ナビエ-ストークス方程式から粘性を無視した式

$$\rho \left[ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right] = -\nabla p \quad (39)$$

はオイラー方程式と呼ばれ、歴史的にはこちらのほうが 100 年近く古い。粘性を無視したオイラー方程式の数理モデルとしての扱いは幾分悩ましい。それは、どんなにレイノルズ数が大きくなったとしても、固体壁面境界近傍では粘性の効果が無視できないからである。固体壁面では流れ場は滑りなし境界条件に従わなくてはならず、速度場の勾配が生まれ、そのために粘性効果が現れる。この境界付近の粘性効果が現れる領域を境界層 (boundary layer) といい、レイノルズ数が大きくなるにつれ薄くなるものの消えることはない。例えば、航空機の周りの流れでは境界層は 1 mm 以下になっている。逆に言えば、境界から十分離れた領域では、しばしば粘性を無視したオイラー方程式による流体記述が意味をなすことも多い。

<sup>7</sup>圧力項は、左辺の慣性項、右辺の粘性項の寄与によって、非圧縮性を満たす様に定まる量である。この節で考えている高粘性流の場合には、粘性高の大きさで定まる。一方、式 (29) で見たように、慣性項が支配的な状況 (次節参照) では、圧力は粘性項でなく慣性項と同じ程度の大きさを持つ。

## 4 非粘性流の諸定理

非粘性流は現実の流れのひとつの理想化ではあるが、数的に取り扱いやすいことも多く、それらの理論的な結果は、複雑な流れの理解をする際の足がかりとなる。この章では、非粘性流の基本的な性質と応用について簡単にまとめておく。

### 4.1 ベルヌーイの定理

重力のようなポテンシャルの勾配で記述できる外力を保存力という。これを  $\mathbf{b} = \nabla\Phi$  と書こう。以降、オイラー方程式で記述される非粘性流 (39) に保存力のみが働いている状況を考える。このとき、以下のベルヌーイの定理が成り立つ。これは、エネルギーの保存則に対応している。

**定理 11** (ベルヌーイの定理 (ベルヌーイの流線定理)). 非圧縮非粘性流の定常流れにおいて、エネルギー

$$H = \frac{\rho}{2}|\mathbf{u}|^2 + p + \Phi \quad (40)$$

は同一流線上で一定の値になる。

**証明.** 非圧縮性より  $\rho$  が定数であることに注意すると、オイラー方程式は、

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = -\nabla \left( \frac{p}{\rho} + \Phi \right) \quad (41)$$

と書ける。ここで、ベクトルの恒等式  $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u} + \nabla \left( \frac{1}{2}|\mathbf{u}|^2 \right)$  を用いると、

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u} = -\nabla \left( \frac{1}{2}|\mathbf{u}|^2 + \frac{p}{\rho} + \Phi \right) \quad (42)$$

と書き直せる。定常流れであるから、式 (42) の右辺の括弧内を  $\frac{H}{\rho}$  とおくと、 $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u} = -\nabla H$  が得られる。両辺  $\mathbf{u}$  と内積をとると、 $(\mathbf{u} \cdot \nabla)H = 0$ 。左辺は定常流れにおけるラグランジュ微分であるから、流れに沿って、 $H$  が定数であることがわかる。□

流れが渦なしの場合には、上の証明で  $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$  とすればよいので、次がすぐに分かる。

**定理 12** ((渦なし流における) ベルヌーイの定理). 定常な非圧縮渦なし非粘性流において、エネルギー  $H$  は領域全体で一定の値になる。

### 4.2 渦の諸定理

非粘性流にはエネルギー以外にも重要な保存量がある。

**定理 13** (ケルビンの循環定理). 流れとともに変形する閉曲線  $C(t)$  のまわりの循環  $\Gamma = \oint_{C(t)} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{x}$  は時間不変量。すなわち、 $\frac{d\Gamma}{dt} = 0$ 。

**証明.** 曲線  $C$  上の点をラグランジュ座標  $s \in [0, 1]$  でパラメータ付けする。すると循環  $\Gamma$  の時間微分は、

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \frac{d}{dt} \oint_{C(t)} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{x} = \frac{d}{dt} \int_0^1 \mathbf{u} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial s} ds \quad (43)$$

