フラクタル上のラプラシアン・熱方程式入門*

梶野　直孝（京都大学数理解析研究所）

数理解析研究所　第 43 回数学入門公開講座
2022 年 8 月 1 日～4 日

目次

* 公開講座実施時に配布したテキストを一般公開に際し一部加筆修正.

0　序：フラクタルとは?

[*1]「フラクタル」という語は，その歴史は浅いものの自然科学においてはそれなりの市民権を得ており，聞いたことがあるという読者も多いことと思う．ではこの言葉を聞いて読者は何を思い浮かべるだろうか．フラクタルの実例は大抵の場合（ある意味）規則的で「奇麗な」絵や写真として紹介されるから，そのような絵や写真を通してフラクタルに興味を持ったという読者もいるであろう．しかし「奇麗さ」だけでは芸術の対象にはなっても自然科学の研究対象にはなりにくい訳で，自然科学の文脈でフラクタルが一定の頻度で登場するのには別の理由がある．その「別の理由」を見出し広く世に知らしめたのが，フラクタル (fractal) という語の提唱者 Benoit B. Mandelbrot (1924–2010) である．

Mandelbrot による指摘「自然界はフラクタルに溢れている」

「長さが無限大の曲線」「面積が 0 の（平面）図形」などといった，通常の滑らかな曲線や曲面とは著しく異なる幾何構造を有する図形が存在することは古くから知られていた．図 0.1 はそのような図形の代表例である．滑らかな図形を標準的とみなす古典的な価値観からこうした図形は長らく「病的な」例外としか考えられてこず，純粋に数学的な興味から考察の対象となることはあっても重要な研究対象となることはなかった．

状況が大きく変わったのは 1970 年代であった．Mandelbrot は [51, 52] において，自然界に存在する多くの物質・物体がむしろそうした「病的な」図形をこそ基本構造に持つことを指摘し，そうした図形一般を「フラクタル」(fractal) と呼んだ．現在ではフラクタルは物理，化学，生物，工学，医学といった理工系科学の諸分野で普遍的に見出され理論・応用両面から盛んに研究されている．コンピューターグラフィックス技術の進歩により複雑なフラクタルを高い精度で実際に「描いてみる」ことが可能になり，描いてみると非常に色鮮やかな絵が得られることも，フラクタルが高い関心を集めることになった一因と言えるだろう．

数学におけるフラクタル：フラクタル幾何学の進展

数学においてもフラクタルは様々な場面，特に力学系や確率論の文脈で自然に現れ重要な研究対象となってきた．例えば現代確率論において最も基本的な対象である $\mathbb{R}^d$ 上の Brown 運動は，確率 1 で（random な $\mathbb{R}^d$-値連続曲線として）至る所微分不可能かつ任意の有界区間上で非有界変動であることが知られており（例えば [30, Sections 1.5 and 2.9] を参照），その意味で「フラクタル的」であると言える．また複素力学系で重要な

[*1] 本節は [25, 第 0 章] および [26, 冒頭より 2 節第 1 段落まで] を再編の上加筆修正したものである．

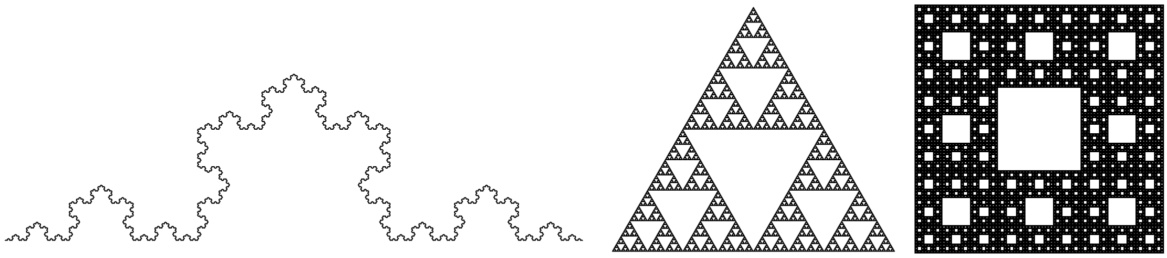


図 0.1　代表的な自己相似フラクタル．左から Koch 曲線，Sierpiński gasket, Sierpiński carpet.

Mandelbrot 集合

$$\left\{c \in \mathbb{C} \;\middle|\; \{z_n\}_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{C} \text{ を } z_0 := 0, z_{n+1} := z_n^2 + c \text{ で定めると } \sup_{n \geq 0} |z_n| < \infty\right\}$$

は複素平面 $\mathbb{C}$ の部分集合として連結であることが知られているが (Douady–Hubbard [9]), Mandelbrot 集合のコンピュータ画像を見る限りではその境界は極めて複雑な形状をしており如何にもフラクタル「らしい」.

このような「極めて複雑な」図形を見て，まずその幾何的性質について調べようと考えるのは自然であろう．実際 Mandelbrot によりフラクタルの重要性が指摘されて以来，当時既に基礎が確立していた幾何学的測度論，力学系，エルゴード理論や調和解析などを土台として，フラクタルの幾何的性質の解明を目標とする「フラクタル幾何学」は急速な発展を見せた.

フラクタル幾何学において最も基本的な研究対象は個々のフラクタルの「(幾何的な) 次元」である．ここでいう「次元」とは $\mathbb{R}^d$ の部分集合（より一般には距離空間やその部分集合）に対して定義される非負の実数であり，その集合の「大きさ（複雑さ)」を表す指標である．ここまでに挙げた例では，図 0.1 の Koch 曲線，Sierpiński gasket, Sierpiński carpet の次元はそれぞれ $\log_3 4 = 1.261859\ldots$, $\log_2 3 = 1.584962\ldots$, $\log_3 8 = 1.892789\ldots$ である（Moran の定理 [53]; 証明は例えば [37, Section 1.5] に，必要な測度論からの準備とともに与えられている)．このように，いわゆる「フラクタル」は典型的には非整数の次元を持ち，そのことが fractal という語の由来にもなっていると思われる（「分数，小数，非整数」という意味の英単語 fraction からの造語と推測される）が，「フラクタル的な」集合が整数の次元を持つ場合もある．実際，$d \geq 2$ に対し $\mathbb{R}^d$ 上の Brown 運動の $\mathbb{R}^d$-値連続曲線としての像は確率 1 で 2 次元（「曲線」であるにも拘らず!）かつその面積（2 次元 Hausdorff 測度）は 0 であることが Taylor [58] の結果により知られている．また Mandelbrot 集合についてはその境界の次元は 2 であるという宍倉光広氏による非常に有名な結果 [56] があるが，境界の 2 次元 Lebesgue 測度が 0 であるかどうかは未だに分かっていないようである.

注意 0.1. 「次元」の概念にはよく使われるものだけでも Hausdorff 次元，box-counting 次元など複数の定義があり，上で紹介した例ではどの次元の定義でも同じ値になるが，フラ

クタルによっては定義の仕方によって異なる値になることもある．この意味でフラクタルには唯一絶対の「次元」が定まっている訳ではなく，実際の研究ではどの「次元」に注目するべきかは目的に応じて個別に判断する必要がある．また与えられたフラクタルに対して「複数の次元の値が一致するかどうか」ということ自体も研究の主題になり得る．

フラクタル上の解析学へ

フラクタル幾何学はいわばフラクタルの，ひいては自然界の物質の「静的」(static) な性質を主題としている．では「動的」(dynamic) な性質，すなわちフラクタルの物理的な性質・フラクタル上の物理現象はどうなっているのだろうか[*2]．この問いに数学的に厳密な解答を与えることを目標とするのが「フラクタル上の解析学」である．

代表的な物理現象としては熱や波動の伝播がある．大学の数学や物理学で学ぶように，等方的で均質な媒質のモデルであるユークリッド空間 $\mathbb{R}^d$ においては，熱や波動の伝播はそれぞれ**熱方程式**

$$\frac{\partial}{\partial t}u(t,x) = \Delta u(t,x) \tag{0.1}$$

および**波動方程式**

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(t,x) = \Delta u(t,x) \tag{0.2}$$

の解として記述される[*3]．ここで Δ は

$$\Delta := \Delta_{\mathbb{R}^d} := \sum_{k=1}^{d} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} \tag{0.3}$$

で定義される偏微分作用素で，$\mathbb{R}^d$ 上の **Laplacian** と呼ばれる．フラクタル上の熱や波動を数学的に厳密に記述し解析するとはすなわち (0.1) や (0.2) に相当する微分方程式を厳密に定式化しその解の性質を調べることであると言え，すると何よりもまず**「フラクタル上の Laplacian とは何か?」**という問いに答えなければならないことになる．フラクタルにおいては通常の偏微分の概念が意味をなさないため，これは極めて非自明な問題である．

実際には Laplacian を直接考えるよりも，双線型形式[*4]

$$\mathcal{E}(u,v) := \int_{\mathbb{R}^d} \nabla u \cdot \nabla v \, dx \tag{0.4}$$

[*2] static, dynamic という言い回しは [37, Introduction] から引用した．

[*3] $\mathbb{R}^d$ における (0.1) と (0.2) の物理学的導出方法や数学的性質については例えば [20, 第 1 章] を参照のこと．なお，簡単のため媒質の性質を表す物理定数はすべて 1 に規格化している．

[*4] $\nabla u := (\partial u/\partial x_1, \ldots, \partial u/\partial x_d)$ は u の勾配ベクトルを表す．

を考える方がいろいろと都合がよいことが多い．この $\mathcal{E}$ は Gauss–Green の公式[*5]

$$\mathcal{E}(u,v) = \langle -\Delta u, v\rangle_{L^2} \tag{0.5}$$

を通して Laplacian Δ と対応しているが，関係式 (0.5) は関数解析の枠組みを用いて一般化でき，L^2 空間上の（ある性質を満たす，通常は非有界な）非正自己共役作用素 Δ と閉な非負定値対称双線型形式 $\mathcal{E}$ で

$$\mathcal{E}(u^+ \wedge 1, u^+ \wedge 1) \le \mathcal{E}(u,u) \tag{0.6}$$

を満たす[*6]もの（**Dirichlet 形式**[*7]）との間の 1 対 1 の対応関係を与えることが知られている．したがってフラクタルにおいても**「自然な Dirichlet 形式を構成する」**ことができれば，それに対応する自己共役作用素として Laplacian が得られることになる．

本講義では，最も基本的な自己相似フラクタルである **Sierpiński gasket**（図 0.1 中央）を例に取り，その上の Laplacian・熱方程式の厳密な定式化と基本性質について解説する．Sierpiński gasket は Laplacian の厳密な定式化がなされた最初のフラクタルであり，Goldstein [14], 楠岡 [46], Barlow–Perkins [6] らによる確率過程を経由した定式化，木上 [31] による解析的手法による定式化を経て，最終的に福島–島 [12] により本稿で述べる，まず Dirichlet 形式を構成する形に整理された．

本稿では扱わないが，同様の定式化は広範な自己相似フラクタルに対して可能であることが知られており，nested fractals（図 0.2）に対して Lindstrøm [49] により，affine nested fractals への拡張が Fitzsimmons–Hambly–熊谷 [10] によりなされた後，木上 [32, 34, 35] により p.-c.f. (post-critically finite) 自己相似集合という (affine) nested fractals を含む範疇の自己相似フラクタルに適用可能な一般論として整理された．これによって p.-c.f. 自己相似集合上の Laplacian は初歩的な関数解析の知識だけを用いて極めて初等的に構成できることが明らかになった上に，Laplacian の具体的な計算方法が与えられたことで更なる研究の進展も促された．Laplacian の解析的な構成の一般論は最終的に木上氏自身により monograph [37] にまとめられ，以来フラクタル上の解析学の最も基本的な文献の 1 つとなっている．ただしこの理論は「有限個の点を除くことで自身の縮小像同士が交わらないようにできる」という p.-c.f. 自己相似集合の著しい性質（**有限分岐性**；特に nested fractals（図 0.2）もこの性質を有する）に極めて強く依存しており，Sierpiński carpet やその自然な

[*5] $\langle\cdot,\cdot\rangle_{L^2}$ はここでは $L^2(\mathbb{R}^d, dx)$ の内積を表す：$\langle f,g\rangle_{L^2} := \int_{\mathbb{R}^d} fg\,dx$. また u,v の無限遠方での挙動に関する適切な条件が必要である．

[*6] $u^+ := \max\{u,0\}$, $u \wedge v := \min\{u,v\}$. なお，$\mathcal{E}$ が**閉**であるとは内積 $\mathcal{E} + \langle\cdot,\cdot\rangle_{L^2}$ の下で $\mathcal{E}$ の定義域が Hilbert 空間（完備内積空間）を成すということであり，また (0.6) は $\mathcal{E}$ の定義域が $u \mapsto u^+ \wedge 1$ で閉じていることも暗に要求している．(0.6) は平たく言って「$\mathcal{E}$ に対応する自己共役作用素 Δ に関する熱方程式 (0.1) の解について最大値の原理が成り立つ」ための条件である．

[*7] 講義時間が限られている関係上，Dirichlet 形式の概念の正確な定式化は脚注∗12 で手短に紹介するに留める．Dirichlet 形式の理論に興味のある方のために入門書として [13] を，専門書として [11, 8, 7, 50] を挙げておく．

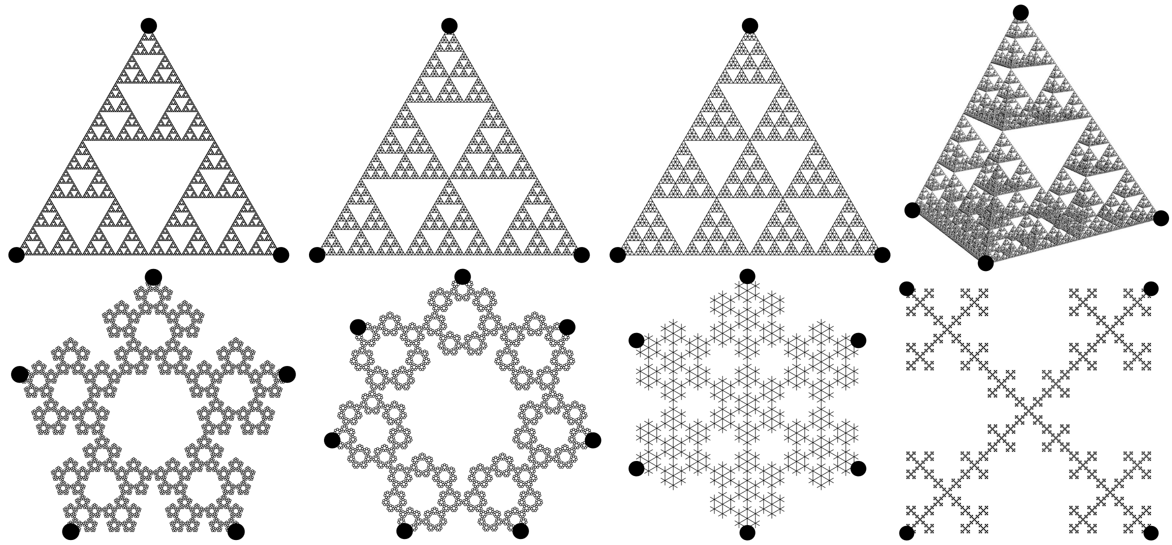


図 0.2　Nested fractals の例．左上方から順に 2 次元 l 段 Sierpiński gasket ($l = 2, 3, 4$), 3 次元標準（2 段）Sierpiński gasket, pentagasket (5-polygasket), heptagasket (7-polygasket), snowflake, Vicsek 集合．各フラクタルに対しその境界点全体の集合 V_0 を黒点で示してある．

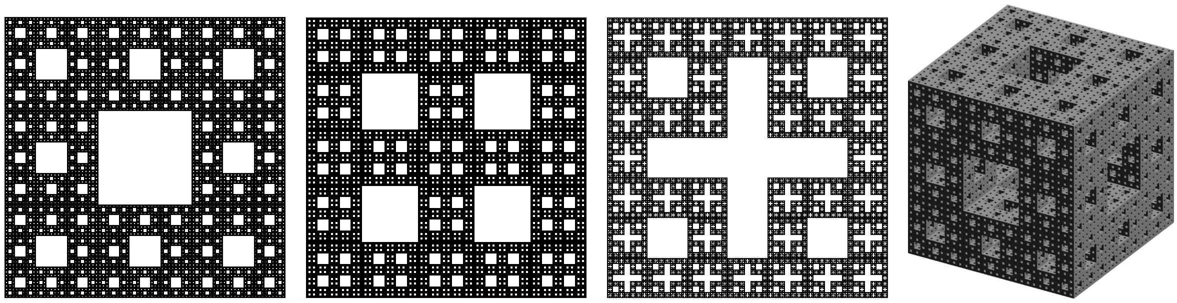


図 0.3　Sierpiński carpet, 他の 2 次元 generalized Sierpiński carpets と Menger sponge

一般化である generalized Sierpiński carpets（図 0.3）のようなフラクタルを取り扱うことはできない．Generalized Sierpiński carpets における Laplacian の定式化は Barlow–Bass [1, 3], 楠岡–Zhou [48] によりなされたが，これには p.-c.f. 自己相似集合の場合とは桁違いに大きな困難を伴う．この辺りの事情については本稿では 3 節で手短に解説するに留める．

なお近年では上記のような理想的な自己相似性を持つフラクタルだけに留まらず，より複雑な（主として確率論において自然に現れるランダムな）フラクタルの上で解析学を展開する研究も盛んに行われているが，これについては熊谷氏による解説記事 [44, 45] および講義録 [43] を読まれることをお勧めする．

幾つかの記号

本論に入る前に，本稿を通して使われる幾つかの記号をここで導入しておく．

記号 0.2. (1) 等式

$$A := B$$

は「A を B で定義する」の意味に用いる．

(2) $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ は通常通り自然数全体，整数全体，有理数全体，実数全体，複素数全体の集合をそれぞれ表す．本稿では $\mathbb{N}$ は 0 を含まないと約束する：

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}.$$

(3) 集合 A に属する元の総数を $\#A$ で表す．$\#A \in \mathbb{N} \cup \{0, \infty\}$ である．

(4) 集合 X の恒等写像を id_X で表す：$\mathrm{id}_X \colon X \to X, \mathrm{id}_X(x) := x$.

(5) 集合 X 上の実数値関数全体の成す線型空間を $\mathbb{R}^X$ で表す：$\mathbb{R}^X := \{u \mid u \colon X \to \mathbb{R}\}$.

(6) 集合 X, Y, 写像 $f : X \to Y$ と $A \subset X$ に対し, 写像 $f|_A : A \to Y$ を $f|_A(x) := f(x)$, $x \in A$ により定める．この $f|_A$ を f の A への制限という．

(7) 空集合 $\emptyset$ の上限, 最大値, 下限, 最小値は $\sup\emptyset := \max\emptyset := 0, \inf\emptyset := \min\emptyset := \infty$ と約束する．$a, b \in [-\infty, \infty]$ に対し $a \vee b := \max\{a, b\}, a \wedge b := \min\{a, b\}, a^+ := a \vee 0$, $a^- := -(a \wedge 0)$ と定め，$[-\infty, \infty]$-値関数に対しても同様の記号を用いるものとする．本稿では関数と言えば $[-\infty, \infty]$-値関数のみを考えるものとする．

(8) $d \in \mathbb{N}$ とする．$\mathbb{R}^d$ 上の通常の Euclid ノルムを $|\cdot|$ で表す：$x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ に対し $|x| := \left(\sum_{k=1}^{d} x_k^2\right)^{1/2}$.

(9) X を位相空間とする．$A \subset X$ に対しその X における内部，閉包，境界をそれぞれ $\mathrm{int}_X A$, $\overline{A}^X$, $\partial_X A$ で表す．さらに $\mathcal{C}(X) := \{f \mid f : X \to \mathbb{R}, f$ は連続 $\}$, $f \in \mathcal{C}(X)$ に対し $\mathrm{supp}_X[f] := \overline{f^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})}^X$, $\|f\|_{\sup} := \|f\|_{\sup,X} := \sup_{x \in X}|f(x)|$ とおき，$\mathcal{C}_{\mathrm{c}}(X) := \{f \in \mathcal{C}(X) \mid \mathrm{supp}_X[f]$ はコンパクト $\}$ とする．

1 Sierpiński gasket 上の標準 Dirichlet 形式・Laplacian の構成

さて，本講義の本題に入る．まず本節では Sierpiński gasket 上の自然な Dirichlet 形式の構成を完全な証明とともに与える．本節の内容は [28, 第 2 章，第 3 章] を再編したものであるが，紙数および時間の節約のため本稿では関連事項についての記述は必要最小限に留めており，Laplacian や熱方程式の性質を詳しく調べる上で必須の事柄の多くを省略している．網羅的に学ばれたい方のために筆者による講義ノート [28, 25] および木上氏による monograph [37, Chapters 1–3] を挙げておく．

1.1 Sierpiński gasket

まず Sierpiński gasket の定義を述べる．$q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{R}^2$ を $q_1 := \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $q_2 := (0, 0)$, $q_3 := (1, 0)$ で定め，$V_0 := \{q_1, q_2, q_3\}$ とおく．$S := \{1, 2, 3\}$ とおき，各 $j \in S$ に対し

$f_j : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を

$$f_j(x) := \frac{1}{2}(x + q_j) \tag{1.1}$$

で定める．$\mathbb{R}^2$ の有限部分集合の列 $\{V_m\}_{m=1}^{\infty}$ を，$m \in \mathbb{N}$ に対し帰納的に

$$V_m := \bigcup_{j\in S} f_j(V_{m-1}) \tag{1.2}$$

で定めると，明らかに $V_0 \subset V_1$ であり，すると (1.2) を用いた m に関する数学的帰納法により任意の $m \in \mathbb{N}$ に対し $V_{m-1} \subset V_m$ であることが容易に分かる．そして $V_*, K \subset \mathbb{R}^2$ を

$$V_* := \bigcup_{m=0}^{\infty} V_m, \qquad K := \overline{V_*}^{\mathbb{R}^2} \tag{1.3}$$

で定義し，K を（**2 次元標準**）**Sierpiński gasket** と呼ぶ．K は定義により $\mathbb{R}^2$ の有界閉集合，従ってコンパクトであるが，さらに

$$\bigcup_{j\in S} f_j(V_*) = \bigcup_{j\in S}\bigcup_{m=0}^{\infty} f_j(V_m) = \bigcup_{m=0}^{\infty}\bigcup_{j\in S} f_j(V_m) = \bigcup_{m=0}^{\infty} V_{m+1} = V_*$$

であるので，この両辺の $\mathbb{R}^2$ における閉包を取り（$f_j : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ は同相写像なので）$\overline{f_j(V_*)}^{\mathbb{R}^2} = f_j\bigl(\overline{V_*}^{\mathbb{R}^2}\bigr)$ であることに注意すると

$$K = \overline{V_*}^{\mathbb{R}^2} = \overline{\bigcup_{j\in S} f_j(V_*)}^{\mathbb{R}^2} = \bigcup_{j\in S} \overline{f_j(V_*)}^{\mathbb{R}^2} = \bigcup_{j\in S} f_j\bigl(\overline{V_*}^{\mathbb{R}^2}\bigr) = \bigcup_{j\in S} f_j(K)$$

となり，次が成り立つことが分かる：

$$K = \bigcup_{j\in S} f_j(K). \tag{1.4}$$

（実は (1.4) を満たす $\mathbb{R}^2$ の空でないコンパクト集合 K は唯 1 つしかないことも証明できる；[25, 1.1 節] もしくは [37, Section 1.1] を参照のこと．）各 $j \in S$ に対し (1.4) より特に $f_j(K) \subset K$ であるので，$F_j := f_j|_K$ とおくと F_j は K から K への連続な単射になる．

以降で頻繁に用いる記号をまとめておく．

定義 1.1. (1) $m \in \mathbb{N}$ に対し $W_m := S^m = \{w_1 \dots w_m \mid 各\ k \in \{1, \dots, m\}\ に対し\ w_k \in S\}$ とし，$W_0 := \{\emptyset\}$ とする．ここで $\emptyset$ は**空語** (empty word) と呼ばれる特別な元である．さらに $W_* := \bigcup_{m\in\mathbb{N}\cup\{0\}} W_m$ とおく．各 $w \in W_*$ は**語** (word) と呼ばれる．語 $w \in W_*$ に対し，$w \in W_m$ となる唯 1 つの $m \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ を $|w|$ で表し w の長さという．$w, v \in W_*$, $w = w_1 \dots w_m$, $v = v_1 \dots v_n$ に対し $wv \in W_*$ を $wv := w_1 \dots w_m v_1 \dots v_n$ ($w\emptyset := w$, $\emptyset v := v$) で定め，さらに容易に分かるように $w, v, u \in W_*$ に対し $(wv)u = w(vu)$ であることに注意して，$k \geq 3$ と $\{w^{(j)}\}_{j=1}^{k} \subset W_*$ に対し帰納的に

$w^{(1)}\dots w^{(k)} := (w^{(1)}\dots w^{(k-1)})w^{(k)}$ と定める．$w,v\in W_*$ に対し，$w=v\tau$ または $v=w\tau$ となる $\tau\in W_*$ が存在しないことを $w\not\asymp v$ で表す．$w\in W_*, n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ に対し $w^n := w\dots w$（n 個の w の積）とおく．

(2) $w=w_1\dots w_m\in W_*$ に対し $F_w := F_{w_1}\circ\cdots\circ F_{w_m}$ ($F_\emptyset := \mathrm{id}_K$), $K_w := F_w(K)$ とおく．

$j\neq k$ なる $j,k\in S$ に対し $q_{jk} := F_j(q_k)$ とおく．$q_{23}=q_{32}, q_{31}=q_{13}, q_{12}=q_{21}$ であることに注意しよう．K 上に Dirichlet 形式を構成する上で次の性質は基本的である．

命題 1.2.

$$F_2(K)\cap F_3(K)=\{q_{23}\},\quad F_3(K)\cap F_1(K)=\{q_{31}\},\quad F_1(K)\cap F_2(K)=\{q_{12}\}. \tag{1.5}$$

より一般に，$w\not\asymp v$ を満たす任意の $w,v\in W_*$ に対し

$$K_w\cap K_v = F_w(V_0)\cap F_v(V_0) \qquad \text{かつ} \qquad \#(K_w\cap K_v)\leq 1. \tag{1.6}$$

証明. $\triangle := \bigl\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \bigm| x\in[0,1], 0\leq y\leq(\sqrt{3}x)\wedge(\sqrt{3}-\sqrt{3}x)\bigr\}$ を q_1,q_2,q_3 を頂点とする正 3 角形（の内部と境界の和）とすると，明らかに $\bigcup_{k\in S} f_k(\triangle)\subset\triangle$ であり，すると任意の $m\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ に対し $V_m\subset\triangle$ であることが (1.2) を用いた m に関する数学的帰納法により容易に従う．よって $V_*=\bigcup_{m=0}^\infty V_m\subset\triangle$ であり，$\triangle$ は $\mathbb{R}^2$ の閉集合であるので $K=\overline{V_*}^{\mathbb{R}^2}\subset\triangle$. これと $V_0=\{q_1,q_2,q_3\}\subset K$ であること，および (1.5) で K の代わりに $\triangle$ としたものが明らかに成り立つことを合わせると (1.5) が得られる．

次に $w\not\asymp v$ を満たす $w,v\in W_*$, $w=w_1\dots w_m$, $v=v_1\dots v_n$ を任意に取る．$K_w\cap K_v=\emptyset$ のときは $F_w(V_0)\cap F_v(V_0)\subset K_w\cap K_v=\emptyset\subset F_w(V_0)\cap F_v(V_0)$, 従って $K_w\cap K_v=F_w(V_0)\cap F_v(V_0)=\emptyset$ となり (1.6) は成り立つので，以下 $K_w\cap K_v\neq\emptyset$ と仮定する．$w\not\asymp v$ なので $m\wedge n\geq 1$ かつ $k\in\{1,\dots,m\wedge n\}$ が存在して $w_k\neq v_k$ であり，そこで $l:=\min\bigl\{k\in\{1,\dots,m\wedge n\}\bigm| w_k\neq v_k\bigr\}, \tau:=w_1\dots w_{l-1}, j:=w_l, k:=v_l$ とおくと l の定義により $\tau=v_1\dots v_{l-1}$, $j\neq k$ となる．さらに F_τ の単射性により

$$\emptyset\neq K_w\cap K_v = F_\tau(K_{jw_{l+1}\dots w_m})\cap F_\tau(K_{kv_{l+1}\dots v_n}) = F_\tau(K_{jw_{l+1}\dots w_m}\cap K_{kv_{l+1}\dots v_n}), \tag{1.7}$$

よって $K_{jw_{l+1}\dots w_m}\cap K_{kv_{l+1}\dots v_n}\neq\emptyset$ であり，これと (1.5) により $\emptyset\neq K_{jw_{l+1}\dots w_m}\cap K_{kv_{l+1}\dots v_n}\subset K_j\cap K_k=\{q_{jk}\}$ であるので $K_{jw_{l+1}\dots w_m}\cap K_{kv_{l+1}\dots v_n}=\{q_{jk}\}$ となる．従って $K_{w_{l+1}\dots w_m}\ni F_j^{-1}(q_{jk})=q_k$ かつ $K_{v_{l+1}\dots v_n}\ni F_k^{-1}(q_{jk})=q_j$ であるが，容易に分かるようにこれらが成り立つのは $w_{l+1}\dots w_m=k^{m-l}$ かつ $v_{l+1}\dots v_n=j^{n-l}$ の場合に限られる．これらの事実を (1.7), $q_k=F_{k^{m-l}}(q_k), q_k=F_{k^{m-l}}(q_k)$ と合わせると

$$\begin{aligned}K_w\cap K_v &= F_\tau(K_{jw_{l+1}\dots w_m}\cap K_{kv_{l+1}\dots v_n}) = \{F_\tau(q_{jk})\}\\ &= \bigl\{F_{\tau jk^{m-l}}(q_k)\bigr\} = \bigl\{F_{\tau kj^{n-l}}(q_j)\bigr\}\\ &\subset F_{\tau jk^{m-l}}(V_0)\cap F_{\tau kj^{n-l}}(V_0) = F_w(V_0)\cap F_v(V_0)\subset K_w\cap K_v,\end{aligned}$$

ゆえに $K_w \cap K_v = F_w(V_0) \cap F_v(V_0) = \{F_\tau(q_{jk})\}$ となり (1.6) が成り立つ. $\square$

1.2 Sierpiński gasket 上の標準 Dirichlet 形式 I：定義と基本性質

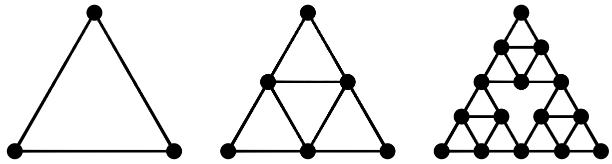


図 1.1 Sierpiński gasket K の近似グラフ列 $(V_m, \overset{m}{\sim})$

K 上の Dirichlet 形式の構成の基本的な方針は，各 $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ に対し V_m 上に図 1.1 のように有限グラフ（電気回路）の構造を定めることにより Dirichlet 形式を定めた後，$m \to \infty$ とした極限を取ることで K 上の Dirichlet 形式を得る，というものである．具体的には，まず $x, y \in V_m$ に対し

$$x \neq y \quad \text{かつ} \quad w \in W_m \text{ が存在して } x, y \in F_w(V_0) \quad \text{となるとき} \quad x \overset{m}{\sim} y \tag{1.8}$$

と定め（図 1.1 も参照のこと），V_m 上の Dirichlet 形式 $\mathcal{E}^{(m)} : \mathbb{R}^{V_m} \times \mathbb{R}^{V_m} \to \mathbb{R}$ を

$$\mathcal{E}^{(m)}(u, v) := \frac{1}{2} \sum_{x, y \in V_m,\, x \overset{m}{\sim} y} \left(\frac{5}{3}\right)^m (u(x) - u(y))(v(x) - v(y)) \tag{1.9}$$

で定義する[*8]．すると次が成り立つ．

命題 1.3. 任意の $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ と任意の $u \in \mathbb{R}^{V_m}$ に対し，

$$\mathcal{E}^{(m)}(u, u) = \min_{v \in \mathbb{R}^{V_{m+1}},\, v|_{V_m} = u} \mathcal{E}^{(m+1)}(v, v) \tag{1.10}$$

が成り立ち，さらに (1.10) の右辺の最小値を達成する v は唯 1 つであり次で定義される u の $\mathbb{R}^{V_{m+1}}$ への拡張 v により与えられる：各 $w \in W_m$ に対し

$$\begin{aligned} v(F_w(q_{23})) &= \frac{1}{5}u(F_w(q_1)) + \frac{2}{5}u(F_w(q_2)) + \frac{2}{5}u(F_w(q_3)), \\ v(F_w(q_{31})) &= \frac{2}{5}u(F_w(q_1)) + \frac{1}{5}u(F_w(q_2)) + \frac{2}{5}u(F_w(q_3)), \\ v(F_w(q_{12})) &= \frac{2}{5}u(F_w(q_1)) + \frac{2}{5}u(F_w(q_2)) + \frac{1}{5}u(F_w(q_3)). \end{aligned} \tag{1.11}$$

[*8] 各辺に抵抗値 $(3/5)^m$ の抵抗を置くことにより V_m を電気回路とみなすと，電位分布 $u \in \mathbb{R}^{V_m}$ の下での回路全体での消費電力（エネルギー）が $\mathcal{E}^{(m)}(u, u)$ である，というのが (1.9) の物理学的意味である．

容易に確認できるように，(1.11) は $\bigl(v(F_w(q_{23})), v(F_w(q_{31})), v(F_w(q_{12}))\bigr)$ に関する次の線型方程式と同値であることに注意する：

$$
\begin{aligned}
4v(F_w(q_{23})) &= u(F_w(q_2)) + v(F_w(q_{12})) + v(F_w(q_{31})) + u(F_w(q_3)),\\
4v(F_w(q_{31})) &= u(F_w(q_3)) + v(F_w(q_{23})) + v(F_w(q_{12})) + u(F_w(q_1)),\\
4v(F_w(q_{12})) &= u(F_w(q_1)) + v(F_w(q_{31})) + v(F_w(q_{23})) + u(F_w(q_2)).
\end{aligned} \tag{1.12}
$$

すなわち，(1.10) の右辺の最小値を達成する唯 1 つの v は

「u を $V_{m+1} \setminus V_m$ の各点において調和になるように V_{m+1} 上に拡張したもの」　(1.13)

で与えられる．

命題 1.3 の証明は，$\mathcal{E}^{(m)}$ が自己相似的な形で定義されていることから従う次の補題を用いて $m = 0$ の場合に帰着させることによりなされる．

補題 1.4. $m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ は $n \leq m$ を満たすとし，$u, v \in \mathbb{R}^{V_m}$ とする．このとき

$$
\mathcal{E}^{(m)}(u, v) = \sum_{w \in W_n} \left(\frac{5}{3}\right)^n \mathcal{E}^{(m-n)}(u \circ F_w|_{V_{m-n}}, v \circ F_w|_{V_{m-n}}). \tag{1.14}
$$

証明. $x, y \in V_m$ が $x \overset{m}{\sim} y$ を満たすとすると，関係 $\overset{m}{\sim}$ の定義 (1.8) により $x \neq y$ かつ $w = w_1 \dots w_m \in W_m$ が存在して $x, y \in F_w(V_0) \subset K_{w_1 \dots w_n}$ となるが，このとき $x \neq y$ と (1.6) により $x, y \in K_\tau$ となる $\tau \in W_n$ は $\tau = w_1 \dots w_n$ に限られ，さらに $F^{-1}_{w_1 \dots w_n}(x) \neq F^{-1}_{w_1 \dots w_n}(y)$ かつ $F^{-1}_{w_1 \dots w_n}(x), F^{-1}_{w_1 \dots w_n}(y) \in F_{w_{n+1} \dots w_m}(V_0)$, 特に $F^{-1}_{w_1 \dots w_n}(x) \overset{m-n}{\sim} F^{-1}_{w_1 \dots w_n}(y)$. 従って

$$
\begin{aligned}
&\bigl\{(x, y) \in V_m \times V_m \bigm| x \overset{m}{\sim} y\bigr\}\\
&= \bigcup_{w \in W_n} \bigl\{(F_w(x), F_w(y)) \bigm| (x, y) \in V_{m-n} \times V_{m-n}, x \overset{m-n}{\sim} y\bigr\}\\
&\qquad \text{（右辺は互いに交わらない集合の和）}
\end{aligned} \tag{1.15}
$$

であり，これと (1.9) により

$$
\begin{aligned}
\mathcal{E}^{(m)}(u, v) &= \frac{1}{2} \sum_{x, y \in V_m, x \overset{m}{\sim} y} \left(\frac{5}{3}\right)^m (u(x) - u(y))(v(x) - v(y))\\
&= \frac{1}{2} \sum_{w \in W_n} \sum_{x, y \in V_{m-n}, x \overset{m-n}{\sim} y} \left(\frac{5}{3}\right)^m \bigl(u(F_w(x)) - u(F_w(y))\bigr)\bigl(v(F_w(x)) - v(F_w(y))\bigr)\\
&= \sum_{w \in W_n} \left(\frac{5}{3}\right)^n \mathcal{E}^{(m-n)}(u \circ F_w|_{V_{m-n}}, v \circ F_w|_{V_{m-n}})
\end{aligned}
$$

となり主張が得られる．　□

命題 1.3 の証明. まず $m=0$ の場合を考える．$u\in\mathbb{R}^{V_0}$ を任意に取り，$v\in\mathbb{R}^{V_1}$ は $v|_{V_0}=0$ を満たすとする．$V_1\setminus V_0=\{q_{23},q_{31},q_{12}\}$ に注意すると，$m=0$ に対する主張は次のように言い換えられる：

> $(v(q_1),v(q_2),v(q_3))=(u(q_1),u(q_2),u(q_3))$ を固定して $\mathcal{E}^{(1)}(v,v)$ を $(v(q_{23}),v(q_{31}),v(q_{12}))\in\mathbb{R}^3$ の関数とみなすとき，これは最小値 $\mathcal{E}^{(0)}(u,u)$ を取り，さらに最小値を達成する $(v(q_{23}),v(q_{31}),v(q_{12}))$ は唯 1 つ存在し (1.11)（で $w=\emptyset$ としたもの）で与えられる． (1.16)

$(a,b,c):=(u(q_1),u(q_2),u(q_3))$, $(x,y,z):=(v(q_{23}),v(q_{31}),v(q_{12}))$ とおくと，$m\in\{0,1\}$ に対する (1.9) により $\mathcal{E}^{(0)}(u,u)=(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2$,

$$\begin{aligned}&\frac{3}{5}\mathcal{E}^{(1)}(v,v)\\&=(y-z)^2+(a-y)^2+(a-z)^2+(b-x)^2+(x-z)^2+(z-b)^2+(x-c)^2+(c-y)^2+(y-x)^2\end{aligned}\tag{1.17}$$

となるので，(1.16) は

> $x,y,z\in\mathbb{R}$ についての 3 変数関数 (1.17) は $x=\frac{1}{5}(a+2b+2c)$, $y=\frac{1}{5}(2a+b+2c)$, $z=\frac{1}{5}(2a+2b+c)$ のときにのみ最小値 $\frac{3}{5}\bigl((b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2\bigr)$ を取る (1.18)

ということに他ならず, これは (例えば) (1.17) をまず x についての 2 次関数と見て平方完成した後, 残りの部分についても y についての平方完成, z についての平方完成を順次行うことにより高校数学の範囲で証明できる[*9]．また，最小値を取る点が $x=\frac{1}{5}(a+2b+2c)$, $y=\frac{1}{5}(2a+b+2c)$, $z=\frac{1}{5}(2a+2b+c)$ 以外にないことは，(x,y,z) の C^1 級関数 (1.17) の x,y,z それぞれについての偏微分 $2(4x-b-c-z-y)$, $2(4y-c-x-z-a)$, $2(4z-a-y-x-b)$ が全て 0 になるような (x,y,z) はこの点に限ることからも分かる．

次に補題 1.4 を用いて一般の m の場合を証明しよう．$m\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ と $u\in\mathbb{R}^{V_m}$ を任意に取り，$v\in\mathbb{R}^{V_{m+1}}$ は $v|_{V_m}=u$ を満たすとする．このとき補題 1.4 を (m,n) の代わりに $(m+1,m)$ として用いると

$$\mathcal{E}^{(m+1)}(v,v)=\sum_{w\in W_m}\left(\frac{5}{3}\right)^m\mathcal{E}^{(1)}(v\circ F_w|_{V_1},v\circ F_w|_{V_1})\tag{1.19}$$

となるが，各 $w\in W_m$ に対し $v\circ F_w|_{V_0}=(v|_{V_m})\circ F_w|_{V_0}=u\circ F_w|_{V_0}$, かつ (1.6) により

$$V_{m+1}\setminus V_m=\bigcup_{w\in W_m}\left(F_w(V_1)\setminus\bigcup_{\tau\in W_m}F_\tau(V_0)\right)$$

[*9] 他の自己相似フラクタルにおいて (1.16) と同様の主張を証明する際には，ここでの証明のような直接計算は複雑過ぎて実行困難である場合も多く，通常は電気回路の理論に基づくより汎用性の高い方法が用いられる．これについては [28, 演習 2.3] および [57, Sections 1.5 and 4.3] を参照されたい．

$$
\begin{aligned}
&= \bigcup_{w \in W_m} \left(F_w(V_1) \setminus \bigcup_{\tau \in W_m} (F_w(V_1) \cap F_\tau(V_0)) \right) \\
&= \bigcup_{w \in W_m} (F_w(V_1) \setminus F_w(V_0)) \\
&= \bigcup_{w \in W_m} F_w(V_1 \setminus V_0) \quad \text{（互いに交わらない集合の和）} \qquad (1.20)
\end{aligned}
$$

であることに注意すると，(1.19) は各 $w \in W_m$ に対し $\mathcal{E}^{(1)}(v \circ F_w|_{V_1}, v \circ F_w|_{V_1})$ が $\bigl(v(F_w(q_{23})), v(F_w(q_{31})), v(F_w(q_{12}))\bigr)$ の関数として最小値を取るとき，またそのときに限り最小値を取る．上記の $m = 0$ の場合の証明により，各 $w \in W_m$ に対しそのような $\bigl(v(F_w(q_{23})), v(F_w(q_{31})), v(F_w(q_{12}))\bigr)$ は唯 1 つで (1.11) により与えられ，また $\mathcal{E}^{(1)}(v \circ F_w|_{V_1}, v \circ F_w|_{V_1})$ の最小値は $\mathcal{E}^{(0)}(u \circ F_w|_{V_0}, u \circ F_w|_{V_0})$ であるので，(1.19) の最小値を与える v も唯 1 つで (1.11) により与えられ，(1.19) の最小値は

$$
\min_{v \in \mathbb{R}^{V_{m+1}},\, v|_{V_m} = u} \mathcal{E}^{(m+1)}(v, v) = \sum_{w \in W_m} \left(\frac{5}{3}\right)^m \mathcal{E}^{(0)}(u \circ F_w|_{V_0}, u \circ F_w|_{V_0}) = \mathcal{E}^{(m)}(u, u)
$$

（最後の等号は $n = m$ に対する補題 1.4 による）となる． □

命題 1.3 の (1.10) より特に各 $u\colon V_* \to \mathbb{R}$ に対し次が成り立つことが分かる：任意の $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ に対し，$v = u|_{V_{m+1}} \in \mathbb{R}^{V_{m+1}}$ は $v|_{V_m} = u|_{V_m}$ を満たすので

$$
\mathcal{E}^{(m+1)}(u|_{V_{m+1}}, u|_{V_{m+1}}) \geq \min_{v \in \mathbb{R}^{V_{m+1}},\, v|_{V_m} = u|_{V_m}} \mathcal{E}^{(m+1)}(v, v) = \mathcal{E}^{(m)}(u|_{V_m}, u|_{V_m}), \tag{1.21}
$$

すなわち非負実数列 $\{\mathcal{E}^{(m)}(u|_{V_m}, u|_{V_m})\}_{m=0}^{\infty} \subset [0, \infty)$ は非減少であり，従って $[0, \infty]$ において極限を持つ．そこでまず $\mathcal{F}_* \subset \mathbb{R}^{V_*}$ を

$$
\mathcal{F}_* := \left\{ u \in \mathbb{R}^{V_*} \;\middle|\; \lim_{m \to \infty} \mathcal{E}^{(m)}(u|_{V_m}, u|_{V_m}) < \infty \right\} \tag{1.22}
$$

で定義すると，$\mathbb{R}^{V_m} \ni v \mapsto \mathcal{E}^{(m)}(v, v)^{1/2}$ に対する 3 角不等式（補題 A.1 の (A.2)）により $\mathcal{F}_*$ は $\mathbb{R}^{V_*}$ の線型部分空間であり，従って任意の $u, v \in \mathcal{F}_*$ に対し

$$
\mathcal{E}^{(m)}(u|_{V_m}, v|_{V_m}) = \frac{1}{4}\bigl(\mathcal{E}^{(m)}((u+v)|_{V_m}, (u+v)|_{V_m}) - \mathcal{E}^{(m)}((u-v)|_{V_m}, (u-v)|_{V_m})\bigr) \tag{1.23}
$$

は（$u + v, u - v \in \mathcal{F}_*$ であるので）$m \to \infty$ のとき $\mathbb{R}$ において収束する．よって $\mathcal{E}^{(*)}\colon \mathcal{F}_* \times \mathcal{F}_* \to \mathbb{R}$ を

$$
\mathcal{E}^{(*)}(u, v) := \lim_{m \to \infty} \mathcal{E}^{(m)}(u|_{V_m}, v|_{V_m}) \tag{1.24}
$$

で定義することができ，このとき容易に分かるように $\mathcal{E}^{(*)}$ は双線型，対称，非負定値である．さらに次が成り立つことを注意しておく．

命題 1.5.

$$\mathcal{F}_* = \left\{ u \in \mathbb{R}^{V_*} \;\middle|\; \text{任意の } j \in S \text{ に対し } u \circ F_j|_{V_*} \in \mathcal{F}_* \right\}, \tag{1.25}$$

$$\mathcal{E}^{(*)}(u, v) = \sum_{j \in S} \frac{5}{3} \mathcal{E}^{(*)}(u \circ F_j|_{V_*}, v \circ F_j|_{V_*}), \quad u, v \in \mathcal{F}_*. \tag{1.26}$$

証明. 各 $u \in \mathbb{R}^{V_*}$ に対し，(1.14) において $n = 1$ とし $m \to \infty$ とすることにより

$$\begin{aligned} \lim_{m \to \infty} \mathcal{E}^{(m)}(u|_{V_m}, u|_{V_m}) &= \lim_{m \to \infty} \mathcal{E}^{(m+1)}(u|_{V_{m+1}}, u|_{V_{m+1}}) \\ &= \sum_{j \in S} \frac{5}{3} \lim_{m \to \infty} \mathcal{E}^{(m)}(u \circ F_j|_{V_m}, u \circ F_j|_{V_m}) \end{aligned} \tag{1.27}$$

が分かり，従って (1.22) と (1.27) により

$$\begin{aligned} u \in \mathcal{F}_* &\iff \lim_{m \to \infty} \mathcal{E}^{(m)}(u|_{V_m}, u|_{V_m}) < \infty \\ &\iff \text{任意の } j \in S \text{ に対し } \lim_{m \to \infty} \mathcal{E}^{(m)}(u \circ F_j|_{V_m}, u \circ F_j|_{V_m}) < \infty \\ &\iff \text{任意の } j \in S \text{ に対し } u \circ F_j|_{V_*} \in \mathcal{F}_* \end{aligned}$$