と書ける。 $s$  はラグランジュ座標なので、 $s$  での積分と時間微分は交換することができ、

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \int_0^1 \frac{D}{Dt} \left( \mathbf{u} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial s} \right) ds = \int_0^1 \left[ \frac{D\mathbf{u}}{Dt} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial s} + \mathbf{u} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial s} \right] ds = \oint_{C(t)} \frac{D\mathbf{u}}{Dt} \cdot d\mathbf{x} + \oint_{C(t)} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{u} \quad (44)$$

と計算できる．式 (44) の最後の項は  $\frac{1}{2} [|\mathbf{u}|^2]_C$  と積分できる． $[ ]_C$  は曲線  $C$  での 1 周の前後での値の差を表す．速度場の 1 価性より，この積分はゼロである．式 (44) の最後の式の 1 項目は，オイラー方程式より，

$$\frac{d\Gamma}{dt} = - \oint_{C(t)} \nabla \left( \frac{p}{\rho} + \Phi \right) \cdot d\mathbf{x} = - \left[ \frac{p}{\rho} + \Phi \right]_C \quad (45)$$

となる．この積分も  $p$ ,  $\rho$ ,  $\Phi$  の 1 価性よりゼロとなり，循環は時間変化しないことが分かる．  $\square$

循環はある時刻のある渦管についての変量であることみた (定理 2)，実は，ケルビンの循環定理より，ある渦管は流体と共に運動し常に一つの渦管として保たれる．この事実は，ヘルムホルツの渦定理として知られ，しばしば，非粘性流では渦管 (あるいは渦線) は流れに凍結している，と表現される．

**定理 14 (ヘルムホルツの渦定理)**. 渦管は流れと共に運動し，その強さ  $\Gamma$  は時間不変量．

**証明**. 渦管の側面を成す曲面，すなわち，法線ベクトルを  $\mathbf{n}$  としたとき  $\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n} = 0$  を満たす曲面を渦面 (vortex surface) という．渦面内に閉曲線  $C$  をとると， $C$  に沿った循環  $\Gamma[C] = \oint_C \mathbf{u} \cdot d\mathbf{x}$  は  $C$  を境界とする渦面のある部分  $S$  を用いて， $\Gamma[C] = \int_S \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n} dS$  となるが，これは渦面の定義よりゼロ．曲線  $C$  が流れによって後の時刻で  $C'$  になったとしよう．このとき， $C'$  で囲まれた表面を  $S'$  とする．ケルビンの循環定理より， $\Gamma[C'] = \int_{S'} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n} = 0$ ． $C'$  (あるいは  $S'$ ) は任意にとれるので，結局  $S'$  上のいたるところで， $\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n} = 0$  となり， $S'$  も渦面であることがわかる．  $\square$

非常に細い渦管を考えると，その断面内で渦度  $\boldsymbol{\omega}$  が定数として良いだろう．断面の面積を  $\sigma$  とすれば，渦度の大きさ  $\omega$  を用いて，その循環  $\Gamma = \omega\sigma$  が時間不変量であることを上で見た．渦管が流れによって引き伸ばされると， $\sigma$  が小さくなるので，渦の強さ  $\omega$  はそれに合わせて大きくならなければならない．

またこれらの定理は，非粘性流であれば，ある時刻で急に渦が生成されたり無くなったりしないことを意味している．そのため，非粘性流では渦は不生不滅である，と称される．この事実はラグランジュの渦定理として知られる．

**定理 15 (ラグランジュの渦定理)**. 非粘性流において，ある時刻で流体のある部分が渦なし (非発散) であれば，常にその部分は渦なし流れのままである．特に，初期時刻で領域全体で渦なしであれば，常に流れは渦なしである．

### 4.3 2次元渦なし流

ラグランジュの渦定理より，非粘性流においては，渦なし流れはそれだけで重要な流れの構造を表す．特に，2次元的な渦なし流れは，翼周りの流れの解析で用いられてきた歴史を持つ．ここでは，翼に揚力が発生する仕組みを示したクッタ-ジューコフスキー (Kutta-Joukowski) の定理を紹介しよう．

航空機や鳥のような翼が，流れの中に静止して置かれている状況を考える．外力は無いとする．翼断面内の2次元的な流れに注目しよう．すなわち， $\mathbf{u} = (u, v, 0)$ ．高レイノルズ数でも，一般には流体の粘性を無視することはできないが，翼の様な流線形の物体の周りの流れは，流れが物体に沿って流れており，境界付近の非常に薄い範囲を除いて，渦度はゼロとしてよい．