となるので (1.25) が成り立つ．さらに任意の $u, v \in \mathcal{F}_*$ に対し，再び (1.14) において $n = 1$ とし (1.24) に注意しつつ $m \to \infty$ とすることにより

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^{(*)}(u, v) &= \lim_{m \to \infty} \mathcal{E}^{(m)}(u|_{V_m}, v|_{V_m}) = \lim_{m \to \infty} \mathcal{E}^{(m+1)}(u|_{V_{m+1}}, v|_{V_{m+1}}) \\ &= \sum_{j \in S} \frac{5}{3} \lim_{m \to \infty} \mathcal{E}^{(m)}(u \circ F_j|_{V_m}, v \circ F_j|_{V_m}) = \sum_{j \in S} \frac{5}{3} \mathcal{E}^{(*)}(u \circ F_j|_{V_*}, v \circ F_j|_{V_*}) \end{aligned}$$

となり (1.26) が得られる． □

(1.22) と (1.24) で定義される $(\mathcal{E}^{(*)}, \mathcal{F}_*)$ に基づき自然な解析学を展開するためには（具体的には，$(\mathcal{E}^{(*)}, \mathcal{F}_*)$ を [13, 11, 8] にある Dirichlet 形式の一般論の枠組みに乗せるためには)，「$\mathcal{F}_*$ が十分多くの連続関数を含むこと」「$(\mathcal{E}^{(*)}, \mathcal{F}_*)$ が適切な形の完備性を有すること」を証明する必要がある．そもそも現時点では $\mathcal{F}_*$ は $\mathbb{R}^{V_*}$ の部分集合として定義されており，各 $u \in \mathcal{F}_*$ は可算集合 V_* 上で定義された関数に過ぎず K 上の関数にすらなっていないため，このままでは $u \in \mathcal{F}_*$ の K 上での積分などのごく基本的な量を定義することさえままならず具合が悪い．この困難は，「各 $u \in \mathcal{F}_*$ が実は（Euclid 距離の K 上への制限に関して）一様連続になっており，従って（後で述べる演習 1.1 により）K 上の連続関数に唯 1 通りに拡張できる」ことを証明することにより克服される．すなわち，次の定理が成り立つ．

定理 1.6. $\alpha := \log_2 \frac{5}{3}$ とおく．このとき任意の $u \in \mathcal{F}_*$ と任意の $x, y \in V_*$ に対し

$$|u(x) - u(y)|^2 \leq 400|x - y|^\alpha \mathcal{E}^{(*)}(u, u). \tag{1.28}$$

定理 1.6 の証明のため，まず次の補題を示す．

補題 1.7. 任意の $u \in \mathcal{F}_*$ と任意の $x, y \in V_*$ に対し

$$|u(x) - u(y)|^2 \leq 100\mathcal{E}^{(*)}(u, u). \tag{1.29}$$

証明. まず次の事実に注意する：任意の $v \in \mathbb{R}^{V_1}$ と任意の $y, z \in V_1$ に対し，$q \in V_1$ が存在して「$y = q = z$」または「$y \overset{1}{\sim} q$ かつ $q = z$」または「$y \overset{1}{\sim} q$ かつ $q \overset{1}{\sim} z$ かつ $y \neq z$」であり（図 1.1 も参照のこと），従って

$$\begin{aligned} |v(y) - v(z)| &\leq |v(y) - v(q)| + |v(q) - v(z)| \\ &\leq \sqrt{2}\bigl(|v(y) - v(q)|^2 + |v(q) - v(z)|^2\bigr)^{1/2} \\ &\leq \sqrt{2}\Bigl(\frac{3}{5}\mathcal{E}^{(1)}(v, v)\Bigr)^{1/2} = \sqrt{\frac{6}{5}}\mathcal{E}^{(1)}(v, v)^{1/2}. \end{aligned} \tag{1.30}$$

さて，$u \in \mathcal{F}_*$ と $x \in V_*$ を任意に取る．このとき (1.3) により $m \in \mathbb{N}$ が存在して $x \in V_m$ であり，するとさらに (1.2) により $w = w_1 \dots w_m \in W_m$ が存在して $x \in F_w(V_0)$ であるので，$j \in S$ が存在して $x = F_w(q_j)$ となる．そこで $\{x_k\}_{k=0}^m \subset V_m$ を $x_0 := q_1$，および各 $k \in \{1, \dots, m\}$ に対し $x_k := F_{w_1 \dots w_k}(q_j)$ で定める．すると $x_m = x$ であり，また各 $k \in \{1, \dots, m\}$ に対し $x_{k-1}, x_k \in F_{w_1 \dots w_{k-1}}(V_1)$（$k = 1$ のとき $w_1 \dots w_{k-1} := \emptyset$）であるので (1.30) と補題 1.4 および $\{\mathcal{E}^{(n)}(u|_{V_n}, u|_{V_n})\}_{n=0}^{\infty}$ の非減少性 (1.21) により

$$\begin{aligned} &|u(x_{k-1}) - u(x_k)| \\ &= \bigl|u \circ F_{w_1 \dots w_{k-1}}\bigl(F_{w_1 \dots w_{k-1}}^{-1}(x_{k-1})\bigr) - u \circ F_{w_1 \dots w_{k-1}}\bigl(F_{w_1 \dots w_{k-1}}^{-1}(x_k)\bigr)\bigr| \\ &\leq \sqrt{\frac{6}{5}}\mathcal{E}^{(1)}(u \circ F_{w_1 \dots w_{k-1}}|_{V_1}, u \circ F_{w_1 \dots w_{k-1}}|_{V_1})^{1/2} \\ &\leq \sqrt{\frac{6}{5}}\Bigl(\frac{3}{5}\Bigr)^{\frac{k-1}{2}}\left(\sum_{\tau \in W_{k-1}}\Bigl(\frac{5}{3}\Bigr)^{k-1}\mathcal{E}^{(1)}(u \circ F_\tau|_{V_1}, u \circ F_\tau|_{V_1})\right)^{1/2} \\ &= \sqrt{\frac{6}{5}}\Bigl(\frac{3}{5}\Bigr)^{\frac{k-1}{2}}\mathcal{E}^{(k)}(u|_{V_k}, u|_{V_k})^{1/2} \leq \sqrt{\frac{6}{5}}\Bigl(\frac{3}{5}\Bigr)^{\frac{k-1}{2}}\mathcal{E}^{(*)}(u, u)^{1/2}. \end{aligned} \tag{1.31}$$

よって $x_0 = q_1$ と $x_m = x$ および (1.31) により

$$\begin{aligned} &|u(q_1) - u(x)| = \left|\sum_{k=1}^m (u(x_{k-1}) - u(x_k))\right| \leq \sum_{k=1}^m |u(x_{k-1}) - u(x_k)| \\ &\leq \sum_{k=1}^m \sqrt{\frac{6}{5}}\Bigl(\frac{3}{5}\Bigr)^{\frac{k-1}{2}}\mathcal{E}^{(*)}(u, u)^{1/2} \leq \frac{\sqrt{6/5}}{1 - \sqrt{3/5}}\mathcal{E}^{(*)}(u, u)^{1/2} \leq 5\mathcal{E}^{(*)}(u, u)^{1/2} \end{aligned} \tag{1.32}$$

であり，(1.32) において $x \in V_*$ は任意だったので任意の $x, y \in V_*$ に対し

$$\begin{aligned} |u(x) - u(y)| &\leq |u(x) - u(q_1)| + |u(q_1) - u(y)| \\ &\leq 5\mathcal{E}^{(*)}(u, u)^{1/2} + 5\mathcal{E}^{(*)}(u, u)^{1/2} = 10\mathcal{E}^{(*)}(u, u)^{1/2} \end{aligned}$$

となり (1.29) を得る． □

定理 1.6 の証明. $u \in \mathcal{F}_*$ を任意に取る．$x = y \in V_*$ の場合には (1.28) は明らかに成り立つことに注意し，$x \neq y$ を満たす $x, y \in V_*$ を任意に取る．このとき $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ が $2^{-m} < \frac{1}{2}|x-y|$ を満たすならば，$x \in K_w$ かつ $y \in K_v$ となる任意の $w, v \in W_m$ に対し $K_w \cap K_v = \emptyset$ であることに注意し（実際，そのような w, v に対し $q \in K_w \cap K_v$ が存在すると仮定すると

$$\begin{aligned}|x-y| \leq |x-q| + |q-y| &= 2^{-m}\left|F_w^{-1}(x) - F_w^{-1}(q)\right| + 2^{-m}\left|F_v^{-1}(q) - F_v^{-1}(y)\right| \\ &\leq 2^{-m} \cdot 1 + 2^{-m} \cdot 1 < |x-y|\end{aligned}$$

となり矛盾する），$n = n_{x,y} \in \mathbb{N}$ を次で定める：

$$n := n_{x,y} := \max\left\{ m \in \mathbb{N} \cup \{0\} \;\middle|\; \begin{array}{l} w, v \in W_m \text{ が存在して } x \in F_w(V_*), \\ y \in F_v(V_*),\, F_w(V_*) \cap F_v(V_*) \neq \emptyset \end{array} \right\} \tag{1.33}$$

((1.33) の右辺の集合は，上で注意したことにより $\left\{m \in \mathbb{N} \cup \{0\} \;\middle|\; 2^{-m} \geq \frac{1}{2}|x-y|\right\}$ に含まれるので有限集合であり，かつ明らかに $0, 1$ を含むので，その最大値 n は存在し $n \geq 1$)．するとこの n は (1.33) の右辺の集合に属し，従って $\left\{m \in \mathbb{N} \cup \{0\} \;\middle|\; 2^{-m} \geq \frac{1}{2}|x-y|\right\}$ にも属するので，$w, v \in W_n$ が存在して $x \in F_w(V_*), y \in F_v(V_*), F_w(V_*) \cap F_v(V_*) \neq \emptyset$, かつ $2^{-n} \geq \frac{1}{2}|x-y|$, すなわち $|x-y| \leq 2^{1-n}$ である．特に $q \in F_w(V_*) \cap F_v(V_*)$ を取ることができ，このとき補題 1.7 と命題 1.5 により

$$\begin{aligned}&|u(x) - u(y)| \leq |u(x) - u(q)| + |u(q) - u(y)| \\ &\quad = \left|u \circ F_w\big(F_w^{-1}(x)\big) - u \circ F_w\big(F_w^{-1}(q)\big)\right| + \left|u \circ F_v\big(F_v^{-1}(q)\big) - u \circ F_v\big(F_v^{-1}(y)\big)\right| \\ &\quad \leq 10\mathcal{E}^{(*)}(u \circ F_w|_{V_*}, u \circ F_w|_{V_*})^{1/2} + 10\mathcal{E}^{(*)}(u \circ F_v|_{V_*}, u \circ F_v|_{V_*})^{1/2} \\ &\quad \leq 10\sqrt{2}\big(\mathcal{E}^{(*)}(u \circ F_w|_{V_*}, u \circ F_w|_{V_*}) + \mathcal{E}^{(*)}(u \circ F_v|_{V_*}, u \circ F_v|_{V_*})\big)^{1/2} \\ &\quad \leq 10\sqrt{2}\Big(\frac{3}{5}\Big)^{n/2}\left(\sum_{\tau \in W_n}\Big(\frac{5}{3}\Big)^n \mathcal{E}^{(*)}(u \circ F_\tau|_{V_*}, u \circ F_\tau|_{V_*})\right)^{1/2} \\ &\quad = 10\sqrt{2}\Big(\frac{3}{5}\Big)^{n/2}\mathcal{E}^{(*)}(u, u)^{1/2}\end{aligned} \tag{1.34}$$

（ただし最後の不等式に $w \neq v$ であることを用いた；この事実は次段落の冒頭で示す）．

他方，(1.1), (1.2), (1.3) により $V_* = \bigcup_{j \in S} F_j(V_*)$ であることに注意すると $j, k \in S$ を $x \in F_w(F_j(V_*)) = F_{wj}(V_*)$, $y \in F_v(F_k(V_*)) = F_{vk}(V_*)$ となるように取れるが，ここで $F_{wj}(V_*) \cap F_{vk}(V_*) \neq \emptyset$ と仮定すると $wj, vk \in W_{n+1}$ なので $n+1$ は (1.33) の右辺の集合に属することになり n が (1.33) の右辺の集合の最大値であることに矛盾するので，$F_{wj}(V_*) \cap F_{vk}(V_*) = \emptyset$. またこのとき $w = v$ と仮定すると $F_j(V_*) \cap F_k(V_*) \neq \emptyset$ であることと F_w の単射性により $\emptyset \neq F_w\big(F_j(V_*) \cap F_k(V_*)\big) = F_{wj}(V_*) \cap F_{vk}(V_*) = \emptyset$ となり矛盾する．よって $w \neq v$, すると (1.6) により $F_w(V_0) \cap F_v(V_0) = K_w \cap K_v \neq \emptyset$ かつ $K_{wj} \cap K_{vk} = F_{wj}(V_0) \cap F_{vk}(V_0) = \emptyset$ であるが，このとき容易に確認できるように（$wj, vk \in W_{n+1}$ がどのような語でなければならないかに関しては命題 1.2 の (1.6) の証明

における議論も参照のこと)，これらの条件を満たす w, v, j, k に対する K_{wj} と K_{vk} の相対的な配置の可能性はごく少数（どの配置を同じとみなすかにも依るが高々 8 通り）に限られ，かつそのいずれの場合も任意の $a \in K_{wj}$ と任意の $b \in K_{vk}$ に対し $|a-b| \geq \frac{\sqrt{3}}{2}2^{-n-1}$ となる．$x \in F_w(V_*)$, $y \in F_v(V_*)$ であったので特に $|x-y| \geq \frac{\sqrt{3}}{2}2^{-n-1}$ が分かり，これと (1.34) および $\alpha = \log_2 \frac{5}{3}$ により

$$\begin{aligned}|u(x)-u(y)|^2 \leq 200(2^{-n})^{\alpha}\mathcal{E}^{(*)}(u,u) &\leq 200\left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right)^{\alpha}|x-y|^{\alpha}\mathcal{E}^{(*)}(u,u)\\ &\leq 400|x-y|^{\alpha}\mathcal{E}^{(*)}(u,u)\end{aligned}$$

となる（ただし最後の不等式に $\left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right)^{\alpha} < (2^{5/4})^{\alpha} = \left(\frac{5}{3}\right)^{5/4} < 2$ であることを用いた）． □

演習 1.1. (X, ρ) を距離空間，Y を X の稠密な部分集合とし，$u\colon Y \to \mathbb{R}$ は（距離関数 ρ の Y への制限 $\rho|_{Y\times Y}$ について）一様連続であるとする．

(1) $\overline{u}|_Y = u$ を満たす連続関数 $\overline{u}\colon X \to \mathbb{R}$ が唯 1 つ存在することを示せ．

(2) $\overline{u}$ は（距離関数 ρ について）一様連続であることを示せ．

(1.3) により V_* は K（を $\mathbb{R}^2$ 上の Euclid 距離 $\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2 \ni (x,y) \mapsto |x-y|$ の制限により距離空間とみなしたもの）において稠密であるので，定理 1.6 と演習 1.1-(1) により各 $u \in \mathcal{F}_*$ は $\overline{u} \in \mathcal{C}(K)$ に唯 1 通りに拡張されることが分かる．これを踏まえて，改めて「$\mathcal{E}^{(m)}$ の $m \to \infty$ のときの極限」として (1.22) の $\mathcal{F}_* \subset \mathbb{R}^{V_*}$ と (1.24) の $\mathcal{E}^{(*)}\colon \mathcal{F}_* \times \mathcal{F}_* \to \mathbb{R}$ の代わりに $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}(K)$ と $\mathcal{E}\colon \mathcal{F}\times\mathcal{F} \to \mathbb{R}$ を次のように定義し直す：

$$\mathcal{F} := \left\{u \in \mathcal{C}(K) \;\middle|\; \lim_{m\to\infty}\mathcal{E}^{(m)}(u|_{V_m}, u|_{V_m}) < \infty\right\} = \{u \in \mathcal{C}(K) \mid u|_{V_*} \in \mathcal{F}_*\}, \tag{1.35}$$

$$\mathcal{E}(u,v) := \lim_{m\to\infty}\mathcal{E}^{(m)}(u|_{V_m}, v|_{V_m}) = \mathcal{E}^{(*)}(u|_{V_*}, v|_{V_*}), \quad u, v \in \mathcal{F}. \tag{1.36}$$

$\mathcal{F}_*$ が $\mathbb{R}^{V_*}$ の線型部分空間であることと (1.35) により，$\mathcal{F}$ は $\mathcal{C}(K)$ の線型部分空間であり，また $\mathcal{F}$ から $\mathcal{F}_*$ への全射線型写像 $\mathcal{F} \ni u \mapsto u|_{V_*} \in \mathcal{F}_*$ が定まるが，演習 1.1-(1) の一意性の主張によりこれは単射でもあり，従って線型同型である．さらに $\mathcal{E}^{(*)}$ が双線型，対称，非負定値であることと (1.36) から $\mathcal{E}$ も双線型，対称，非負定値である．

定義 1.8. $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ を Sierpiński gasket K 上の**標準 Dirichlet 形式** (the standrad Dirichlet form) と呼ぶ (「Dirichlet 形式」という用語については定理 1.24 と脚注∗12 を参照のこと).

命題 1.5 および定理 1.6 に対応する主張も $\mathcal{F}$ と $\mathcal{E}$ に対して全く同様に成り立つが，改めて命題，定理として述べておく．

命題 1.9.

$$\mathcal{F} = \left\{u \in \mathcal{C}(K) \;\middle|\; \text{任意の } j \in S \text{ に対し } u \circ F_j \in \mathcal{F}\right\}, \tag{1.37}$$

$$\mathcal{E}(u,v) = \sum_{j\in S}\frac{5}{3}\mathcal{E}(u\circ F_j, v\circ F_j), \quad u, v \in \mathcal{F}. \tag{1.38}$$

証明. 任意の $u \in \mathcal{C}(K)$ と任意の $j \in S$ に対し $u \circ F_j \in \mathcal{C}(K)$ であること，および (1.35), (1.36) と命題 1.5 より直ちに従う． □

定理 1.10. $\alpha := \log_2 \frac{5}{3}$ とおく．このとき任意の $u \in \mathcal{F}$ と任意の $x, y \in K$ に対し

$$|u(x) - u(y)|^2 \leq 400|x - y|^\alpha \mathcal{E}(u, u). \tag{1.39}$$

証明. $u \in \mathcal{F}$ と $x, y \in V_*$ を任意に取る．このとき (1.3) により V_* は K において稠密であるので，$\{x_n\}_{n=1}^\infty, \{y_n\}_{n=1}^\infty \subset V_*$ で $\lim_{n\to\infty}|x - x_n| = 0 = \lim_{n\to\infty}|y - y_n|$ を満たすものを取ることができ，するとさらに $\lim_{n\to\infty}|x_n - y_n| = |x - y|$, また $u\colon K \to \mathbb{R}$ の連続性により $\lim_{n\to\infty} u(x_n) = u(x)$ かつ $\lim_{n\to\infty} u(y_n) = u(y)$ となる．これらの事実と $\{x_n\}_{n=1}^\infty, \{y_n\}_{n=1}^\infty \subset V_*$ であること，定理 1.6，および (1.35), (1.36) により

$$\begin{aligned}|u(x) - u(y)|^2 &= \lim_{n\to\infty}\bigl|u|_{V_*}(x_n) - u|_{V_*}(y_n)\bigr|^2 \\ &\leq \lim_{n\to\infty} 400|x_n - y_n|^\alpha \mathcal{E}^{(*)}(u|_{V_*}, u|_{V_*}) = 400|x - y|^\alpha \mathcal{E}(u, u)\end{aligned}$$

となり主張が従う． □

次の命題 1.11 と命題 1.12 および系 1.13 は，(1.35) と (1.36) から直ちに従う $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ の基本性質である．$\mathbf{1}_K\colon K \to \mathbb{R}$ を $\mathbf{1}_K(x) := 1$ で定義し，$\mathbb{R}\mathbf{1}_K := \{a\mathbf{1}_K \mid a \in \mathbb{R}\}$ とおく．

命題 1.11. $\mathbb{R}\mathbf{1}_K \subset \{u \in \mathcal{F} \mid \mathcal{E}(u, u) = 0\}$.

証明. 任意の $a \in \mathbb{R}$ に対し，$a\mathbf{1}_K \in \mathcal{C}(K)$, かつ (1.9) により任意の $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ に対し $\mathcal{E}^{(m)}(a\mathbf{1}_K|_{V_m}, a\mathbf{1}_K|_{V_m}) = 0$ であるので，(1.35) と (1.36) により $a\mathbf{1}_K \in \mathcal{F}$ かつ $\mathcal{E}(a\mathbf{1}_K, a\mathbf{1}_K) = \lim_{m\to\infty} \mathcal{E}^{(m)}(a\mathbf{1}_K|_{V_m}, a\mathbf{1}_K|_{V_m}) = 0$ となり，主張が得られる． □

命題 1.12. $n \in \mathbb{N}, \{u_k\}_{k=1}^n \subset \mathcal{F}, u\colon K \to \mathbb{R}$ とし，任意の $x, y \in K$ に対し

$$|u(x) - u(y)|^2 \leq \sum_{k=1}^n |u_k(x) - u_k(y)|^2 \tag{1.40}$$

と仮定する．このとき $u \in \mathcal{F}$ かつ

$$\mathcal{E}(u, u) \leq \sum_{k=1}^n \mathcal{E}(u_k, u_k). \tag{1.41}$$

証明. まず任意の $x, y \in K$ に対し (1.40) と定理 1.10 により

$$|u(x) - u(y)|^2 \leq \sum_{k=1}^n |u_k(x) - u_k(y)|^2 \leq 400|x - y|^\alpha \sum_{k=1}^n \mathcal{E}(u_k, u_k)$$

であるので，$u \in \mathcal{C}(K)$ である．次に任意の $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ に対し (1.9), (1.40), (1.21), (1.36) および (1.35) により

$$\begin{aligned}\mathcal{E}^{(m)}(u|_{V_m}, u|_{V_m}) &= \frac{1}{2} \sum_{x,y \in V_m,\, x \overset{m}{\sim} y} \left(\frac{5}{3}\right)^m |u(x)-u(y)|^2 \\ &\leq \frac{1}{2} \sum_{x,y \in V_m,\, x \overset{m}{\sim} y} \left(\frac{5}{3}\right)^m \left(\sum_{k=1}^n |u_k(x)-u_k(y)|^2\right) \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2} \sum_{x,y \in V_m,\, x \overset{m}{\sim} y} \left(\frac{5}{3}\right)^m |u_k(x)-u_k(y)|^2\right) \\ &= \sum_{k=1}^n \mathcal{E}^{(m)}(u_k|_{V_m}, u_k|_{V_m}) \leq \sum_{k=1}^n \mathcal{E}(u_k, u_k) < \infty.\end{aligned} \tag{1.42}$$

そこで $u \in \mathcal{C}(K)$ と (1.35) および (1.36) に注意しつつ (1.42) において $m \to \infty$ とすることにより $u \in \mathcal{F}$ と (1.41) が得られる． □

系 1.13. $u, v \in \mathcal{F}$ とする．

(1) $f \in \{u^+ \wedge 1, |u|, u^+, u^-\}$ とする．このとき $f \in \mathcal{F}$ かつ $\mathcal{E}(f, f) \leq \mathcal{E}(u, u)$.

(2) $u \vee v, u \wedge v \in \mathcal{F}$ かつ $\mathcal{E}(u \vee v, u \vee v) + \mathcal{E}(u \wedge v, u \wedge v) \leq \mathcal{E}(u, u) + \mathcal{E}(v, v)$.

(3) $uv \in \mathcal{F}$ かつ $\mathcal{E}(uv, uv) \leq 2\|v\|_{\sup}^2 \mathcal{E}(u, u) + 2\|u\|_{\sup}^2 \mathcal{E}(v, v)$.

証明. (1) 容易に確認できるように任意の $x, y \in K$ に対し $|f(x) - f(y)| \leq |u(x) - u(y)|$ であるので，命題 1.12 により $f \in \mathcal{F}$ かつ $\mathcal{E}(f, f) \leq \mathcal{E}(u, u)$.

(2) $u \vee v = \frac{1}{2}(u + v + |u - v|)$, $u \wedge v = \frac{1}{2}(u + v - |u - v|)$ であるので，(1) により $|u - v|, u \vee v, u \wedge v \in \mathcal{F}$ かつ $\mathcal{E}(|u - v|, |u - v|) \leq \mathcal{E}(u - v, u - v)$ であり，従って

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(u \vee v, u \vee v) + \mathcal{E}(u \wedge v, u \wedge v) &= \frac{1}{2}\big(\mathcal{E}(u + v, u + v) + \mathcal{E}(|u - v|, |u - v|)\big) \\ &\leq \frac{1}{2}\big(\mathcal{E}(u + v, u + v) + \mathcal{E}(u - v, u - v)\big) = \mathcal{E}(u, u) + \mathcal{E}(v, v).\end{aligned}$$

(3) まず $\|u\|_{\sup} < \infty$ かつ $\|v\|_{\sup} < \infty$ であることに注意する；実際，定理 1.10 により任意の $x \in K$ に対し

$$|u(x)| \leq |u(x) - u(q_1)| + |u(q_1)| \leq 20\mathcal{E}(u, u)^{1/2} + |u(q_1)|, \tag{1.43}$$

従って $\|u\|_{\sup} = \sup_{x \in K}|u(x)| \leq 20\mathcal{E}(u, u)^{1/2} + |u(q_1)| < \infty$ であり，また同様に $\|v\|_{\sup} < \infty$. さて，そこで $u_1 := \sqrt{2}\|v\|_{\sup} u$, $u_2 := \sqrt{2}\|u\|_{\sup} v$ とおくと，$u_1, u_2 \in \mathcal{F}$ であり，任意の $x, y \in K$ に対し

$$\begin{aligned}|(uv)(x) - (uv)(y)|^2 &\leq \big(|v(x)||u(x) - u(y)| + |u(y)||v(x) - v(y)|\big)^2 \\ &\leq \big(\|v\|_{\sup}|u(x) - u(y)| + \|u\|_{\sup}|v(x) - v(y)|\big)^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\leq 2\|v\|_{\sup}^2|u(x)-u(y)|^2+2\|u\|_{\sup}^2|v(x)-v(y)|^2\\&=|u_1(x)-u_1(y)|^2+|u_2(x)-u_2(y)|^2\end{aligned}$$

であるので，命題 1.12 により $uv\in\mathcal{F}$ かつ

$$\mathcal{E}(uv,uv)\leq\mathcal{E}(u_1,u_1)+\mathcal{E}(u_2,u_2)=2\|v\|_{\sup}^2\mathcal{E}(u,u)+2\|u\|_{\sup}^2\mathcal{E}(v,v)$$

となり主張を得る． □

1.3 Sierpiński gasket 上の標準 Dirichlet 形式 II：正則性（定義域の稠密性）

定理 1.6 の直前の段落でも述べた通り, (1.35) と (1.36) で定義される $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ を [13, 11, 8] にある Dirichlet 形式の一般論の枠組みに乗せるためには,「$\mathcal{F}$ が十分多くの連続関数を含むこと」「$(\mathcal{E},\mathcal{F})$ が適切な形の完備性を有すること」を証明する必要がある．前者については，$\mathcal{F}$ の定義 (1.35) により $\mathcal{F}\subset\mathcal{C}(K)$ は既知であるが，$\mathcal{F}$ 自身が十分大きい関数空間になっていることはまだ証明していないことに注意しよう．実は以下で示すように，これらの性質は命題 1.3 と $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ の定義 (1.35), (1.36) および定理 1.10 の簡単な帰結である．まず $\mathcal{F}$ が十分大きい関数空間になっていることを見る（具体的には後の定理 1.18 において，$\mathcal{F}$ は Banach 空間 $(\mathcal{C}(K),\|\cdot\|_{\sup})$ の稠密な部分集合であることを証明する）．その本質は，命題 1.3 の帰結として得られる次の命題 1.14 および定理 1.15 にある．

命題 1.14. 各 $m\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ に対し $H_{m,m+1}\colon\mathbb{R}^{V_m}\to\mathbb{R}^{V_{m+1}}$ を，各 $u\in\mathbb{R}^{V_m}$ に対し $v|_{V_m}=u$ かつ $\mathcal{E}^{(m+1)}(v,v)=\mathcal{E}^{(m)}(u,u)$ を満たす唯 1 つの $v\in\mathbb{R}^{V_{m+1}}$ を $H_{m,m+1}(u)$ とおくことにより定める（命題 1.3 によりそのような v は唯 1 つ存在する）．次に $m\leq n$ を満たす各 $m,n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ に対し $H_{m,n}\colon\mathbb{R}^{V_m}\to\mathbb{R}^{V_n}$ を $H_{m,n}:=H_{n-1,n}\circ\cdots\circ H_{m,m+1}$ ($H_{m,m}:=\mathrm{id}_{\mathbb{R}^{V_m}}$) で定める．このとき $m\leq n$ を満たす任意の $m,n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ に対し，$H_{m,n}$ は線型写像であり，さらに各 $u\in\mathbb{R}^{V_m}$ に対し，$H_{m,n}(u)|_{V_m}=u$,

$$\mathcal{E}^{(m)}(u,u)=\min_{v\in\mathbb{R}^{V_n},\,v|_{V_m}=u}\mathcal{E}^{(n)}(v,v)=\mathcal{E}^{(n)}\bigl(H_{m,n}(u),H_{m,n}(u)\bigr),\tag{1.44}$$

かつ $H_{m,n}(u)$ は (1.44) の中辺の最小値を達成する唯 1 つの v である．

証明. $m,n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ は $m\leq n$ を満たすとする．このとき命題 1.3（の (1.11)）により $H_{m,m+1}$ は線型写像，従って $H_{m,n}$ も線型写像である．次に $u\in\mathbb{R}^{V_m}$ を任意に取る．すると $v|_{V_m}=u$ を満たす任意の $v\in\mathbb{R}^{V_n}$ に対し命題 1.3 の (1.10) により $\mathcal{E}^{(n)}(v,v)\geq\mathcal{E}^{(m)}(v|_{V_m},v|_{V_m})=\mathcal{E}^{(m)}(u,u)$ であり，他方 $H_{m,n}$ の定義により $H_{m,n}(u)|_{V_m}=u$ かつ $\mathcal{E}^{(n)}\bigl(H_{m,n}(u),H_{m,n}(u)\bigr)=\mathcal{E}^{(m)}(u,u)$ であるので (1.44) が得られる．さらに $v|_{V_m}=u$ と $\mathcal{E}^{(n)}(v,v)=\mathcal{E}^{(m)}(u,u)$ を満たす $v\in\mathbb{R}^{V_n}$ を任意に取ると，$m=n$ のときは $v=u=H_{m,m}(u)$ である．$m<n$ のときは任意の $k\in\{m,\ldots,n-1\}$ に対し，命題 1.3 の (1.10)

により

$$\mathcal{E}^{(m)}(u,u) \le \mathcal{E}^{(k)}(v|_{V_k}, v|_{V_k}) \le \mathcal{E}^{(k+1)}(v|_{V_{k+1}}, v|_{V_{k+1}}) \le \mathcal{E}^{(n)}(v,v) = \mathcal{E}^{(m)}(u,u),$$

従って $\mathcal{E}^{(k+1)}(v|_{V_{k+1}}, v|_{V_{k+1}}) = \mathcal{E}^{(k)}(v|_{V_k}, v|_{V_k})$ であるので $H_{k,k+1}$ の定義により $v|_{V_{k+1}} = H_{k,k+1}(v|_{V_k})$ となり，$k \in \{m, \ldots, n-1\}$ は任意であるので（k についての数学的帰納法により）任意の $k \in \{m, \ldots, n\}$ に対し $v|_{V_k} = H_{m,k}(v|_{V_m}) = H_{m,k}(u)$, 特に $v = v|_{V_n} = H_{m,n}(u)$ となり $H_{m,n}(u)$ の一意性の主張を得る． □

定理 1.15. $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ とし，$H_{m,*} \colon \mathbb{R}^{V_m} \to \mathbb{R}^{V_*}$ を，各 $u \in \mathbb{R}^{V_m}$ と各 $x \in V_*$ に対し $n \ge m$ かつ $x \in V_n$ を満たす $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ を任意に取り $H_{m,*}(u)(x) := H_{m,n}(u)(x)$ とおくことで定める（$k \ge n \ge m$ を満たす任意の $n, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ に対し $H_{m,n}(u) = H_{m,k}(u)|_{V_n}$ なので，$H_{m,n}(u)(x)$ の値は n の取り方に依存せずに定まることに注意する）．このとき $H_{m,*}$ は線型写像で $H_{m,*}(\mathbb{R}^{V_m}) \subset \mathcal{F}_*$ を満たす．そこでさらに $H_m \colon \mathbb{R}^{V_m} \to \mathcal{F}$ を，各 $u \in \mathbb{R}^{V_m}$ に対し $v|_{V_*} = H_{m,*}(u)$ を満たす唯 1 つの $v \in \mathcal{F}$ を $H_m(u)$ とおくことにより定める（そのような v は定理 1.6 と演習 1.1-(1) により唯 1 つ存在し (1.35) により $\mathcal{F}$ に属する）．このとき H_m は線型写像であり，さらに各 $u \in \mathbb{R}^{V_m}$ に対し，$H_m(u)|_{V_m} = u$,

$$\mathcal{E}^{(m)}(u,u) = \min_{v \in \mathcal{F},\, v|_{V_m} = u} \mathcal{E}(v,v) = \mathcal{E}\bigl(H_m(u), H_m(u)\bigr), \tag{1.45}$$

かつ $H_m(u)$ は (1.45) の中辺の最小値を達成する唯 1 つの v である．

証明. 命題 1.14 により $n \ge m$ を満たす任意の $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ に対し $H_{m,n}$ は線型写像であり，このことと $H_{m,*}$ の定義により $H_{m,*}$ も線型写像である．次に $u \in \mathbb{R}^{V_m}$ とすると，$H_{m,*}(u)$ の定義と命題 1.14 の (1.44) により $n \ge m$ を満たす任意の $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ に対し

$$\mathcal{E}^{(n)}\bigl(H_{m,*}(u)|_{V_n}, H_{m,*}(u)|_{V_n}\bigr) = \mathcal{E}^{(n)}\bigl(H_{m,n}(u), H_{m,n}(u)\bigr) = \mathcal{E}^{(m)}(u,u)$$

であり，これと (1.22) および (1.24) により $H_{m,*}(u) \in \mathcal{F}_*$ かつ

$$\mathcal{E}^{(*)}\bigl(H_{m,*}(u), H_{m,*}(u)\bigr) = \lim_{n \to \infty} \mathcal{E}^{(n)}\bigl(H_{m,*}(u)|_{V_n}, H_{m,*}(u)|_{V_n}\bigr) = \mathcal{E}^{(m)}(u,u). \tag{1.46}$$

以上で $H_{m,*}(\mathbb{R}^{V_m}) \subset \mathcal{F}_*$ が示せたので，さらに $H_m \colon \mathbb{R}^{V_m} \to \mathcal{F}$ を主張のように定めることができるが，このとき H_m は線型写像 $H_{m,*}$ に後ろから線型同型 $\mathcal{F} \ni v \mapsto v|_{V_*} \in \mathcal{F}_*$ の逆写像を合成したものに他ならないので線型写像である．さて，再び $u \in \mathbb{R}^{V_m}$ とする．このとき $H_m, H_{m,*}, H_{m,m}$ の定義により $H_m(u)|_{V_m} = H_{m,*}(u)|_{V_m} = H_{m,m}(u) = u$, かつ $v|_{V_m} = u$ を満たす任意の $v \in \mathcal{F}$ に対し (1.21) と (1.36) により $\mathcal{E}(v,v) \ge \mathcal{E}^{(m)}(v|_{V_m}, v|_{V_m}) = \mathcal{E}^{(m)}(u,u)$ であり，他方 (1.36), $H_m(u)|_{V_*} = H_{m,*}(u)$ と (1.46) により

$$\mathcal{E}\bigl(H_m(u), H_m(u)\bigr) = \mathcal{E}^{(*)}\bigl(H_{m,*}(u), H_{m,*}(u)\bigr) = \mathcal{E}^{(m)}(u,u)$$

であるので (1.45) が得られる．さらに $v|_{V_m} = u$ と $\mathcal{E}(v,v) = \mathcal{E}^{(m)}(u,u)$ を満たす $v \in \mathcal{F}$ を任意に取ると，$n \geq m$ を満たす任意の $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ に対し命題 1.14 の (1.44) および (1.21) と (1.36) により

$$\mathcal{E}^{(m)}(u,u) = \min_{g \in \mathbb{R}^{V_n},\, g|_{V_m} = u} \mathcal{E}^{(n)}(g,g) \leq \mathcal{E}^{(n)}(v|_{V_n}, v|_{V_n}) \leq \mathcal{E}(v,v) = \mathcal{E}^{(m)}(u,u),$$

従って $\mathcal{E}^{(n)}(v|_{V_n}, v|_{V_n}) = \min_{g \in \mathbb{R}^{V_n},\, g|_{V_m} = u} \mathcal{E}^{(n)}(g,g)$ であるので命題 1.14 中の $H_{m,n}(u)$ の一意性の主張により $v|_{V_n} = H_{m,n}(u)$ となるが，$n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ は $n \geq m$ を満たす限り任意であったので $H_{m,*}$ の定義により $v|_{V_*} = H_{m,*}(u)$, ゆえに $H_m(u)$ の定義により $v = H_m(u)$ となり $H_m(u)$ の一意性の主張を得る． $\square$

定理 1.15 において $u \in \mathbb{R}^{V_m}$ が定数関数，すなわち $a \in \mathbb{R}$ が存在して $u = a\mathbf{1}_K|_{V_m}$ である場合には

$$H_m(a\mathbf{1}_K|_{V_m}) = a\mathbf{1}_K \tag{1.47}$$

となることに注意しよう．実際，(1.9) により $\mathcal{E}^{(m)}(a\mathbf{1}_K|_{V_m}, a\mathbf{1}_K|_{V_m}) = 0$, また命題 1.11 により $a\mathbf{1}_K \in \mathcal{F}$ かつ $\mathcal{E}(a\mathbf{1}_K, a\mathbf{1}_K) = 0$ であり，さらに (1.9) と (1.36) により任意の $v \in \mathcal{F}$ に対し $\mathcal{E}(v,v) \geq 0$ であるので，(1.45) の最小値は 0 であり $v = a\mathbf{1}_K$ により達成され，よってそのような v が $H_m(a\mathbf{1}_K|_{V_m})$ 唯 1 つであることにより $H_m(a\mathbf{1}_K|_{V_m}) = a\mathbf{1}_K$.

$(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ が自己相似的な形で構成されていることの帰結として，定理 1.15 の $H_m(u)$ についてはさらに次が成り立つ．

命題 1.16. $m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ は $n \leq m$ を満たすとし，$u \in \mathbb{R}^{V_m}$, $w \in W_n$ とする．このとき

$$H_m(u) \circ F_w = H_{m-n}(u \circ F_w|_{V_{m-n}}). \tag{1.48}$$

証明. 定理 1.15 により $H_m(u)|_{V_m} = u$ なので各 $\tau \in W_n$ に対し $H_m(u) \circ F_\tau|_{V_{m-n}} = u \circ F_\tau|_{V_{m-n}}$ であることに注意すると，定理 1.15 の (1.45), 命題 1.9 と補題 1.4 により

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}^{(m)}(u,u) = \mathcal{E}\big(H_m(u), H_m(u)\big) &= \sum_{\tau \in W_n} \left(\frac{5}{3}\right)^n \mathcal{E}\big(H_m(u) \circ F_\tau, H_m(u) \circ F_\tau\big) \\
&\geq \left(\frac{5}{3}\right)^n \mathcal{E}^{(m-n)}(u \circ F_w|_{V_{m-n}}, u \circ F_w|_{V_{m-n}}) \\
&\qquad + \sum_{\tau \in W_n \setminus \{w\}} \left(\frac{5}{3}\right)^n \mathcal{E}\big(H_m(u) \circ F_\tau, H_m(u) \circ F_\tau\big) \\
&\geq \sum_{\tau \in W_n} \left(\frac{5}{3}\right)^n \mathcal{E}^{(m-n)}(u \circ F_\tau|_{V_{m-n}}, u \circ F_\tau|_{V_{m-n}}) = \mathcal{E}^{(m)}(u,u).
\end{aligned} \tag{1.49}$$

従って (1.49) の各辺はいずれも $\mathcal{E}^{(m)}(u,u)$ に等しく，特に (1.49) の最初の不等号において等号が成り立つので，$\sum_{\tau \in W_n \setminus \{w\}} (\frac{5}{3})^n \mathcal{E}\big(H_m(u) \circ F_\tau, H_m(u) \circ F_\tau\big)$ を引き去り $(\frac{3}{5})^n$ を掛けることにより $\mathcal{E}\big(H_m(u) \circ F_w, H_m(u) \circ F_w\big) = \mathcal{E}^{(m-n)}(u \circ F_w|_{V_{m-n}}, u \circ F_w|_{V_{m-n}})$

が得られる．これと $H_m(u)\circ F_w|_{V_{m-n}} = u\circ F_w|_{V_{m-n}}$ および定理 1.15 の (1.45) により $H_m(u)\circ F_w$ は最小値 $\min_{v\in\mathcal{F},\,v|_{V_{m-n}}=u\circ F_w|_{V_{m-n}}}\mathcal{E}(v,v)$ を達成する v のうちの 1 つであり，定理 1.15 によりそのような v は $H_{m-n}(u\circ F_w|_{V_{m-n}})$ 唯 1 つであるので $H_m(u)\circ F_w = H_{m-n}(u\circ F_w|_{V_{m-n}})$ となる． □

系 1.17. K の任意の空でない有限部分集合 V に対し $\{u|_V \mid u\in\mathcal{F}\} = \mathbb{R}^V$.

証明. $\{u|_V \mid u\in\mathcal{F}\}\subset\mathbb{R}^V$ は明らかであるので，逆の包含関係を示せばよい．$\#V=1$ のときは，命題 1.11 により $\mathbb{R}\mathbf{1}_K\subset\mathcal{F}$ であることから主張は直ちに従う．そこで以下 $\#V\geq 2$ と仮定し，$\min_{x,y\in V,\,x\neq y}|x-y|>0$ であることに注意して $m\in\mathbb{N}$ を $2^{1-m}<\min_{x,y\in V,\,x\neq y}|x-y|$ を満たすように取る．(1.4) により $K=\bigcup_{w\in W_m}K_w$ であることに注意し，各 $x\in V$ に対し $w_x\in W_m$ を $x\in K_{w_x}$ となるように取る．このとき $x\neq y$ を満たす各 $x,y\in V$ に対し，$z\in K_{w_x}\cap K_{w_y}$ が存在すると仮定すると $2^{1-m}<|x-y|\leq|x-z|+|z-y|\leq 2^{-m}+2^{-m}=2^{1-m}$ となり矛盾するので $K_{w_x}\cap K_{w_y}=\emptyset$ である．さて，そこで $f\in\mathbb{R}^V$ を任意に取り，$v\in\mathbb{R}^{V_m}$ を各 $x\in V$ と各 $y\in F_{w_x}(V_0)$ に対し $v(y):=f(x)$, また各 $y\in V_m\setminus\bigcup_{x\in V}F_{w_x}(V_0)$ に対し $v(y):=0$ で定め，$u:=H_m(v)$ とおく．このとき定理 1.15 により $u\in\mathcal{F}$ であり，また各 $x\in V$ に対し命題 1.16 と v の定義および (1.47) により $u\circ F_{w_x}=H_0(v\circ F_{w_x}|_{V_0})=H_0(f(x)\mathbf{1}_K|_{V_0})=f(x)\mathbf{1}_K$, 従って $x\in K_{w_x}$ により $u(x)=u\circ F_{w_x}\bigl(F_{w_x}^{-1}(x)\bigr)=f(x)$ であるので，$f=u|_V$. ゆえに $f\in\{u|_V \mid u\in\mathcal{F}\}$ であり，ここで $f\in\mathbb{R}^V$ は任意であったので $\mathbb{R}^V\subset\{u|_V \mid u\in\mathcal{F}\}$. □

以上の準備の下，次の定理 1.18 を証明することができる．

定理 1.18. $\mathcal{F}$ は Banach 空間 $(\mathcal{C}(K),\|\cdot\|_{\sup})$ において稠密である，すなわち任意の $f\in\mathcal{C}(K)$ と任意の $\varepsilon\in(0,\infty)$ に対し $u\in\mathcal{F}$ が存在して $\|f-u\|_{\sup}<\varepsilon$.

定理 1.18 は，位相空間論においてよく知られている次の定理から導かれる．

定理 1.19 (Stone–Weierstrass の定理)**.** X をコンパクト位相空間，$\mathcal{A}$ を $\mathcal{C}(X)$ の線型部分空間とするとき，$\mathcal{A}$ が次の 3 条件を満たすならば $\mathcal{A}$ は $(\mathcal{C}(X),\|\cdot\|_{\sup})$ において稠密である：

(SW1) 任意の $u,v\in\mathcal{A}$ に対し $uv\in\mathcal{A}$.

(SW2) $x\neq y$ を満たす任意の $x,y\in X$ に対し，$u\in\mathcal{A}$ が存在して $u(x)\neq u(y)$.

(SW3) 任意の $x\in X$ に対し $v\in\mathcal{A}$ が存在して $v(x)\neq 0$.