このような状況で2次元の渦なし流れを考えよう．渦なし流れは速度ポテンシャル  $\phi(x, y)$  を用いて， $\mathbf{u} = \nabla\phi$  と書けた．一方，任意の2次元非圧縮流れは流れ関数 (stream function)  $\psi(x, y)$  を用いて，

$$u = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial\psi}{\partial x} \quad (46)$$

と書き表せる．2次元の勾配ベクトル  $\nabla = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y})$  と垂直なベクトルを与える演算子  $\nabla^\perp = (\frac{\partial}{\partial y}, -\frac{\partial}{\partial x})$  を用いて， $\mathbf{u} = \nabla^\perp\psi$  と書けることから分かるように，流れ関数の等高線は流線に等しい．

速度ポテンシャルでの表示と比較すると,

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (47)$$

の式を得る. これは複素関数論のコーシー–リーマンの関係式に等しい. そのため, 複素速度ポテンシャル

$$W = \phi + i\psi \quad (48)$$

を定めると,  $W$  が複素変数  $z = x + iy$  の解析関数  $W(z)$  であることがわかる. 速度場は  $\frac{dW}{dz} = u - iv$  により求まる. 流体中の物体に働く力は次のブラウジウス (Blausius) の公式によって与えられる.

**定理 16 (ブラウジウスの公式).** 物体の境界を表す閉曲面を  $C$  とする. 物体の周りの流れ場が複素速度ポテンシャル  $W(z)$  で表されるとき, 物体に働く力  $\mathbf{F} = (F_x, F_y, 0)$  は,

$$F_x - iF_y = \frac{i\rho}{2} \oint_C \left( \frac{dW}{dz} \right)^2 dz \quad (49)$$

で与えられる.

**証明.**  $C$  上の点を弧長  $s$  でパラメータ付けする. すると, 物体に働く力  $\mathbf{F}$  は  $F_i = \oint_C \sigma_{ij} n_j ds$  と書ける.  $ds$  は線素,  $\mathbf{n}$  は物体から外向きの法線ベクトルである. 非粘性流では応力テンソルは  $\sigma_{ij} = -p\delta_{ij}$  となる. ここで,  $\theta(s)$  を  $x$  軸と  $C$  上の点  $\mathbf{x}(s)$  での接線のなす角度と定義すれば,

$$F_x - iF_y = - \oint_C p(\sin \theta + i \cos \theta) ds = -i \oint_C p e^{-i\theta} ds \quad (50)$$

と書ける. 今, 物体の法線方向には速度がゼロであることから, 曲線  $C$  上での速度場は流線に一致している. そのため,  $q = |\mathbf{u}|$  とすると,  $C$  上で  $u = q \cos \theta$ ,  $v = q \sin \theta$  となる. すなわち,  $\frac{dW}{dz} = u - iv = q e^{-i\theta}$  を得る. これと, 渦なし流のベルヌーイの定理「 $H = \frac{\rho}{2} q^2 + p$  が一定」の関係式より, 式 (50) は,

$$F_x - iF_y = -i \oint_C \left( \frac{\rho}{2} q^2 - H \right) e^{-i\theta} ds = \frac{i\rho}{2} \oint_C \left( \frac{dW}{dz} \right)^2 e^{i\theta} ds + iH \oint_C e^{-i\theta} ds \quad (51)$$

となる. ここで,  $e^{i\theta} ds = dz$ ,  $e^{-i\theta} ds = d\bar{z}$  となることを用いる.  $\bar{z}$  は  $z$  の複素共役を表す. 式 (51) の最後の項の積分は  $\oint_C d\bar{z} = [\bar{z}]_C = 0$  となるから, 求めたい表式を得る.  $\square$

これを利用して, 一様流の中の物体に働く力の表式を求めよう. 一様流に対して, 平行な成分を抗力 (drag), 垂直方向の力を揚力 (lift) という. 航空機がその機体の自重を支えるためには, 十分な揚力を流れから得る必要がある.

**定理 17 (クッタ–ジューコフスキーの定理).** 非粘性渦なし流れを考える. 速さが  $U$  の一様流中に静止した物体に働く力は, 抗力を  $D$ , 揚力を  $L$  とすると, 物体を含む閉曲線  $C$  に沿った循環  $\Gamma$  を用いて,

$$D = 0, \quad L = -\rho U \Gamma \quad (52)$$

と表される.