証明. 位相空間論の標準的な教科書（例えば [59, 定理 29.4]）を参照のこと． □

定理 1.19 は有名な定理ではあるが，大学 1～2 年生レベルの数学においては馴染み深いとは言い難いと思われる．そこで以下ではまず定理 1.18 の定理 1.19 を用いた証明を紹介し，その後で定理 1.19 を用いない定理 1.18 の直接証明を与えることにする．

定理 1.18 の証明. まず K はコンパクト距離空間である．また (1.35) の直後に注意したように $\mathcal{F}$ は $\mathcal{C}(K)$ の線型部分空間であり, 系 1.13-(3) により任意の $u, v \in \mathcal{F}$ に対し $uv \in \mathcal{F}$, すなわち $\mathcal{F}$ は定理 1.19-(SW1) を満たす．次に $x \neq y$ を満たす任意の $x, y \in K$ に対し, 系 1.17 を $V := \{x, y\}$ として用いることにより $u \in \mathcal{F}$ が存在して $u(x) = 1 \neq 0 = u(y)$ となり，ゆえに $\mathcal{F}$ は定理 1.19-(SW2) を満たす．さらに任意の $x \in K$ に対し $v := \mathbf{1}_K$ と取れば命題 1.11 により $v \in \mathcal{F}$ かつ $v(x) = \mathbf{1}_K(x) = 1 \neq 0$, 従って $\mathcal{F}$ は定理 1.19-(SW3) も満たす．よって K と $\mathcal{F}$ は Stone–Weierstrass の定理（定理 1.19）の仮定を全て満たすので，同定理により $\mathcal{F}$ は $(\mathcal{C}(K), \|\cdot\|_{\sup})$ において稠密である． □

定理 1.18 の定理 1.19 を用いない直接証明. [59, 定理 29.4 の証明-(4),(5)] に倣う．(1.35) の直後に注意したように $\mathcal{F}$ は $\mathcal{C}(K)$ の線型部分空間である．$\mathcal{F}$ が $(\mathcal{C}(K), \|\cdot\|_{\sup})$ において稠密であることを示すため，$f \in \mathcal{C}(K)$ と $\varepsilon \in (0, \infty)$ を任意に取る．

まず, $x \in K$ を任意に取るとき, $v \in \mathcal{F}$ が存在して $v(x) = f(x)$ かつ $v > f - \varepsilon$ となることを示そう．（ただしここで $v > f - \varepsilon$ は任意の $z \in K$ に対し $v(z) > f(z) - \varepsilon$ であることを意味する．以下の同種の不等式についても同様である.）$\mathcal{F}_x := \{u \in \mathcal{F} \mid u(x) = f(x)\}$ とおく．任意の $y \in K$ に対し，系 1.17 により $u \in \mathcal{F}$ が存在して $u(x) = f(x)$ かつ $u(y) = f(y)$ であり，すると $u \in \mathcal{F}_x$ かつ $y \in (u - f)^{-1}((-\varepsilon, \infty))$ であるが, $y \in K$ は任意なので $K = \bigcup_{u \in \mathcal{F}_x} (u - f)^{-1}((-\varepsilon, \infty))$ となる．ここで各 $u \in \mathcal{F}_x$ に対し $u - f \in \mathcal{C}(K)$ なので $(u - f)^{-1}((-\varepsilon, \infty))$ は K の開集合であり，従って K のコンパクト性により $m \in \mathbb{N}$ と $\{u_j\}_{j=1}^m \subset \mathcal{F}_x$ が存在して $K = \bigcup_{j=1}^m (u_j - f)^{-1}((-\varepsilon, \infty))$. そこで $v := \max_{j \in \{1,\ldots,m\}} u_j$ と定めると，系 1.13-(2) により $v \in \mathcal{F}$, また $\{u_j\}_{j=1}^m \subset \mathcal{F}_x$ により $v(x) = f(x)$ であり，さらに $K = \bigcup_{j=1}^m (u_j - f)^{-1}((-\varepsilon, \infty))$ により $v > f - \varepsilon$.

次に $\mathcal{G} := \{v \in \mathcal{F} \mid v > f - \varepsilon\}$ とおく．このとき任意の $x \in K$ に対し，前段落の結果により $v \in \mathcal{G}$ が存在して $v(x) = f(x)$, 従って $x \in (v - f)^{-1}((-\infty, \varepsilon))$ であるが, $x \in K$ は任意なので $K = \bigcup_{v \in \mathcal{G}} (v - f)^{-1}((-\infty, \varepsilon))$ となる．ここで各 $v \in \mathcal{G}$ に対し $v - f \in \mathcal{C}(K)$ なので $(v - f)^{-1}((-\infty, \varepsilon))$ は K の開集合であり，従って K のコンパクト性により $n \in \mathbb{N}$ と $\{v_k\}_{k=1}^n \subset \mathcal{G}$ が存在して $K = \bigcup_{k=1}^n (v_k - f)^{-1}((-\infty, \varepsilon))$. そこで $w := \min_{k \in \{1,\ldots,n\}} v_k$ と定めると，系 1.13-(2) により $w \in \mathcal{F}$, また $\{v_k\}_{k=1}^n \subset \mathcal{G}$ により $w > f - \varepsilon$ であり，さらに $K = \bigcup_{k=1}^n (v_k - f)^{-1}((-\infty, \varepsilon))$ により $w < f + \varepsilon$, 従って $\|w - f\|_{\sup} \leq \varepsilon$. すなわち「$w \in \mathcal{F}$ が存在して $\|w - f\|_{\sup} \leq \varepsilon$」が得られたが，ここで $f \in \mathcal{C}(K)$ と $\varepsilon \in (0, \infty)$ は任意だったのでこれは任意の $f \in \mathcal{C}(K)$ が $(\mathcal{C}(K), \|\cdot\|_{\sup})$ における $\mathcal{F}$ の閉包に属することを意味し，ゆえに $\mathcal{F}$ は $(\mathcal{C}(K), \|\cdot\|_{\sup})$ において稠密である． □

1.4 Sierpiński gasket 上の標準 Dirichlet 形式 III：閉性（定義域の完備性）

次に $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ の完備性については以下の定理 1.20 が成り立つ．

定理 1.20. $\{u \in \mathcal{F} \mid \mathcal{E}(u,u)=0\} = \mathbb{R}\mathbf{1}_K$ であり，$(\mathcal{F}/\mathbb{R}\mathbf{1}_K, \mathcal{E})$ は Hilbert 空間である．

証明. $\mathbb{R}\mathbf{1}_K \subset \{u \in \mathcal{F} \mid \mathcal{E}(u,u)=0\}$ であることは命題 1.11 として既に示した．逆に $\mathcal{E}(u,u)=0$ を満たす $u \in \mathcal{F}$ を任意に取る．このとき $v|_{V_0} = u|_{V_0}$ を満たす任意の $v \in \mathcal{F}$ に対し $\mathcal{E}(u,u) = 0 \le \mathcal{E}(v,v)$ であるので $0 = \mathcal{E}(u,u) = \min_{v\in\mathcal{F},\, v|_{V_0}=u|_{V_0}} \mathcal{E}(v,v)$ となるが，定理 1.15 の (1.45) とその後の主張によりこの最小値は $v = H_0(u|_{V_0})$ のときに限り達成され $\mathcal{E}^{(0)}(u|_{V_0}, u|_{V_0})$ に等しいので，$u = H_0(u|_{V_0})$ かつ $\mathcal{E}^{(0)}(u|_{V_0}, u|_{V_0}) = 0.$ すると $\mathcal{E}^{(0)}(u|_{V_0}, u|_{V_0}) = 0$ と (1.9) により $u(q_1) = u(q_2) = u(q_3)$, すなわち $u|_{V_0} = u(q_1)\mathbf{1}_K|_{V_0}$ となるので, (1.47) により $u = H_0(u|_{V_0}) = H_0(u(q_1)\mathbf{1}_K|_{V_0}) = u(q_1)\mathbf{1}_K \in \mathbb{R}\mathbf{1}_K$.（なお，これは次のようにしても示せる：任意の $x \in K$ に対し定理 1.10 により $0 \le |u(x) - u(q_1)| \le 20|x-q_1|^{\alpha/2}\mathcal{E}(u,u)^{1/2} = 0$, 従って $u(x) = u(q_1)$ であるので，$u = u(q_1)\mathbf{1}_K \in \mathbb{R}\mathbf{1}_K$.）ゆえに $\{u \in \mathcal{F} \mid \mathcal{E}(u,u)=0\} \subset \mathbb{R}\mathbf{1}_K$ であり，従って $\{u \in \mathcal{F} \mid \mathcal{E}(u,u)=0\} = \mathbb{R}\mathbf{1}_K$.

さて，任意の $u, v \in \mathcal{F}$ と任意の $a, b \in \mathbb{R}$ に対し命題 1.11 と $\mathcal{E}$ に対する Cauchy–Schwarz の不等式（補題 A.1 の (A.1)）（もしくは (1.9) と (1.36)）により $\mathcal{E}(u,v) = \mathcal{E}(u + a\mathbf{1}_K, v + b\mathbf{1}_K)$ であるので $\mathcal{E}(u,v)$ は u, v の定める $\mathcal{F}/\mathbb{R}\mathbf{1}_K$ の元だけで決まることになり，よって $\mathcal{E}$ を自然に $(\mathcal{F}/\mathbb{R}\mathbf{1}_K) \times (\mathcal{F}/\mathbb{R}\mathbf{1}_K)$ 上の実数値関数と見なすことができる．このとき $\mathcal{E}$ が $\mathcal{F}/\mathbb{R}\mathbf{1}_K$ 上の内積になっていることは $\{u \in \mathcal{F} \mid \mathcal{E}(u,u)=0\} = \mathbb{R}\mathbf{1}_K$ から容易に確認できるので，あとはこの内積により定まる $\mathcal{F}/\mathbb{R}\mathbf{1}_K$ 上の距離関数が完備であることを示せばよい．

そこで $\{u_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{F}$ は $\lim_{k\wedge l\to\infty} \mathcal{E}(u_k - u_l, u_k - u_l) = 0$ を満たすとする．u_n の代わりに $u_n - u_n(q_1)\mathbf{1}_K$ を考えることにより任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し $u_n(q_1) = 0$ と仮定してよい．$x \in K$ を任意に取ると，任意の $k, l \in \mathbb{N}$ に対し定理 1.10 により

$$\begin{aligned} 0 \le |u_k(x) - u_l(x)| &= \bigl|(u_k - u_l)(x) - (u_k - u_l)(q_1)\bigr| \\ &\le 20|x - q_1|^{\alpha/2}\mathcal{E}(u_k - u_l, u_k - u_l)^{1/2} \xrightarrow{k\wedge l\to\infty} 0 \end{aligned}$$

なので $\lim_{k\wedge l\to\infty}|u_k(x) - u_l(x)| = 0$, すなわち $\{u_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ は $\mathbb{R}$ における Cauchy 列であり，従って極限値 $u(x) := \lim_{n\to\infty} u_n(x) \in \mathbb{R}$ が存在する．この $u\colon K \to \mathbb{R}$ に対し $u \in \mathcal{F}$ かつ $\lim_{n\to\infty}\mathcal{E}(u - u_n, u - u_n) = 0$ であることを示そう．まず $u \in \mathcal{C}(K)$ を示す．$\mathcal{F} \ni v \mapsto \mathcal{E}(v,v)^{1/2}$ に対する 3 角不等式（補題 A.1 の (A.2)）により任意の $k, l \in \mathbb{N}$ に対し

$$0 \le \left|\mathcal{E}(u_k,u_k)^{1/2} - \mathcal{E}(u_l,u_l)^{1/2}\right| \le \mathcal{E}(u_k - u_l, u_k - u_l)^{1/2} \xrightarrow{k\wedge l\to\infty} 0$$

なので $\lim_{k\wedge l\to\infty}\left|\mathcal{E}(u_k,u_k)^{1/2} - \mathcal{E}(u_l,u_l)^{1/2}\right| = 0$, すなわち $\left\{\mathcal{E}(u_n,u_n)^{1/2}\right\}_{n=1}^{\infty}$ は $\mathbb{R}$ における Cauchy 列であり，従って極限値 $A := \lim_{n\to\infty}\mathcal{E}(u_n,u_n)^{1/2} \in \mathbb{R}$ が存在する．すると任意の $x, y \in K$ に対し定理 1.10 により

$$|u(x) - u(y)| = \lim_{n\to\infty}|u_n(x) - u_n(y)| \le \lim_{n\to\infty} 20|x-y|^{\alpha/2}\mathcal{E}(u_n,u_n)^{1/2} = 20A|x-y|^{\alpha/2}$$

となるので，$u \in \mathcal{C}(K)$ である．次に $u \in \mathcal{F}$ かつ $\lim_{n\to\infty} \mathcal{E}(u-u_n, u-u_n) = 0$ であることを示すために，$\varepsilon \in (0,\infty)$ を任意に取り，$N \in \mathbb{N}$ を $k \wedge l \geq N$ なる任意の $k, l \in \mathbb{N}$ に対し $\mathcal{E}(u_k - u_l, u_k - u_l) \leq \varepsilon$ となるように取る．$k, l \in \mathbb{N}$ は $k \wedge l \geq N$ を満たすとし，$m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ とする．このとき $\{\mathcal{E}^{(n)}(u|_{V_n}, u|_{V_n})\}_{n=0}^{\infty} \subset [0,\infty)$ の非減少性 (1.21) および (1.36) により

$$\mathcal{E}^{(m)}\bigl((u_l - u_k)|_{V_m}, (u_l - u_k)|_{V_m}\bigr) \leq \mathcal{E}(u_l - u_k, u_l - u_k) \leq \varepsilon \tag{1.50}$$

であるが，(1.9) の右辺の和は有限（個の項から成る）和であるので (1.50) により

$$\mathcal{E}^{(m)}\bigl((u - u_k)|_{V_m}, (u - u_k)|_{V_m}\bigr) = \lim_{l\to\infty} \mathcal{E}^{(m)}\bigl((u_l - u_k)|_{V_m}, (u_l - u_k)|_{V_m}\bigr) \leq \varepsilon, \tag{1.51}$$

従って (1.51) で $m \to \infty$ とすることにより $\lim_{m\to\infty} \mathcal{E}^{(m)}\bigl((u - u_k)|_{V_m}, (u - u_k)|_{V_m}\bigr) \leq \varepsilon$ となり，これと $u - u_k \in \mathcal{C}(K)$, (1.35) および (1.36) により $u - u_k \in \mathcal{F}$ かつ

$$\mathcal{E}(u - u_k, u - u_k) = \lim_{m\to\infty} \mathcal{E}^{(m)}\bigl((u - u_k)|_{V_m}, (u - u_k)|_{V_m}\bigr) \leq \varepsilon. \tag{1.52}$$

ゆえに $u = (u - u_k) + u_k \in \mathcal{F}$ であり，また (1.52) により $k \geq N$ を満たす任意の $k \in \mathbb{N}$ に対し $\mathcal{E}(u - u_k, u - u_k) \leq \varepsilon$ であるので $\lim_{n\to\infty} \mathcal{E}(u - u_n, u - u_n) = 0$ が従う． □

(0.5) を思い出すと，$(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ を通して Laplacian を定義するためには K 上の関数に対する L^2-内積 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ を導入する必要があり，$(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ の完備性も（付録 A の定理 A.2 にもあるように）内積 $\mathcal{E} + \langle\cdot,\cdot\rangle$ に関する $\mathcal{F}$ の完備性として定式化する必要がある．K 上の関数に対する L^2-内積は本来は測度論の枠組みを通して定義されるべきものではあるが，Sierpiński gasket K 上の Laplacian に対する解析学を展開する限りにおいては連続でない関数を考える必要はほとんどないため，本稿では読者に測度論の知識を要求しないで済むように L^2-内積は「Riemann 積分」的な形で次の定義 1.21 のように定式化しておく．

定義 1.21. $\nu\colon W_* \to (0,\infty)$ が次の 2 条件を満たすとき，ν は $(K, S, \{F_j\}_{j\in S})$ 上の**前測度**であるという：

(PM1) 任意の $w \in W_*$ に対し $\nu(w) = \sum_{j\in S} \nu(wj)$.

(PM2) 任意の $w \in W_* \setminus \{\emptyset\}$ と任意の $j \in S$ に対し $\lim_{n\to\infty} \nu(wj^n) = 0$.[*10]

ν を $(K, S, \{F_j\}_{j\in S})$ 上の前測度とするとき，$u \in \mathcal{C}(K)$ の ν に関する積分 $\int_K u\,d\nu \in \mathbb{R}$ を

$$\int_K u\,d\nu := \lim_{m\to\infty} \sum_{w\in W_m} u(F_w(q_1))\nu(w) \tag{1.53}$$

で定義し，各 $u, v \in \mathcal{C}(K)$ に対し $\langle u, v\rangle_\nu := \int_K uv\,d\nu$, $\|u\|_\nu := \bigl(\int_K u^2\,d\nu\bigr)^{1/2}$ と定める．

[*10] (PM2) は，(PM1) を満たす $\nu\colon W_* \to (0,\infty)$ について，K 上の Borel 測度 $\tilde{\nu}$ で任意の $w \in W_*$ に対し $\tilde{\nu}(K_w) = \nu(w)$ を満たすものが存在するための必要十分条件である．またそのような $\tilde{\nu}$ が存在するとき，$\tilde{\nu}$ は唯 1 つに限られ $\tilde{\nu}(V_* \setminus V_0) = 0$ を満たし，さらに各 $u \in \mathcal{C}(K)$ に対し (1.53) の右辺の極限値は u の K 上での測度 $\tilde{\nu}$ に関する積分 $\int_K u\,d\tilde{\nu}$ に一致する．測度論をご存知の読者の方には，これらの主張の証明を各自試みられることをお勧めする（命題 1.2 の (1.6) の証明における議論も参照のこと）．

演習 1.2. ν を $(K, S, \{F_j\}_{j\in S})$ 上の前測度とする．

(1) $u \in \mathcal{C}(K)$ とする．このとき (1.53) の右辺の極限値が $\mathbb{R}$ において存在することを示せ．

(2) $\langle\cdot,\cdot\rangle_\nu \colon \mathcal{C}(K)\times\mathcal{C}(K) \to \mathbb{R}$ は $\mathcal{C}(K)$ 上の内積であること，すなわち双線型，対称，非負定値で $\{u \in \mathcal{C}(K) \mid \langle u, u\rangle_\nu = 0\} = \{0\}$ を満たすことを示せ．

命題 1.22. ν を $(K, S, \{F_j\}_{j\in S})$ 上の前測度とする．このとき内積 $\mathcal{E}_\nu := \mathcal{E} + \langle\cdot,\cdot\rangle_\nu$ の下で $\mathcal{F}$ は完備（すなわち $(\mathcal{F}, \mathcal{E}_\nu)$ は Hilbert 空間）である．

証明. まず任意の $u \in \mathcal{F}$ と任意の $x, y \in K$ に対し，定理 1.10 により

$$\begin{aligned} |u(x)|^2 &\le \bigl(|u(x)-u(y)| + |u(y)|\bigr)^2 \le 2|u(x)-u(y)|^2 + 2|u(y)|^2 \\ &\le 800\mathcal{E}(u,u) + 2|u(y)|^2 \end{aligned} \tag{1.54}$$

であるので，(1.54) の各辺を $x \in K$ もしくは $y \in K$ の連続関数とみなしその ν に関する積分を取ることにより

$$\mathcal{E}_\nu(u,u) = \mathcal{E}(u,u) + \int_K u^2\,d\nu \le (1 + 800\nu(\emptyset))\mathcal{E}(u,u) + 2\nu(\emptyset)|u(y)|^2, \tag{1.55}$$

$$|u(x)|^2 \le 800\mathcal{E}(u,u) + 2\nu(\emptyset)^{-1}\int_K u^2\,d\nu \le (800 + 2\nu(\emptyset)^{-1})\mathcal{E}_\nu(u,u). \tag{1.56}$$

さて，内積 $\mathcal{E}_\nu$ により定まる $\mathcal{F}$ 上の距離関数が完備であることを示すために，$\{u_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{F}$ は $\lim_{k\wedge l\to\infty}\mathcal{E}_\nu(u_k - u_l, u_k - u_l) = 0$ を満たすとする．このとき任意の $k, l \in \mathbb{N}$ に対し (1.56) により

$$0 \le |u_k(q_1) - u_l(q_1)| \le (800 + 2\nu(\emptyset)^{-1})^{1/2}\mathcal{E}_\nu(u_k - u_l, u_k - u_l)^{1/2} \xrightarrow{k\wedge l\to\infty} 0$$

なので $\lim_{k\wedge l\to\infty}|u_k(q_1) - u_l(q_1)| = 0$, すなわち $\{u_n(q_1)\}_{n=1}^\infty$ は $\mathbb{R}$ における Cauchy 列であり，従って極限値 $a := \lim_{n\to\infty}u_n(q_1) \in \mathbb{R}$ が存在する．また任意の $k, l \in \mathbb{N}$ に対し $0 \le \mathcal{E}(u_k - u_l, u_k - u_l) \le \mathcal{E}_\nu(u_k - u_l, u_k - u_l)$ であるので $\lim_{k\wedge l\to\infty}\mathcal{E}(u_k - u_l, u_k - u_l) = 0$ でもあり，従って定理 1.20 により $u \in \mathcal{F}$ が存在して $\lim_{n\to\infty}\mathcal{E}(u - u_n, u - u_n) = 0$ かつ $u(q_1) = a$. すると $y = q_1$ に対する (1.55) により任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し

$$\begin{aligned} 0 \le \mathcal{E}_\nu(u - u_n, u - u_n) &\le (1 + 800\nu(\emptyset))\mathcal{E}(u - u_n, u - u_n) + 2\nu(\emptyset)|(u - u_n)(q_1)|^2 \\ &= (1 + 800\nu(\emptyset))\mathcal{E}(u - u_n, u - u_n) + 2\nu(\emptyset)|a - u_n(q_1)|^2 \xrightarrow{n\to\infty} 0 \end{aligned}$$

であるので $\lim_{n\to\infty}\mathcal{E}_\nu(u - u_n, u - u_n) = 0$ となり，ゆえに $\mathcal{F}$ は内積 $\mathcal{E}_\nu$ により定まる距離関数に関し完備である． □

1.5 Sierpiński gasket 上の標準 Dirichlet 形式 IV：強局所的な正則対称 Dirichlet 形式としての標準 Dirichlet 形式

本節の目標は空間変数に関する偏微分作用素 (0.3) の対応物とみなせるような「K 上の Laplacian Δ」を $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ を通して構成することであるが, (0.3) の対応物であるからには「K 上の Laplacian Δ」は局所性「U が K の開集合で $u|_U = v|_U$ ならば $(\Delta u)|_U = (\Delta v)|_U$」および $\Delta\mathbf{1}_K = 0$ を満たしているべきである．次の命題 1.23 はこれに対応する性質を $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ が満たしていることを主張しており，またこれは物理学的には「$(\mathcal{E},\mathcal{F})$ を通して定まる熱方程式の下では，熱は K 内を連続的に伝わりかつ K の外部には流出しない」ことを意味している．

命題 1.23. $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ は強局所的 (strongly local) である，すなわち $\mathrm{supp}_K[u] \cap \mathrm{supp}_K[v - a\mathbf{1}_K] = \emptyset$ をある $a \in \mathbb{R}$ に対して満たす任意の $u, v \in \mathcal{F}$ に対し $\mathcal{E}(u,v) = 0$.

証明. $A := \mathrm{supp}_K[u]$ とおく．記号 0.2-(9) において定義したように $A = \overline{u^{-1}(\mathbb{R}\setminus\{0\})}^K$ であり，従って A は K の閉集合かつ $u|_{K\setminus A} = 0$ である．$A = \emptyset$ のときは $u = 0$ となり $\mathcal{E}(u,v) = \mathcal{E}(0,v) = 0$, そこで以下 $A \neq \emptyset$ と仮定する．u, v に対する仮定により $a \in \mathbb{R}$ が存在して $A \cap \mathrm{supp}_K[v - a\mathbf{1}_K] = \emptyset$ であり，$U := K \setminus \mathrm{supp}_K[v - a\mathbf{1}_K]$ とおくと U は K の開集合で $A \subset U$ かつ $v|_U = a\mathbf{1}_K|_U$ となる．$U = K$ のときは $v = a\mathbf{1}_K \in \mathbb{R}\mathbf{1}_K$ なので命題 1.11 と $\mathcal{E}$ に対する Cauchy–Schwarz の不等式（補題 A.1 の (A.1)）（もしくは (1.9) と (1.36)）により $\mathcal{E}(u,v) = 0$ となり，そこで以下さらに $U \neq K$ すなわち $K \setminus U \neq \emptyset$ と仮定する．

さて，$x \in K$ に対し $\mathrm{dist}(x, K\setminus U) := \inf_{y\in K\setminus U}|x-y|$ と定めると，Euclid ノルム $|\cdot|$ に対する 3 角不等式と $K \setminus U \neq \emptyset$ により $\mathrm{dist}(\cdot, K\setminus U)$ は K 上の $[0,\infty)$-値連続関数になることが容易に確認でき，さらに U が K の開集合であることから任意の $x \in U$ に対し $\mathrm{dist}(x, K\setminus U) > 0$ が従う．ここで A はコンパクト位相空間 K の閉集合としてそれ自身コンパクトであり，よってコンパクト位相空間上の連続関数に対する最大値・最小値の存在定理（例えば [59, 定理 22.3-系] を参照）により $\mathrm{dist}(\cdot, K\setminus U)|_A$ は最小値 $\delta := \min_{z\in A}\mathrm{dist}(z, K\setminus U)$ を持つが, $A \subset U$ によりこの A 上の関数は $(0,\infty)$-値であるので $\delta > 0$. そこで $m \in \mathbb{N}$ を $2^{-m} < \delta$ となるように取ると，各 $w \in W_m$ に対し次（のうちのいずれか 1 つ）が成り立つ．まず $A \cap K_w = \emptyset$ すなわち $K_w \subset K\setminus A$ のときは, $u|_{K\setminus A} = 0$ により $u|_{K_w} = 0$ なので $u \circ F_w = 0$ である．次に $A \cap K_w \neq \emptyset$ のときは，$z \in A \cap K_w$ を取ることができ，すると任意の $x \in K_w$ に対し $|z - x| \leq 2^{-m} < \delta \leq \mathrm{dist}(z, K\setminus U)$ により $x \notin K\setminus U$ すなわち $x \in U$ となるので，$K_w \subset U$, ところがこのとき $v|_U = a\mathbf{1}_K|_U$ なので $v|_{K_w} = a\mathbf{1}_K|_{K_w}$ となり，よって $v \circ F_w = a\mathbf{1}_K$. ゆえに任意の $w \in W_m$ に対し，命題 1.9 の (1.37) により $u \circ F_w, v \circ F_w \in \mathcal{F}$ であり，かつ $u \circ F_w = 0$ または $v \circ F_w = a\mathbf{1}_K \in \mathbb{R}\mathbf{1}_K$

であるので命題 1.11 と $\mathcal{E}$ に対する Cauchy–Schwarz の不等式（補題 A.1 の (A.1)）（もしくは (1.9) と (1.36)）により $\mathcal{E}(u \circ F_w, v \circ F_w) = 0$ となる．従って命題 1.9 の (1.38) により $\mathcal{E}(u, v) = \sum_{w \in W_m} (\frac{5}{3})^m \mathcal{E}(u \circ F_w, v \circ F_w) = 0$ となるので，$(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ は強局所的である． □

以上で，(1.35) と (1.36) で定義される $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ を [13, 11, 8] にある Dirichlet 形式の一般論の枠組みに乗せるための準備は完了である．これを次の定理 1.24 としてまとめておく．

定理 1.24. ν を $(K, S, \{F_j\}_{j \in S})$ 上の前測度とする．このとき $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ は (K, ν) 上の強局所的な正則対称 Dirichlet 形式である，すなわち次が成り立つ：[*11][*12]

(DF1)（閉性）$(\mathcal{F}, \mathcal{E}_\nu)$ は Hilbert 空間である．

(DF2)（Markov 性）任意の $u \in \mathcal{F}$ に対し $u^+ \wedge 1 \in \mathcal{F}$ かつ $\mathcal{E}(u^+ \wedge 1, u^+ \wedge 1) \leq \mathcal{E}(u, u)$.

(DF3)（正則性）$\mathcal{F} \cap \mathcal{C}_c(K)$ は $(\mathcal{F}, \mathcal{E}_\nu)$ においても $(\mathcal{C}_c(K), \|\cdot\|_{\sup})$ においても稠密である．

(DF4)（強局所性）$\mathrm{supp}_K[u] \cap \mathrm{supp}_K[v - a\mathbf{1}_K] = \emptyset$ をある $a \in \mathbb{R}$ に対して満たす任意の $u, v \in \mathcal{F} \cap \mathcal{C}_c(K)$ に対し $\mathcal{E}(u, v) = 0$.

証明. (DF1) は命題 1.22 で，(DF2) は系 1.13-(1) で，(DF4) は命題 1.23 で既に示した．(DF3) については，K がコンパクト位相空間であることから $\mathcal{C}_c(K) = \mathcal{C}(K)$（$\mathcal{C}_c(K)$ については記号 0.2-(9) を参照）であり，また (1.35) により $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}(K) = \mathcal{C}_c(K)$ なので $\mathcal{F} \cap \mathcal{C}_c(K) = \mathcal{F}$ であることに注意すると，$\mathcal{F} \cap \mathcal{C}_c(K) = \mathcal{F}$ は $(\mathcal{F}, \mathcal{E}_\nu)$ において明らかに稠密であり，さらに定理 1.18 により $(\mathcal{C}_c(K), \|\cdot\|_{\sup}) = (\mathcal{C}(K), \|\cdot\|_{\sup})$ においても稠密である． □

1.6 Sierpiński gasket 上の Laplacian とそのスペクトル分解

ここまでに証明した $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ の性質を用いて，「K 上の Laplacian」を以下の定義 1.26 のように (0.5) と同様の関係式により定義することができる．まず次の補題が必要である．

[*11] 以下の定理 1.24 の証明で述べる通り，今の状況では $\mathcal{F} \cap \mathcal{C}_c(K) = \mathcal{F}$ である．定理 1.24-(DF3),(DF4) において単に $\mathcal{F}$ と書くのではなくわざわざ $\mathcal{F} \cap \mathcal{C}_c(K)$ と書いているのは，次の脚注*12 で一般の状況における定義を紹介するのに好都合だからである．

[*12] ここに現れた諸概念は，一般には次のように定義される（以下，本脚注においては本節の本文での記号遣いは忘れるものとする）．$(K, \mathcal{B}, \nu)$ を測度空間，$\mathcal{F}$ を $L^2(K, \nu)$ の稠密な線型部分空間とし，$\mathcal{E} \colon \mathcal{F} \times \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ は双線型，対称，非負定値であるとする．$L^2(K, \nu)$ の内積を $\langle \cdot, \cdot \rangle_\nu$ で表すものとし，$\mathcal{E}_\nu := \mathcal{E} + \langle \cdot, \cdot \rangle_\nu$ とおく．$(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ が定理 1.24-(DF1),(DF2) を満たすとき，$(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ は $L^2(K, \nu)$ 上の**対称 Dirichlet 形式** (symmetric Dirichlet form) であるという．また，K が局所コンパクト可分距離化可能空間，$\mathcal{B}$ が K の Borel σ-加法族，ν が K の任意のコンパクト集合上で有限かつ K の任意の空でない開集合上で正であり，かつ $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ が $L^2(K, \nu)$ 上の対称 Dirichlet 形式で定理 1.24-(DF3) を満たすとき，$(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ は (K, ν) 上の**正則対称 Dirichlet 形式** (regular symmetric Dirichlet form) であるという．さらに (K, ν) 上の正則対称 Dirichlet 形式 $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ が定理 1.24-(DF4) を満たすとき，$(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ は**強局所的** (strongly local) であるという．これらの定義についての詳細は [11, Sections 1.1, 1.3, 1.4 and 3.1] を参照のこと．

補題 1.25. ν を $(K, S, \{F_j\}_{j\in S})$ 上の前測度とし，$f, g \in \mathcal{C}(K)$ は任意の $v \in \mathcal{F}$ に対し $\langle f, v\rangle_\nu = \langle g, v\rangle_\nu$ を満たすとする．このとき $f = g$.

証明. $u := f - g$ とおき，$\varepsilon \in (0, \infty)$ を任意に取る．$f, g \in \mathcal{C}(K)$ により $u \in \mathcal{C}(K)$ であるので，定理 1.18 により $v \in \mathcal{F}$ が存在して $\|u - v\|_{\sup} < \nu(\emptyset)^{-1/2}\varepsilon$ となる．するとこのとき $v \in \mathcal{F}$ と f, g に対する仮定により $\langle u, v\rangle_\nu = \langle f, v\rangle_\nu - \langle g, v\rangle_\nu = 0$ であり，これと演習 1.2-(2) および $\langle\cdot,\cdot\rangle_\nu$ に対する Cauchy–Schwarz の不等式（補題 A.1 の (A.1)）により

$$0 \le \|u\|_\nu^2 = \langle u, u\rangle_\nu = \langle u, u - v\rangle_\nu \le \|u\|_\nu \|u - v\|_\nu \le \|u\|_\nu \left(\int_K \frac{\varepsilon^2}{\nu(\emptyset)}\, d\nu\right)^{1/2} = \varepsilon\|u\|_\nu$$

となるので $\|u\|_\nu^2 - \varepsilon\|u\|_\nu \le 0$, すなわち $0 \le \|u\|_\nu \le \varepsilon$ であるが，$\varepsilon \in (0, \infty)$ は任意であったので $\|u\|_\nu = 0$ となり，従って演習 1.2-(2) により $u = 0$, ゆえに $f = g$. □

定義 1.26. ν を $(K, S, \{F_j\}_{j\in S})$ 上の前測度とする．このとき，まず $\mathcal{D}[\Delta_\nu] \subset \mathcal{F}$ を

$$\mathcal{D}[\Delta_\nu] := \left\{u \in \mathcal{F} \;\middle|\; f \in \mathcal{C}(K) \text{ が存在して任意の } v \in \mathcal{F} \text{ に対し } \mathcal{E}(u, v) = \langle f, v\rangle_\nu\right\} \quad (1.57)$$

で定義し，さらに $\Delta_\nu \colon \mathcal{D}[\Delta_\nu] \to \mathcal{C}(K)$ を次のように定める：各 $u \in \mathcal{D}[\Delta_\nu]$ に対し，補題 1.25 により (1.57) のような $f \in \mathcal{C}(K)$ は唯 1 つしかないことに注意して

$$\Delta_\nu u := -f \quad \text{（ただし } f \text{ は } u \text{ に対し (1.57) の性質を満たす唯 1 つの } \mathcal{C}(K) \text{ の元）.} \quad (1.58)$$

Δ_ν を $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ に対応する **ν-Laplacian** と呼ぶ.

ν を $(K, S, \{F_j\}_{j\in S})$ 上の前測度とする．定義 1.26 の (1.57) と (1.58) により容易に分かるように，$\mathcal{D}[\Delta_\nu]$ は $\mathcal{C}(K)$ の線型部分空間，Δ_ν は線型写像である．さらに次の定理 1.27 に述べるように，Δ_ν はその固有関数から成る内積空間 $(\mathcal{C}(K), \langle\cdot,\cdot\rangle_\nu)$ の完全正規直交系により「対角化」（スペクトル分解）される.

定理 1.27. ν を $(K, S, \{F_j\}_{j\in S})$ 上の前測度とする．このとき非負実数の非減少列 $\{\lambda_n^\nu\}_{n=1}^\infty \subset [0, \infty)$ と $\mathcal{D}[\Delta_\nu]$ の元の列 $\{\varphi_n^\nu\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{D}[\Delta_\nu]$ で次の (1), (2), (3) を満たすものが存在する：

(1)（φ_n^ν は固有値 λ_n^ν の固有関数）任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し

$$-\Delta_\nu \varphi_n^\nu = \lambda_n^\nu \varphi_n^\nu. \quad (1.59)$$

(2)（$\{\varphi_n^\nu\}_{n=1}^\infty$ は内積空間 $(\mathcal{C}(K), \langle\cdot,\cdot\rangle_\nu)$ の正規直交系）任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し $\|\varphi_n^\nu\|_\nu = 1$, かつ $n \neq k$ を満たす任意の $n, k \in \mathbb{N}$ に対し $\langle\varphi_n^\nu, \varphi_k^\nu\rangle_\nu = 0$.

(3)（$\{\varphi_n^\nu\}_{n=1}^\infty$ は内積空間 $(\mathcal{C}(K), \langle\cdot,\cdot\rangle_\nu)$ において完全）$f \in \mathcal{C}(K)$ が任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し $\langle f, \varphi_n^\nu\rangle_\nu = 0$ を満たすならば $f = 0$.

さらに $\lim_{n\to\infty} \lambda_n^\nu = \infty$ である.

定理 1.27 は内積空間 $(\mathcal{C}(K), \langle\cdot,\cdot\rangle_\nu)$ と $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ に定理 A.2 を適用することにより得られるが，定理 A.2 の仮定の成立を保証するために次の命題 1.28 が必要である．

命題 1.28. ν を $(K, S, \{F_j\}_{j\in S})$ 上の前測度とする．このとき包含写像 $\mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{C}(K)$ は $\mathcal{E}_\nu$ と $\|\cdot\|_{\sup}$ に関してコンパクト，すなわち $\sup_{n\geq 1} \mathcal{E}_\nu(u_n, u_n) < \infty$ を満たす任意の $\{u_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{F}$ に対し $u \in \mathcal{C}(K)$ と狭義単調増加列 $\{n_k\}_{k=1}^\infty \subset \mathbb{N}$ が存在して $\lim_{k\to\infty} \|u - u_{n_k}\|_{\sup} = 0$. 特に $\|\cdot\|_{\sup}$ を $\|\cdot\|_\nu$ で置き換えた主張も（同一の u と $\{n_k\}_{k=1}^\infty$ で）成り立つ．

証明. [*13] $\{u_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{F}$ は $\sup_{n\geq 1} \mathcal{E}_\nu(u_n, u_n) < \infty$ を満たすとし，$C := \sup_{n\geq 1} \mathcal{E}_\nu(u_n, u_n)$ とおく．このとき $x \in K$ とすると，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し (1.56) と $\mathcal{E}_\nu(u_n, u_n) \leq C$ により $|u_n(x)| \leq (800 + 2\nu(\emptyset)^{-1})^{1/2} C^{1/2}$ であるので $\{u_n(x)\}_{n=1}^\infty \subset \mathbb{R}$ は有界である．(1.2) と (1.3) により容易に分かるように V_* は可算無限集合であることに注意し，全単射 $\mathbb{N} \ni j \mapsto x_j \in V_*$ を（任意に 1 つ）取る．すると任意の $j \in \mathbb{N}$ と任意の狭義単調増加列 $\{n(j-1, k)\}_{k=1}^\infty \subset \mathbb{N}$ に対し，$\{u_{n(j-1,k)}(x_j)\}_{k=1}^\infty \subset \mathbb{R}$ は有界であるので Bolzano–Weierstrass の定理（$\mathbb{R}$ の有界閉区間の列コンパクト性）により $a_{x_j} \in \mathbb{R}$ と狭義単調増加列 $\{k(j,l)\}_{l=1}^\infty \subset \mathbb{N}$ が存在して $a_{x_j} = \lim_{l\to\infty} u_{n(j-1,k(j,l))}(x_j)$ となる．そこで狭義単調増加列 $\{n(0,k)\}_{k=1}^\infty \subset \mathbb{N}$ を $n(0,k) := k$ で定め，各 $j \in \mathbb{N}$ に対し帰納的に上記のような $a_{x_j} \in \mathbb{R}$ と狭義単調増加列 $\{k(j,l)\}_{l=1}^\infty \subset \mathbb{N}$ を取り各 $l \in \mathbb{N}$ に対し $n(j,l) := n(j-1, k(j,l))$ とおくことにより，$\mathbb{N}$-値狭義単調増加列の列 $\left\{\{n(j,k)\}_{k=1}^\infty\right\}_{j=0}^\infty$ を任意の $j \in \mathbb{N}$ に対し $\{n(j,k)\}_{k=1}^\infty$ は $\{n(j-1,k)\}_{k=1}^\infty$ の部分列であって極限値 $a_{x_j} = \lim_{k\to\infty} u_{n(j,k)}(x_j) \in \mathbb{R}$ が存在するように取ることができる．そして $\{n_k\}_{k=1}^\infty \subset \mathbb{N}$ を $n_k := n(k,k)$ で定めると，任意の $k \in \mathbb{N}$ に対し $n_k = n(k,k) \leq n(k+1,k) < n(k+1,k+1) = n_{k+1}$ なので $\{n_k\}_{k=1}^\infty$ は狭義単調増加列であり，さらに各 $j \in \mathbb{N}$ に対し $\{n_k \mid k \in \mathbb{N}, k \geq j\} \subset \{n(j,k) \mid k \in \mathbb{N}\}$ により $\{n_k\}_{k=j}^\infty$ は $\{n(j,k)\}_{k=1}^\infty$ の部分列であるので $a_{x_j} = \lim_{k\to\infty} u_{n_k}(x_j) \in \mathbb{R}$, すなわち任意の $x \in V_*$ に対し $a_x = \lim_{k\to\infty} u_{n_k}(x) \in \mathbb{R}$.[*14]

以降の議論のために, まず次が成り立つことに注意する：定理 1.10 と $\sup_{n\geq 1} \mathcal{E}(u_n, u_n) \leq \sup_{n\geq 1} \mathcal{E}_\nu(u_n, u_n) = C$ により任意の $k \in \mathbb{N}$ と任意の $x, y \in K$ に対し

$$|u_{n_k}(x) - u_{n_k}(y)|^2 \leq 400|x-y|^\alpha \mathcal{E}(u_{n_k}, u_{n_k}) \leq 400C|x-y|^\alpha. \tag{1.60}$$

さて，$\varepsilon \in (0,\infty)$ とし，$m \in \mathbb{N}$ を $2^{-m} < \left(\frac{1}{60}(1 + C^{1/2})^{-1}\varepsilon\right)^{2/\alpha}$ となるように取る．このとき各 $w \in W_m$ に対し $\lim_{k\to\infty} u_{n_k}(F_w(q_1)) = a_{F_w(q_1)} \in \mathbb{R}$ であるので $k_w \in \mathbb{N}$ が存在して任意の $k \geq k_w$ に対し $\left|a_{F_w(q_1)} - u_{n_k}(F_w(q_1))\right| < \frac{1}{6}\varepsilon$, 従って任意の $k, l \geq k_{W_m}$ に

[*13] この証明は本質的には，位相空間論においてよく知られている定理である Arzelà–Ascoli の定理の証明を今の状況に限定して述べたものである．Arzelà–Ascoli の定理については例えば [55, Theorem 11.28] および [59, 定理 29.3（と定理 27.2）] を参照のこと．

[*14] このようにして（典型的には数列の極限に関係した）都合のよい狭義単調増加列 $\{n_k\}_{k=1}^\infty \subset \mathbb{N}$ を得る論法を**対角線論法**という．

対し

$$\left|u_{n_l}(F_w(q_1))-u_{n_k}(F_w(q_1))\right| \le \left|u_{n_l}(F_w(q_1))-a_{F_w(q_1)}\right|+\left|a_{F_w(q_1)}-u_{n_k}(F_w(q_1))\right| < \tfrac{1}{3}\varepsilon \tag{1.61}$$

となり，そこで $k_{W_m} := \max_{w\in W_m} k_w$ とおく．すると任意の $k,l \ge k_{W_m}$ と任意の $x \in K$ に対し，(1.4) により $w \in W_m$ が存在して $x \in K_w$, 特に $|x - F_w(q_1)| \le 2^{-m}$ であり，これと $k \wedge l \ge k_{W_m} \ge k_w$, (1.61), (1.60) および m の取り方により

$$\begin{aligned}
&|u_{n_l}(x) - u_{n_k}(x)| \\
&\quad \le \left|u_{n_l}(x) - u_{n_l}(F_w(q_1))\right| + \left|u_{n_l}(F_w(q_1)) - u_{n_k}(F_w(q_1))\right| + \left|u_{n_k}(F_w(q_1)) - u_{n_k}(x)\right| \\
&\quad \le 20C^{1/2}|x - F_w(q_1)|^{\alpha/2} + \tfrac{1}{3}\varepsilon + 20C^{1/2}|F_w(q_1) - x|^{\alpha/2} \\
&\quad \le 40C^{1/2}(2^{-m})^{\alpha/2} + \tfrac{1}{3}\varepsilon < \varepsilon,
\end{aligned} \tag{1.62}$$

従って特に各 $x \in K$ に対し $\{u_{n_k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$ は $\mathbb{R}$ における Cauchy 列であるので極限値 $u(x) := \lim_{k\to\infty} u_{n_k}(x) \in \mathbb{R}$ が存在する．そしてこの $u\colon K \to \mathbb{R}$ について，まず任意の $x, y \in K$ に対し (1.60) において $k \to \infty$ とすることにより

$$|u(x) - u(y)|^2 = \lim_{k\to\infty} |u_{n_k}(x) - u_{n_k}(y)|^2 \le 400C|x - y|^{\alpha} \tag{1.63}$$

となるので，$u \in \mathcal{C}(K)$ である．さらに (1.62) において $l \to \infty$ とすることにより任意の $k \ge k_{W_m}$ と任意の $x \in K$ に対し

$$|u(x) - u_{n_k}(x)| = \lim_{l\to\infty} |u_{n_l}(x) - u_{n_k}(x)| \le \varepsilon, \tag{1.64}$$

従って任意の $k \ge k_{W_m}$ に対し (1.64) により $\|u - u_{n_k}\|_{\sup} = \sup_{x\in K}|u(x) - u_{n_k}(x)| \le \varepsilon$ となるので，$\lim_{k\to\infty} \|u - u_{n_k}\|_{\sup} = 0$ が得られる．さらにまた任意の $k \in \mathbb{N}$ に対し

$$0 \le \|u - u_{n_k}\|_{\nu} \le \left(\int_K \|u - u_{n_k}\|_{\sup}^2 \, d\nu\right)^{1/2} = \|u - u_{n_k}\|_{\sup}\nu(\emptyset)^{1/2} \xrightarrow{k\to\infty} 0 \tag{1.65}$$

となるので $\lim_{k\to\infty} \|u - u_{n_k}\|_{\nu} = 0$ も成り立つ． □

定理 1.27 の証明. (1.35) により $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}(K)$ であることに注意すると定義 1.26 の (1.57) と (1.58) により，$\{\lambda_n^{\nu}\}_{n=1}^{\infty} \subset [0,\infty)$ と $\{\varphi_n^{\nu}\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{F}$ について，$\{\varphi_n^{\nu}\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{D}[\Delta_{\nu}]$ と定理 1.27-(1) が成り立つためには定理 A.2-(1) が成り立つことが必要十分である．よって定理 1.27 の結論は $(\mathcal{C}(K), \langle\cdot,\cdot\rangle_{\nu})$ と $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ に対する定理 A.2 の結論と同値であり，従ってあとは $(\mathcal{C}(K), \langle\cdot,\cdot\rangle_{\nu})$ と $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ が定理 A.2 の仮定を満たすことを示せばよい．

まず演習 1.2-(2) により $(\mathcal{C}(K), \langle\cdot,\cdot\rangle_{\nu})$ は $\mathbb{R}$ 上の内積空間，また (1.35) の直後に注意したように $\mathcal{F}$ は $\mathcal{C}(K)$ の線型部分空間であり，K が無限集合であることと系 1.17 により $\mathcal{F}$ は無限次元線型空間，従って $\mathcal{C}(K)$ も無限次元である．さらに任意の $f \in \mathcal{C}(K)$ と任意の $\varepsilon \in (0,\infty)$ に対し，定理 1.18 により $u \in \mathcal{F}$ が存在して $\|f - u\|_{\sup} < \nu(\emptyset)^{-1/2}\varepsilon$ であり，すると (1.65) と同様にして $\|f - u\|_{\nu} \le \|f - u\|_{\sup}\nu(\emptyset)^{1/2} < \varepsilon$ となるので，$\mathcal{F}$ は

$(\mathcal{C}(K), \langle\cdot,\cdot\rangle_\nu)$ において稠密である．そして (1.36) の直後に注意したように $\mathcal{E}\colon \mathcal{F}\times\mathcal{F} \to \mathbb{R}$ は双線型，対称，非負定値，命題 1.22 により内積 $\mathcal{E}_\nu = \mathcal{E} + \langle\cdot,\cdot\rangle_\nu$ の下で $\mathcal{F}$ は完備であり，命題 1.28 により包含写像 $\mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{C}(K)$ は $\mathcal{E}_\nu$ と $\|\cdot\|_\nu$ に関してコンパクトである．以上により $(\mathcal{C}(K), \langle\cdot,\cdot\rangle_\nu)$ と $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ は定理 A.2 の仮定を全て満たすので，定理 A.2 と前段落の議論により定理 1.27 の結論が従う． □