**証明.** 原点  $O$  を物体の内部にとり, 一様流の方向を  $x$  軸にとる. 物体表面上の点と原点の間の距離の最大値を  $R$  とする. 速度場  $\frac{dW}{dz}$  は流体領域で解析的であり,  $R < |z| < \infty$  でローラン展開可能である. これを

$$\frac{dW}{dz} = U + \frac{c_1}{z} + \frac{c_2}{z^2} + \dots \quad (53)$$

と書いておく. ここで, ブラウジウスの公式を適用しよう. 速度場は流体領域で解析的であるから, コーシーの積分定理より, ブラウジウスの公式における周積分は,  $|z| = R$  の円を含む閉曲線  $C'$  での積分に置き換えられる. すると, 式 (49) と (53) より,

$$F_x - iF_y = \frac{i\rho}{2} \oint_{C'} \left( U + \frac{c_1}{z} + \frac{c_2}{z^2} + \dots \right)^2 dz \quad (54)$$

となる。右辺の非積分関数の  $z^{-1}$  の項が  $2Uc_1$  になることに注意すると、留数定理より、

$$F_x - iF_y = \frac{i\rho}{2} \cdot 2\pi i \cdot 2Uc_1 = -2\pi\rho Uc_1. \quad (55)$$

次に、 $c_1$  の意味について考えてみよう。係数  $c_1$  は、式 (53) から、

$$2\pi ic_1 = \oint_{C'} \frac{dW}{dz} dz \quad (56)$$

と書けるが、 $\frac{dW}{dz}$  が流体領域で解析的であることから、積分経路を  $C$  に戻しても良い。すると、

$$2\pi ic_1 = \oint_C \frac{dW}{dz} dz = [W]_C = [\phi + i\psi]_C \quad (57)$$

を得る。曲線  $C$  は流線と等しく、 $C$  上で流れ関数は一定の値を取るのので、 $[\psi]_C = 0$ 。一方、循環の表式から、

$$\Gamma = \oint_C \mathbf{u} \cdot d\mathbf{x} = \oint_C \nabla\phi \cdot d\mathbf{x} = [\phi]_C \quad (58)$$

となるので、求めたい表式を得る。□

注 2. クッタ-ジューコフスキーの定理は、揚力が循環を用いて与えられることを意味している。しかし、具体的な形状に対して流れ場を求めようとしても、境界条件が不足しているために、あらゆる循環をもつ流れが解として現れる。そこで、循環  $\Gamma$  を定めるために、「物体の流れの後端で速度場が発散しない」という条件を課す。これは、流れが物体に沿って流れるという観測に対応するもので、クッタ条件として知られている。また、クッタの条件により  $\Gamma$  を定め、そこから得られる揚力の値は、一様流に対する翼の迎角が小さい時に実験値とよく一致することが知られており、流体力学の数理モデルの有名な成功例の一つである。

迎角が大きくなると、実際の流れは物体に最後まで沿うことができず、翼の途中で離れてしまい、翼の後ろには渦が発生するため、渦なし流の理論は適用できない。流れが物体から離れてしまうことを剥離というが、流れの構造を大きく変えてしまう要因は、物体表面付近の境界層にあり、本質的には粘性が無視できないことを意味している。

さらに、クッタ-ジューコフスキーの定理は、定常な非粘性渦なし流れでは抗力は生じないことを表している。実際は、物体には流体による抗力が発生するため、抗力に対しては、数理モデルとして機能していない。この矛盾はダランベールのパラドックスとして知られ、粘性を無視したために生じている。実際、定常流れで抗力が生じるためには、渦の発生が必要である。しかし、上でも見た様に、非粘性流では渦がどの様に発生するのかを前もって予言できない。これも、物体表面のわずかな領域での粘性の効果が無視できないためである。

## 参考文献

- [1] K. Ishimoto, E. A. Gaffney, and B. J. Walker. Regularized representation of bacterial hydrodynamics. *Physical Review Fluids*, 5:093101, 2020.
- [2] 深谷賢治. 電磁場とベクトル解析. 岩波書店, 2004.
- [3] 巽友正. 流体力学. 培風館, 1982.
- [4] D. J. Acheson. *Elementary Fluid Dynamics*. Oxford University Press, 1990.
- [5] 久田俊明. 非線形有限要素法のためのテンソル解析の基礎. 丸善出版, 1992.
- [6] O. Gonzalez and A. M. Stuart. *A First Course in Continuum Mechanics*. Cambridge University Press, 2008.
- [7] 岡本久・中村周. 関数解析. 岩波書店, 2006.