定理 1.27 の $\{\lambda_n^\nu\}_{n=1}^\infty, \{\varphi_n^\nu\}_{n=1}^\infty$ についてはさらに次の定理 1.29 と定理 1.30 が成り立つ．

定理 1.29. ν を $(K, S, \{F_j\}_{j\in S})$ 上の前測度とし，$\{\lambda_n^\nu\}_{n=1}^\infty \subset [0,\infty)$ と $\{\varphi_n^\nu\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{D}[\Delta_\nu]$ を定理 1.27 の通りとする．このとき任意の $u \in \mathcal{F}$ に対し

$$\lim_{N\to\infty} \mathcal{E}_\nu\left(u - \sum_{n=1}^N \langle u, \varphi_n^\nu\rangle_\nu \varphi_n^\nu, u - \sum_{n=1}^N \langle u, \varphi_n^\nu\rangle_\nu \varphi_n^\nu\right) = 0, \tag{1.66}$$

$$\mathcal{E}(u,u) = \sum_{n=1}^\infty \lambda_n^\nu \langle u, \varphi_n^\nu\rangle_\nu^2, \qquad \|u\|_\nu^2 = \sum_{n=1}^\infty \langle u, \varphi_n^\nu\rangle_\nu^2. \tag{1.67}$$

証明. 定理 1.27 の証明により，$(\mathcal{C}(K), \langle\cdot,\cdot\rangle_\nu)$ と $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ は定理 A.2 の仮定を満たし，これらに定理 A.2 を適用することにより得られるのが非減少列 $\{\lambda_n^\nu\}_{n=1}^\infty \subset [0,\infty)$ および $\{\varphi_n^\nu\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{D}[\Delta_\nu] \subset \mathcal{F}$ であるので，定理 A.4 により (1.66) と (1.67) が成り立つ． □

定理 1.30. ν を $(K, S, \{F_j\}_{j\in S})$ 上の前測度とし，$\{\lambda_n^\nu\}_{n=1}^\infty \subset [0,\infty)$ を定理 1.27 の通りとする．このとき任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し

$$\lambda_n^\nu = \inf\left\{ \sup_{u\in L\setminus\{0\}} \frac{\mathcal{E}(u,u)}{\|u\|_\nu^2} \,\middle|\, L \text{ は } \mathcal{F} \text{ の } n \text{ 次元線型部分空間} \right\}. \tag{1.68}$$

証明. 定理 1.29 の証明と同様に，定理 1.27 の証明と定理 A.5 により (1.68) が従う． □

以上で Sierpiński gasket K 上の標準 Dirichlet 形式 $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ の構成, および $(K, S, \{F_j\}_{j\in S})$ 上の前測度 ν から定まる内積 $\langle\cdot,\cdot\rangle_\nu$ に関して $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ に対応する Laplacian Δ_ν の定義とそのスペクトル分解（固有関数からなる $\langle\cdot,\cdot\rangle_\nu$ に関する完全正規直交系）の存在証明が完了した．こうして得られた Δ_ν のスペクトル分解を用いると，Δ_ν に付随する熱方程式 $\frac{\partial}{\partial t}u(t,x) = \Delta_\nu u(t,x)$ の初期値問題の解の存在と一意性や初期値問題の解の積分表示を与える積分核（熱核）$p_t^\nu(x,y)$ の存在と連続性など，K 上での熱方程式に関する基本的な問題に答えることが可能になる．さらに $p_t^\nu(x,y)$ に対する精密な不等式評価を証明することにより K 上での熱拡散の様子を（性質の良い ν に対しては）定量的に詳しく記述できることも知られている．しかしながらそういった解析を厳密な形で行うためにはより精密な解析が随所で必要になり本稿の読者に求める予備知識の水準を超えてしまうため，次節以降では証明は割愛し代表的な研究結果を手短に紹介するだけに留めることにする．

1.7　補足：標準 Dirichlet 形式の定義域は $\mathcal{C}^1$ 級関数の制限を含まない

[*15]本節の最後に補足として，(1.35) で定義される Sierpiński gasket K 上の標準 Dirichlet 形式の定義域 $\mathcal{F}$ が，通常の意味で連続微分可能な関数を（定数関数以外に）含まないことを主張する次の定理を証明する．

定理 1.31. $u\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ は $\mathcal{C}^1$ 級（すなわち 1 階偏微分係数 $(\partial u/\partial x_1)(x), (\partial u/\partial x_2)(x) \in \mathbb{R}$ が任意の $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ において存在して $x \in \mathbb{R}^2$ の関数として連続）かつ $u|_K \in \mathcal{F}$ を満たすとする．このとき $u|_K \in \mathbb{R}\mathbf{1}_K$.

証明. 連続写像 $\nabla u\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を $\nabla u(x) := \bigl((\partial u/\partial x_1)(x), (\partial u/\partial x_2)(x)\bigr)$ で定める．まず，$x \in V_*$ を任意に取り $\nabla u(x) = 0$ であることを背理法により証明しよう．$\nabla u(x) \neq 0$ と仮定する．このとき ∇u の x における連続性により $r \in (0, \infty)$ が存在して

$$|y - x| < r \text{ なる任意の } y \in \mathbb{R}^2 \text{ に対し} \qquad |\nabla u(y) - \nabla u(x)| \le \frac{1}{4}|\nabla u(x)|. \tag{1.69}$$

(1.2) および (1.3) に注意して，$n := \min\{m \in \mathbb{N} \cup \{0\} \mid x \in V_m, 2^{-m} < r\}$ とおき，$w \in W_n$ と $j \in S$ を $x = F_w(q_j)$ となるように取る．このとき $\{q_k - q_j\}_{k \in S\setminus\{j\}} \subset \mathbb{R}^2$ は角 $\pi/3$ を成す長さ（Euclid ノルム）1 の 2 ベクトルであるので，$k \in S \setminus \{j\}$ を

$$|\langle \nabla u(x), q_k - q_j \rangle| \ge \frac{1}{2}|\nabla u(x)| \tag{1.70}$$

となるように取ることができる．このとき任意の $v \in W_*$ に対し，平均値の定理により $\theta \in (0,1)$ が存在して

$$\begin{aligned} u(F_{wv}(q_k)) - u(F_{wv}(q_j)) &= \bigl\langle \nabla u\bigl((1-\theta)F_{wv}(q_j) + \theta F_{wv}(q_k)\bigr), F_{wv}(q_k) - F_{wv}(q_j) \bigr\rangle \\ &= 2^{-n-|v|}\bigl\langle \nabla u\bigl((1-\theta)F_{wv}(q_j) + \theta F_{wv}(q_k)\bigr), q_k - q_j \bigr\rangle \end{aligned} \tag{1.71}$$

となり，さらに $\bigl|\bigl((1-\theta)F_{wv}(q_j) + \theta F_{wv}(q_k)\bigr) - x\bigr| \le 2^{-n} < r$ であることに注意すると (1.71), (1.69), (1.70) および $|q_k - q_j| = 1$ により

$$\begin{aligned} &\bigl|u(F_{wv}(q_k)) - u(F_{wv}(q_j))\bigr| \\ &= 2^{-n-|v|}\bigl|\langle \nabla u(x), q_k - q_j \rangle + \bigl\langle \nabla u\bigl((1-\theta)F_{wv}(q_j) + \theta F_{wv}(q_k)\bigr) - \nabla u(x), q_k - q_j \bigr\rangle\bigr| \\ &\ge 2^{-n-|v|}\left(|\langle \nabla u(x), q_k - q_j \rangle| - \frac{1}{4}|\nabla u(x)| \cdot |q_k - q_j| \right) \\ &\ge 2^{-n-|v|-2}|\nabla u(x)|. \end{aligned} \tag{1.72}$$

よって任意の $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ に対し補題 1.4 と (1.9) および (1.72) により

$$\mathcal{E}^{(n+m)}(u|_{V_{n+m}}, u|_{V_{n+m}}) \ge \left(\frac{5}{3}\right)^n \mathcal{E}^{(m)}(u \circ F_w|_{V_m}, u \circ F_w|_{V_m})$$

[*15] 本小節は一般公開に際し新たに加筆したものである．

$$
\begin{aligned}
&= \left(\frac{5}{3}\right)^n \sum_{v \in W_m} \left(\frac{5}{3}\right)^m \mathcal{E}^{(0)}(u \circ F_{wv}|_{V_0}, u \circ F_{wv}|_{V_0}) \\
&\geq \left(\frac{5}{3}\right)^{n+m} \sum_{v \in W_m} \bigl(u(F_{wv}(q_k)) - u(F_{wv}(q_j))\bigr)^2 \\
&\geq \left(\frac{5}{3}\right)^{n+m} 3^m \bigl(2^{-n-m-2}|\nabla u(x)|\bigr)^2 \\
&= \left(\frac{5}{3}\right)^n 2^{-2n-4} |\nabla u(x)|^2 \left(\frac{5}{4}\right)^m \xrightarrow{m\to\infty} \infty
\end{aligned}
$$

となり，これは $u|_K \in \mathcal{F}$ との仮定と (1.35) により $\lim_{m\to\infty} \mathcal{E}^{(n+m)}(u|_{V_{n+m}}, u|_{V_{n+m}}) < \infty$ であることに矛盾する．ゆえに $\nabla u(x) = 0$ である．

以上により任意の $x \in V_*$ に対し $\nabla u(x) = 0$ であり，これと ∇u の連続性，および (1.3) により $K = \overline{V_*}^{\mathbb{R}^2}$ であることから任意の $x \in K$ に対し $\nabla u(x) = 0$ となる．（これは次の議論により得られる：$x \in K$ とする．$\varepsilon \in (0,\infty)$ を任意に取ると，∇u の x における連続性により $\delta \in (0,\infty)$ が存在して $|y - x| < \delta$ なる任意の $y \in \mathbb{R}^2$ に対し $|\nabla u(y) - \nabla u(x)| < \varepsilon$ となるが，$K = \overline{V_*}^{\mathbb{R}^2}$ により $|y - x| < \delta$ なる $y \in V_*$ を取ることができ，すると $\nabla u(y) = 0$ なので $0 \leq |\nabla u(x)| = |\nabla u(x) - \nabla u(y)| < \varepsilon$, 特に $0 \leq |\nabla u(x)| \leq \varepsilon$ であり，$\varepsilon \in (0,\infty)$ は任意であったので $|\nabla u(x)| = 0$, すなわち $\nabla u(x) = 0$.）

最後に $u|_K \in \mathbb{R}\mathbf{1}_K$ を示す．$u \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ は $\mathcal{C}^1$ 級なので連続であり，従って $u|_{V_*} = u(q_1)\mathbf{1}_K|_{V_*}$ が示せれば前段落と同様に u の連続性と $K = \overline{V_*}^{\mathbb{R}^2}$ を用いることで $u|_K = u(q_1)\mathbf{1}_K \in \mathbb{R}\mathbf{1}_K$ が得られる．よって $u|_{V_*} = u(q_1)\mathbf{1}_K|_{V_*}$ を示せばよく，(1.3) により $V_* = \bigcup_{m=0}^{\infty} V_m$ であったことに注意するとこれは次の主張と同値である：

$$
\text{任意の } m \in \mathbb{N} \cup \{0\} \text{ に対し} \qquad u|_{V_m} = u(q_1)\mathbf{1}_K|_{V_m}. \tag{1.73}
$$

そこで (1.73) を m についての数学的帰納法により証明しよう．まず $x \in V_0$ を任意に取ると，平均値の定理により $\theta \in (0,1)$ が存在して $u(x) = u(q_1) + \langle \nabla u((1-\theta)q_1 + \theta x), x - q_1 \rangle$ となるが，$(1-\theta)q_1 + \theta x \in K$ であるので前段落の結果により $\nabla u((1-\theta)q_1 + \theta x) = 0$, 従って $u(x) = u(q_1) + \langle 0, x - q_1 \rangle = u(q_1)$ となり $u|_{V_0} = u(q_1)\mathbf{1}_K|_{V_0}$ が得られる．次に $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ とし，$u|_{V_m} = u(q_1)\mathbf{1}_K|_{V_m}$ と仮定する．このとき任意の $x \in V_{m+1}$ に対し，(1.2) より容易に分かるように $q \in V_m$ が存在して $\{(1-t)q + tx \mid t \in [0,1]\} \subset K$ であり，さらに平均値の定理により $\theta \in (0,1)$ が存在して $u(x) = u(q) + \langle \nabla u((1-\theta)q + \theta x), x - q \rangle$ となるが，$u|_{V_m} = u(q_1)\mathbf{1}_K|_{V_m}$ との仮定により $u(q) = u(q_1)$, また前段落の結果により $\nabla u((1-\theta)q + \theta x) = 0$ であるので $u(x) = u(q_1) + \langle 0, x - q \rangle = u(q_1)$, よって $u|_{V_{m+1}} = u(q_1)\mathbf{1}_K|_{V_{m+1}}$. ゆえに数学的帰納法により (1.73), すなわち $u|_{V_*} = u(q_1)\mathbf{1}_K|_{V_*}$ が成り立ち，従って前段落と同様に u の連続性と $K = \overline{V_*}^{\mathbb{R}^2}$ により $u|_K = u(q_1)\mathbf{1}_K \in \mathbb{R}\mathbf{1}_K$. $\square$

2　Sierpiński gasket 上の標準 Laplacian の解析

本節では，まず定義 1.26 で定めた ν-Laplacian Δ_ν に付随する熱方程式

$$\frac{\partial}{\partial t}u(t,x) = \Delta_\nu u(t,x), \qquad (t,x) \in (0,\infty) \times K \tag{2.1}$$

の初期値問題の解の積分表示を与える積分核（熱核）$p_t^\nu(x,y)$ が，定理 1.27 により与えられる Δ_ν の固有値・固有関数の列を用いて構成できることを小節 2.1 で手短に紹介する．続いて小節 2.2, 2.3 では最も標準的な場合である，$\mu(w) := 3^{-|w|}$ で与えられる $(K, S, \{F_j\}_{j\in S})$ 上の前測度 $\mu\colon W_* \to (0,\infty)$ を通して定まる μ-Laplacian Δ_μ（これを Sierpiński gasket K 上の**標準 Laplacian** と呼ぶ）の場合を取り上げ，熱核 $p_t^\mu(x,y)$ や Δ_μ の固有値・固有関数の性質について知られている性質を紹介する．

本節を通して，1 節において導入された記号・定義はそのまま用いることとし，以下ではそのことをいちいち断らない．

2.1　熱核の構成

ν を $(K, S, \{F_j\}_{j\in S})$ 上の前測度とする．このとき Δ_ν に付随する熱方程式 (2.1) の解を解析する上でまず最初に行うべきは，与えられた初期値 $f \in \mathcal{C}(K)$ を持つ解の存在と一意性を証明し，さらにその解のなるべく扱い易い表示を得ることであろう．実はこれは定理 1.27 により与えられる Δ_ν のスペクトル分解を応用することにより達成することができる．実際，$\{\lambda_n^\nu\}_{n=1}^\infty \subset [0,\infty)$ と $\{\varphi_n^\nu\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{D}[\Delta_\nu]$ を定理 1.27 の通りとすると，

$$p_t^\nu(x,y) := \sum_{n=1}^\infty e^{-\lambda_n^\nu t}\varphi_n^\nu(x)\varphi_n^\nu(y), \qquad (t,x,y) \in (0,\infty) \times K \times K \tag{2.2}$$

の右辺の関数項級数は任意の $T \in (0,\infty)$ に対し $[T,\infty) \times K \times K$ 上で一様に絶対収束する，すなわち

$$\lim_{N\to\infty} \sup_{(t,x,y)\in[T,\infty)\times K\times K} \sum_{n=N}^\infty \left| e^{-\lambda_n^\nu t}\varphi_n^\nu(x)\varphi_n^\nu(y)\right| = 0 \tag{2.3}$$

を満たすことが証明でき，従って (2.2) により連続関数 $p^\nu = p_t^\nu(x,y)\colon (0,\infty) \times K \times K \to \mathbb{R}$ が定まる．この $p_t^\nu(x,y)$ は，各 $f \in \mathcal{C}(K)$ に対し

$$u_f(t,x) := \int_K p_t^\nu(x,\cdot) f\, d\nu, \qquad (t,x) \in (0,\infty) \times K \tag{2.4}$$

で定義される $u_f\colon (0,\infty) \times K \to \mathbb{R}$ が $\lim_{t\downarrow 0} \|u_f(t,\cdot) - f\|_{\sup} = 0$ を満たす (2.1) の解であるような唯 1 つの $(0,\infty) \times K \times K$ 上の連続関数であることがさらに証明でき，従って $p_t^\nu(x,y)$ は熱方程式 (2.1) の初期値問題の解の積分表示を与える積分核になっている．こ

の事実に基づき，関数 $p^\nu = p_t^\nu(x,y)$ を ν-Laplacian Δ_ν に対応する**熱核** (heat kernel) と呼ぶ．またこのとき，$(\mathcal{E},\mathcal{F})$ の Markov 性（定理 1.24-(DF2)）は熱方程式 (2.1) の初期値問題の解 u_f に対する最大値の原理の一種である次の性質

$$\text{「} f \text{ が } [0,1]\text{-値ならば } u_f \text{ も } [0,1]\text{-値である」} \tag{2.5}$$

を $p_t^\nu(x,y)$ が満たすことに対応しており，このことから $p_t^\nu(x,y)$ は $[0,\infty)$-値かつ任意の $(t,x)\in(0,\infty)\times K$ に対し $\int_K p_t^\nu(x,\cdot)\,d\nu \leq 1$ であることが従う．実際にはより強く，K の弧状連結性から $p_t^\nu(x,y)$ は $(0,\infty)$-値であることが，$\mathbf{1}_K \in \mathcal{F}$ かつ $\mathcal{E}(\mathbf{1}_K,\mathbf{1}_K)=0$ であることから任意の $(t,x)\in(0,\infty)\times K$ に対し $\int_K p_t^\nu(x,\cdot)\,d\nu = 1$ であることが導かれる．

以上の結果について，詳細は例えば [40, Chapter 10] および [39, Appendix A] を参照のこと．また前測度 ν が自己相似である，すなわち任意の $w,v\in W_*$ に対し $\nu(wv)=\nu(w)\nu(v)$ を満たす場合に対しては，[37, Sections 5.1 and 5.2] にも同様の結果が（[40, Chapter 10] とは異なる手法による）証明とともに与えられているので併せて参照のこと．

2.2 標準 Laplacian に対応する熱核の劣 Gauss 型評価

*16定義 1.26 で定めた ν-Laplacian Δ_ν および (2.2) で与えられる対応する熱核 $p_t^\nu(x,y)$ については，特に本節の冒頭で導入した K 上の標準 Laplacian, すなわち $\mu(w) := 3^{-|w|}$ で定義される $(K,S,\{F_j\}_{j\in S})$ 上の前測度 $\mu\colon W_*\to(0,\infty)$ を通して定まる μ-Laplacian Δ_μ の場合に非常に詳しい解析がなされており，多くの結果が知られている．その中でも特に重要なのが，標準 Laplacian に対応する熱核 $p_t^\mu(x,y)$ に対する次の不等式評価である．

定理 2.1 (Barlow–Perkins [6])**.** $d_\mathrm{f} := \log_2 3$, $d_\mathrm{w} := \log_2 5$ とおくと，$c_1,c_2,c_3,c_4\in(0,\infty)$ が存在して任意の $(t,x,y)\in(0,1]\times K\times K$ に対し

$$\frac{c_1}{t^{d_\mathrm{f}/d_\mathrm{w}}}\exp\biggl(-\Bigl(\frac{|x-y|^{d_\mathrm{w}}}{c_2 t}\Bigr)^{\frac{1}{d_\mathrm{w}-1}}\biggr) \leq p_t^\mu(x,y) \leq \frac{c_3}{t^{d_\mathrm{f}/d_\mathrm{w}}}\exp\biggl(-\Bigl(\frac{|x-y|^{d_\mathrm{w}}}{c_4 t}\Bigr)^{\frac{1}{d_\mathrm{w}-1}}\biggr). \tag{2.6}$$

d_f は K のいわゆるフラクタル次元であり，K 内の球 $B(x,r) := \{y\in K \mid |x-y|<r\}$ の測度 $\tilde{\mu}(B(x,r))$*17 と r^{d_f} との比が $(x,r)\in K\times(0,1]$ に関して一様に上下から正定数で抑えられる*18，という形で距離球の体積増大度と関係している．また (2.6) の評価における指数関数の部分は平たく言って「熱は時間 t の間に距離 t^{1/d_w} の程度まで拡散する」ということを言っており，この意味で d_w は熱拡散の速さのオーダーを与える指数でありこれを Sierpiński gasket（上の標準 Laplacian Δ_μ）の**ウォーク次元** (walk dimension) という．

---

*16 本小節から 4 節までの記述は [26, 小節 2.2–2.3, 3–4 節] を加筆修正したものである．

*17 $\tilde{\mu}$ は，任意の $w\in W_*$ に対し $\tilde{\mu}(K_w)=\mu(w)(=3^{-|w|})$ を満たす唯 1 つの K 上の Borel 測度を表す；脚注*10 も参照のこと．

*18 従って (2.6) は $t^{d_\mathrm{f}/d_\mathrm{w}}$ を $\tilde{\mu}\bigl(B(x,t^{1/d_\mathrm{w}})\bigr)$ で置き換えても同値な評価になる．

ここで $\boldsymbol{d_{\mathrm{w}} > 2}$ であるという事実が非常に重要である．比較のために $\mathbb{R}^d$ 上の Laplacian (0.3) を考えると，この場合には（連続な）熱核が Gauss 核

$$p_t^{\mathbb{R}^d}(x,y) = \frac{1}{(4\pi t)^{d/2}} \exp\biggl(-\frac{|x-y|^2}{4t}\biggr) \tag{2.7}$$

で与えられることはよく知られており[*19]，特に $\mathbb{R}^d$ のウォーク次元は 2 である．従って (2.6) が 2 より真に大きい d_{w} の下で成り立つことは「Sierpiński gasket における熱の拡散は $\mathbb{R}^d$ における熱の拡散よりも（長時間挙動では）真に遅い」ことを意味し，この性質を $\nu = \mu$ に対する熱方程式 (2.1) の**劣拡散性** (sub-diffusivity), (2.6) を熱核 $p_t^\mu(x,y)$ の**劣 Gauss 型評価** (sub-Gaussian estimate) という．

$\mathbb{R}^d$ 上の（楕円型）偏微分作用素や Riemann 多様体上のラプラシアンなどに対する熱核評価の研究はフラクタル上の解析学よりもはるかに長い歴史を持つが，定理 2.1 は当該分野の研究者にとって極めて示唆的であり，現在まで続くフラクタル的状況を含む枠組みでの熱核評価の研究を触発した．拙著で恐縮であるが [15, Section 1] および [29, Subsection 4.1] に近年までの劣 Gauss 型熱核評価に関する主要論文が挙げられており，また [27] にも関連研究の要約が与えられているので，興味のある方は参照していただければと思う．

2.3　標準 Laplacian の固有値・固有関数の性質と熱核の漸近挙動

定理 1.27 で述べたように，K 上の Laplacian Δ_ν は固有関数からなる完全正規直交系 $\{\varphi_n^\nu\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{D}[\Delta_\nu]$ により「対角化」（スペクトル分解）され，$\{\varphi_n^\nu\}_{n=1}^\infty$ および対応する Δ_ν の固有値の列 $\{\lambda_n^\nu\}_{n=1}^\infty \subset [0,\infty)$ を用いて (2.2) により連続な熱核 $p^\nu = p_t^\nu(x,y)$ が構成できるなど，Δ_ν の固有値・固有関数は熱方程式 (2.1) の解を調べる上で極めて基本的な対象である．Δ_ν の固有値・固有関数について詳しく知ることは熱核 $p_t^\nu(x,y)$ の，ひいては熱方程式 (2.1) の解の詳細な性質の解明にも繋がり得るため，Δ_ν の固有値・固有関数はそれ自身重要な研究対象であり，特に K 上の標準 Laplacian Δ_μ（$\nu = \mu$）の場合に自己相似フラクタルに特有の興味深い現象が多数知られている．次の定理はその中でも代表的なものである．

定理 2.2. (1) (木上–Lapidus [41]) 右連続な $\log 5$-周期関数 $G\colon \mathbb{R} \to (0,\infty)$ が存在して，$0 < \inf_{s\in\mathbb{R}} G(s) \le \sup_{s\in\mathbb{R}} G(s) < \infty$ であり，かつ $\lambda \to \infty$ のとき[*20]

$$\#\{n \in \mathbb{N} \mid \lambda_n^\mu \le \lambda\} = \lambda^{d_{\mathrm{f}}/d_{\mathrm{w}}} G(\log\lambda) + O(1). \tag{2.8}$$

(2) (福島–島 [12], Barlow–木上 [5]) (1) の周期関数 G は不連続（特に非定数）である．

[*19] Fourier 変換を用いれば比較的容易に証明できる．
[*20] 正確には，(2.8) の右辺の剰余項の評価 $O(1)$ は木上 [36] による．

定理 2.2 は，$\mathbb{R}^d$ の体積有限な開集合 U 上の（適切な境界条件下での）Laplacian の固有値 $\{\lambda_n^U\}_{n=1}^{\infty}$ に対するよく知られた **Weyl の漸近公式**[*21]

$$\lim_{\lambda\to\infty}\frac{\#\{n\in\mathbb{N}\mid\lambda_n^U\le\lambda\}}{\lambda^{d/2}}=\frac{\mathcal{B}_d}{(2\pi)^d}\mathrm{vol}_d(U) \tag{2.9}$$

とは次の 2 つの点で大きく異なっている：

(i) λ 以下の固有値の個数 $\#\{n\in\mathbb{N}\mid\lambda_n^\mu\le\lambda\}$ の増大度のオーダー $d_\mathrm{f}/d_\mathrm{w}$ は $d_\mathrm{f}/2$ より真に小さい.

(ii) 極限値 $\lim_{\lambda\to\infty}\#\{n\in\mathbb{N}\mid\lambda_n^\mu\le\lambda\}/\lambda^{d_\mathrm{f}/d_\mathrm{w}}$ は存在しない.

(2.8) と (2.9) との比較から，$d_\mathrm{s}:=2d_\mathrm{f}/d_\mathrm{w}$ は「固有値の増大度を通して見た Sierpiński gasket の次元」と解釈でき，これを Sierpiński gasket（上の標準 Laplacian Δ_μ）の**スペクトル次元** (spectral dimension) という．$d_\mathrm{w}>2$ と同値な不等式 $\boldsymbol{d_\mathrm{s}<d_\mathrm{f}}$ は，Sierpiński gasket 上の熱方程式の劣拡散性の表れの 1 つといえる.

定理 2.2-(1) は本質的には Sierpiński gasket $K,(\mathcal{E},\mathcal{F}),\mu$ の自己相似性の帰結であり，有限分岐性を併せて用いることで，一般に有限分岐的自己相似フラクタル上の Laplacian に対して同様の主張が（かなり非自明なアイデアが必要だが）比較的平易な方法で証明できる．定理 2.2-(2) は，一般に有限分岐的自己相似フラクタルが「強い Euclid 幾何的対称性」（例として Sierpiński gasket の場合なら正 3 角形の対称性）を有するとき，任意の空でない開集合に対しその中に台を持つ Laplacian の固有関数が存在することが示せ，その系として Laplacian の固有値 λ でその重複度が $\lambda^{d_\mathrm{f}/d_\mathrm{w}}$ 程度のものが無限個存在することから従う．詳細は [37, Chapter 4] を参照されたい.

なお，上記 (ii) と同様の振動現象は熱核 $p_t^\mu(x,y)$ の漸近挙動にも見られることが知られている．具体的には次の定理が成り立つ.

定理 2.3. (1) (熊谷 [42][*22]) $x\neq y$ を満たすどの $x,y\in K$ に対しても，極限値 $\lim_{t\downarrow 0}t^{\frac{1}{d_\mathrm{w}-1}}\log p_t^\mu(x,y)$ は存在しない.

(2) (梶野 [21]) どの $x\in K$ に対しても，極限値 $\lim_{t\downarrow 0}t^{d_\mathrm{f}/d_\mathrm{w}}p_t^\mu(x,x)$ は存在しない.

定理 2.3-(1) の熊谷 [42] による証明は，熱核 $p_t^\mu(x,y)$ を推移確率密度関数に持つ確率過程（Sierpiński gasket 上の Brown 運動）の構造の詳細な記述を利用した具体的計算に基づくものである．この手法は Sierpiński gasket に類似の自己相似構造を有するフラクタルには適用できる（実際 [54] でそのような研究がなされている）もののそれ以上の一般化は困難であり，定理 2.3-(1) と同種の熱核の振動現象を証明した研究は筆者の知る限り [42, 54] だけである．定理 2.3-(2) の証明は

---

*21 vol_d は $\mathbb{R}^d$ 上の Lebesgue 測度（通常の d 次元体積）を表す．また $\mathcal{B}_d:=\mathrm{vol}_d\bigl(\{x\in\mathbb{R}^d\mid |x|<1\}\bigr)$.

*22 熊谷 [42] はより詳しく，$t^{\frac{1}{d_\mathrm{w}-1}}\log p_t^\mu(x,y)$ が $t\downarrow 0$ のとき定理 2.2 に類似の非自明な周期的漸近挙動を示すことまで証明している.

(I)　ほとんど全ての $x \in K$ に対する極限値 $\lim_{t\downarrow 0} t^{d_{\mathrm{f}}/d_{\mathrm{w}}} p_t^{\mu}(x,x)$ の非存在の証明

(II)　Sierpiński gasket の特殊性の利用による極限値の非存在の任意の $x \in K$ への拡張

という 2 段階に分けられ，このうち (II) はごく一部の自己相似フラクタルの具体例に対してしか通用しない議論であるため，定理 2.3-(2) もそのような具体例に対してしか証明できていない．これに対し「ほとんど全ての $x \in K$」だけに対する主張である (I) は，定理 2.2-(2) の証明にも現れた「Laplacian の固有関数 φ_n^{μ} で台が小さく対応する固有値 λ_n^{μ} の重複度が $(\lambda_n^{\mu})^{d_{\mathrm{f}}/d_{\mathrm{w}}}$ 程度のもの」がその台上の多くの点において $(\lambda_n^{\mu})^{d_{\mathrm{f}}/(2d_{\mathrm{w}})}$ 程度の絶対値を取ることを (2.2) と組み合わせることで証明され，この議論は定理 2.2-(2) と同じく「強い Euclid 幾何的対称性」を有する有限分岐的自己相似フラクタルに対して通用する．詳細は筆者による原論文 [21] を参照のこと．

3　Sierpiński carpet の場合

次に Sierpiński carpet（図 0.1 右，以下 SC で表す）上の Laplacian と熱方程式について簡単に紹介する．まず SC が**無限分岐的** (infinitely ramified) であることに注意しよう．実際，SC は縮尺 $\frac{1}{3}$ 倍のコピー 8 個に自然に分割されるが，隣接するコピー同士は正方形の 1 辺を共有しておりこれは無限集合である[*23]．SC は最も基本的な無限分岐的自己相似フラクタルとして，フラクタル上の解析学の最初期から現在に至るまで重要な研究対象であり続けてきた．以下に述べるように，SC 上の Dirichlet 形式・Laplacian は構成も解析も非常に難しい．

素朴に考えると，SC においても Sierpiński gasket の場合と同様に，有限グラフ近似列を取りその上の Dirichlet 形式の列の極限を取ることで Dirichlet 形式を構成することはできそうに思えるかもしれない．しかしここで SC の無限分岐性が邪魔をする．Sierpiński gasket において Dirichlet 形式を構成するための鍵は命題 1.3 であったが，その証明には V_{m+1} が V_m の縮小コピー 3 つからなるという意味で $\{V_m\}_{m=0}^{\infty}$ が自己相似的であること，および「縮小コピー同士が V_1 の点しか共有しないため 3 つの縮小コピーを 1 つずつ個別に考えればよい」ということが効いている．つまり命題 1.3 と同様の議論を行うためには「縮小コピー同士の共有点を全て網羅するような，自己相似的な有限グラフ近似列を取る」必要があり，これは SC の無限分岐性の下では不可能である．

従って SC においては，近似グラフ上の Dirichlet 形式の列について命題 1.3 のような「単調性」は期待できず，(1.9) の右辺の 5/3 に相当するスケール因子の存在，そのスケール因子の下で近似列が収束すること，および極限が非退化な Dirichlet 形式であることを不等式評価をひたすら頑張ることで証明しなくてはならない．そしてこれが極めて難し

[*23] Sierpiński gasket と SC は “Sierpiński ∼” という名称の類似性からしばしば混同され，違いがあまりよく認識されていないように思う．前者は有限分岐的，後者は無限分岐的であり，この差異は解析学を展開する上では極めて重大である．

い．Barlow–Bass [1, 3] および楠岡–Zhou [48] による近似列の部分列極限の存在と非退化性の証明，Barlow–Bass [2, 3] による部分列極限として得られた Dirichlet 形式に対する (2.6) と同様の劣 Gauss 型熱核評価など，中間的な結果は多数得られていた．しかし近似列全体の収束性や，極限で得られる Dirichlet 形式が近似の方法に依らず一意的に定まるか，などといった根本的な問題は，最終的に Barlow–Bass–熊谷–Teplyaev [4] により肯定的に解決されるまで実に 20 年もの年月を要した．

上記のように，SC 上の Dirichlet 形式は近似列からの複雑な極限移行の結果として得られるものに過ぎないため，直接計算することが不可能でありその解析も難しい．例えば対応する SC 上の Laplacian の固有値 $\{\lambda_n^{\mathrm{SC}}\}_{n=1}^{\infty}$ について，定理 2.2 と同様にある周期関数 $G_{\mathrm{SC}}\colon \mathbb{R} \to (0,\infty)$ が存在して $\lambda \to \infty$ のとき

$$\#\{n \in \mathbb{N} \mid \lambda_n^{\mathrm{SC}} \leq \lambda\} = \lambda^{d_{\mathrm{f}}^{\mathrm{SC}}/d_{\mathrm{w}}^{\mathrm{SC}}}\bigl(G_{\mathrm{SC}}(\log\lambda) + o(1)\bigr) \tag{3.1}$$

（ただし $d_{\mathrm{f}}^{\mathrm{SC}} := \log_3 8$ は SC のフラクタル次元を，$d_{\mathrm{w}}^{\mathrm{SC}}$ は SC のウォーク次元を表す）が成り立ちさらに G_{SC} は非定数である，と予想するのは自然である．しかしながら固有値・固有関数の性質を関数解析的に調べる手段に乏しいことが大きな障害になっており，(3.1) を満たす周期関数 G_{SC} の存在すら未だに証明されていない．定理 2.3-(1) についても，SC への拡張の見通しは現時点では全く立っていない．定理 2.3-(2) については，元の主張を少し弱めた前節 (I) の形の主張は [21] とは全く別の（劣 Gauss 型評価 (2.6) と空間の自己相似性を最大限利用した）手法により拙著 [24] において証明されているが，これを任意の $x \in \mathrm{SC}$ に対する極限値 $\lim_{t\downarrow 0} t^{d_{\mathrm{f}}^{\mathrm{SC}}/d_{\mathrm{w}}^{\mathrm{SC}}} p_t^{\mathrm{SC}}(x,x)$ の非存在に強められるかどうかはやはり分かっていない（ここで $p^{\mathrm{SC}} = p_t^{\mathrm{SC}}(x,y)$ は SC 上の Laplacian に対応する熱核を表す）．SC 上の Dirichlet 形式に関する既知の結果は大半が劣 Gauss 型熱核評価とその応用の域を出ないと言っても過言ではなく[*24]，興味深い未解決問題が他にも数多く残されている．今後の研究の進展に期待する．

4　調和 Sierpiński gasket

ここまでで，Sierpiński gasket や SC（をはじめとする広い範疇の自己相似フラクタル）においては自然な Laplacian が定義され，熱方程式の劣拡散性（定理 2.1）や固有値漸近挙動における振動（定理 2.2），熱核の短時間漸近挙動における振動（定理 2.3）など，Euclid 空間（や Riemann 多様体）の場合とは異質の現象が見られるということを説明した．しかし実はフラクタルにおいても，（ある意味ではやはり自然な）**別の** Laplacian を考えることで Riemann 多様体の場合に類似の解析学が展開できる，ということがここ 15 年程の研究で明らかになりつつある．ここでは最も研究の進んでいる Sierpiński gasket K の場合を

[*24] 日野正訓氏（京都大学理学研究科教授）による一連の研究 [16, 18, 19] はその数少ない例外である．[18, 19] の前提となる研究として [17] も参照のこと．

例に取り，知られている事実を紹介する．

K 上には $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}(K)$ を定義域とする標準 Dirichlet 形式 $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ が (1.35) と (1.36) により定義されていたことを思い出そう．基本的なアイデアは，$\mathcal{F}$ に属する関数を座標関数として用いることで K を「滑らかな形に」埋め込み直し，そうして得られる幾何構造に基づいて解析学を展開する，というものである．具体的には，後の解析のし易さを考慮して座標関数としては定理 1.15 において定義された線型写像 $H_0 \colon \mathbb{R}^{V_0} \to \mathcal{F}$ の像に属する関数 $h_1, h_2 \in H_0(\mathbb{R}^{V_0})$ を取り，$\Phi(x) := (h_1(x), h_2(x))$ で定義される連続写像 $\Phi \colon K \to \mathbb{R}^2$ による K の像 $K_\Phi := \Phi(K)$ を考える．定理 1.15 により H_0 は任意の $u \in \mathbb{R}^{V_0}$ に対し $H_0(u)|_{V_0} = u$ を満たす線型写像であることと (1.47) により，K_Φ の具体的な形にはちょうど affine 変換の分だけの自由度があることになるが，$\Phi(V_0)$ が正 3 角形の 3 頂点を成すように h_1, h_2 を選ぶと K_Φ は図 4.1 のようになり，これを**調和 Sierpiński gasket** という．Φ は単射，従って K と K_Φ の間の同相写像を与えることが命題 1.3 の (1.11) を用いた Φ の値の直接計算により従うことが木上 [33] の結果により知られており，そこで以下 Φ を通して K と K_Φ を同一視する．K_Φ 上には自然な距離関数として，2 点を結ぶ最短曲線の長さにより定まる測地距離 ρ_Φ を導入しておく．

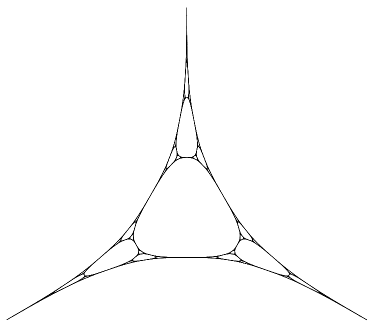


図 4.1　調和 Sierpiński gasket

K_Φ 上には既に Dirichlet 形式 $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ が（Φ による同一視を経由して）定まっているので，(0.5) および定義 1.26 を思い出すと，K_Φ 上に自然な Laplacian を定義するためには「内積を規定するための測度としてどの測度が自然か」という問いに答えればよい．ここで K_Φ の幾何構造が埋め込み Φ により与えられていることを考慮すると，「埋め込み Φ のエネルギー "$|\nabla\Phi|^2\,dx$"」に相当する量を測度として定義することができるのであれば，それを K_Φ 上の「自然な測度」の候補とするのは，少なくとも不自然ではなさそうである．Dirichlet 形式 $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ に関する**エネルギー測度** (energy measure) の概念を用いるとそのような測度 $\tilde{\mu}_\Phi$ を実際に定義することができる[25]．具体的には，$\mu_\Phi \colon W_* \to [0, \infty)$ を

$$\mu_\Phi(w) := \left(\frac{5}{3}\right)^{|w|} \mathcal{E}(h_1 \circ F_w, h_1 \circ F_w) + \left(\frac{5}{3}\right)^{|w|} \mathcal{E}(h_2 \circ F_w, h_2 \circ F_w) \tag{4.1}$$

[25] 楠岡 [47] が導入したことに因み，$\tilde{\mu}_\Phi$ を**楠岡測度**と呼ぶ．

で定義すると，命題 1.9（の (1.38)）により μ_Φ は定義 1.21-(PM1) を満たし，さらに命題 1.3 の (1.11) を用いた多少の計算[*26]により μ_Φ は $(0,\infty)$-値で定義 1.21-(PM2) を満たすことも容易に確認できる．よって μ_Φ は $(K,S,\{F_j\}_{j\in S})$ 上の前測度であるので，脚注*10 により任意の $w \in W_*$ に対し $\tilde{\mu}_\Phi(K_w) = \mu_\Phi(w)$ を満たす K 上の Borel 測度 $\tilde{\mu}_\Phi$ が唯 1 つ存在することになり，これが K_Φ 上の「自然な測度」の候補になる．そして定義 1.26 により定まる μ_Φ に対応する Laplacian Δ_{μ_Φ} を考えると，Riemann 多様体の場合に類似の様々な性質，例えば木上 [38] による熱核 $p_t^{\mu_\Phi}(x,y)$ の **Gauss 型**評価

$$\begin{aligned}\frac{c_5}{\tilde{\mu}_\Phi\bigl(B_{\rho_\Phi}(x,t^{1/2})\bigr)}\exp\biggl(-\frac{\rho_\Phi(x,y)^2}{c_6 t}\biggr) &\leq p_t^{\mu_\Phi}(x,y)\\ &\leq \frac{c_7}{\tilde{\mu}_\Phi\bigl(B_{\rho_\Phi}(x,t^{1/2})\bigr)}\exp\biggl(-\frac{\rho_\Phi(x,y)^2}{c_8 t}\biggr)\end{aligned} \tag{4.2}$$

（ただし $B_{\rho_\Phi}(x,r) := \{y \in K \mid \rho_\Phi(x,y) < r\}$）や，筆者 [22] による熱核 $p_t^{\mu_\Phi}(x,y)$ の詳細な短時間漸近挙動などが成り立つことが知られている．K_Φ 上の解析学の詳細や関連する話題については拙著 [23] とその参考文献を見られたい．

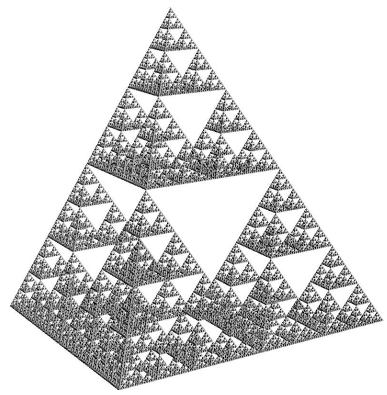


図 4.2　3 次元 Sierpiński gasket

本節で述べたような「フラクタルにおける Riemann 多様体的な解析学」が他のフラクタルにおいてどの程度展開できるかを考えることは自然な問題であり，筆者の現在の主要な研究テーマの 1 つである．最近の進展として，筆者は Murugan 氏との共同研究 [29, Subsubsection 6.3.2] において，$d \geq 3$ に対する d 次元 Sierpiński gasket（図 4.2 参照）の場合に本節で述べたのと同様の方法により調和 d 次元 Sierpiński gasket とその上の自然な Laplacian を定めると，対応する熱核は距離関数 ρ_Φ をどのように取っても Gauss 型評

[*26] 命題 1.14 中の $H_{m,n}$ の定義と定理 1.15 により任意の $m \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ に対し $H_0 = H_m \circ H_{0,m}$ であり，これと命題 1.16 により任意の $w = w_1 \dots w_m \in W_*$ に対し $F_w^*(h) := h \circ F_w$ により線型写像 $F_w^*\colon H_0(\mathbb{R}^{V_0}) \to H_0(\mathbb{R}^{V_0})$ が定まり $F_w^* = F_{w_m}^* \circ \cdots \circ F_{w_1}^*$ を満たすことに注意しよう．命題 1.3 の (1.11) を用いた簡単な計算により各 $j \in S$ に対する F_j^* の表現行列 A_j を具体的に書き下すことができるので，(4.1) の右辺の値も行列 $A_w := A_{w_m} \cdots A_{w_1}$（ただし $w = w_1 \dots w_m$）の言葉で記述することができ，それを基に (4.1) の右辺の挙動を詳しく調べることができる．

価 (4.2) を**満たさない**ことを証明した．この結果からも見て取れるように，調和 d 次元 Sierpiński gasket に対する「Riemann 多様体的な解析学」では 2 次元 Sierpiński gasket の場合に成立していた有用な性質の多くが不成立であり，対応する熱核は既知の一般論の応用だけでは捕捉困難な極めて複雑な挙動を示すものと推測される．さらに現在進行中の Murugan 氏との共同研究では，Sierpiński carpet（図 0.1 右）に対する「Riemann 多様体的な解析学」についても 2 次元 Sierpiński gasket の場合のような性質の良さはやはり期待できないことが明らかになりつつある．Sierpiński carpet では調和関数の値を直接計算できないせいで調和関数の挙動の解析が極めて難しく，豊かな「Riemann 多様体的な解析学」を展開できるかどうか，また展開できたとしてその性質をどこまで明らかにできるかは全く未知数であるが，今後の研究の進展に期待したい．

付録 A　固有ベクトルからなる完全正規直交系の存在定理

付録として，本節では $\mathcal{F}$ を定義域とする非負定値対称双線型形式 $\mathcal{E}$（に対応する Laplacian）の固有ベクトル（固有関数）からなる完全正規直交系の存在に関するよく知られた定理を，必要な予備知識を最小限に抑えた形で定式化したもの（定理 A.2）を紹介する．読者の参考に供するため完全な証明を与えるが，以下は非負自己共役作用素の関数解析における標準的な議論である．

まず，非負定値対称双線型形式 $\mathcal{E}$ が満たす次の基本的な不等式を思い出しておく．

補題 A.1. $\mathcal{F}$ を $\mathbb{R}$ 上の線型空間とし，$\mathcal{E}\colon \mathcal{F}\times\mathcal{F}\to\mathbb{R}$ は双線型，対称，非負定値であるとする．このとき任意の $u,v\in\mathcal{F}$ に対し

$$\text{（Cauchy–Schwarz の不等式）}\qquad |\mathcal{E}(u,v)|\le\mathcal{E}(u,u)^{1/2}\mathcal{E}(v,v)^{1/2}, \tag{A.1}$$

$$\text{（3 角不等式）}\qquad \mathcal{E}(u+v)^{1/2}\le\mathcal{E}(u,u)^{1/2}+\mathcal{E}(v,v)^{1/2}. \tag{A.2}$$

証明. $u,v\in\mathcal{F}, t\in\mathbb{R}$ とする．$\mathcal{E}$ は双線型，対称，非負定値なので

$$0\le\mathcal{E}(u+tv,u+tv)=\mathcal{E}(u,u)+2t\mathcal{E}(u,v)+t^2\mathcal{E}(v,v). \tag{A.3}$$

$\mathcal{E}(v,v)=0$ のときは，(A.3) より任意の $t\in(0,\infty)$ に対し $|\mathcal{E}(u,v)|\le t^{-1}\mathcal{E}(u,u)$ であり，従って $\mathcal{E}(u,v)=0$ となり (A.1) が成り立つ．$\mathcal{E}(v,v)>0$ のときは，(A.3) で $t:=-\mathcal{E}(u,v)/\mathcal{E}(v,v)$ とおくことで $0\le\mathcal{E}(u,u)\mathcal{E}(v,v)-\mathcal{E}(u,v)^2$ となり (A.1) を得る．さらに (A.3) で $t=1$ として (A.1) を用いると

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(u+v,u+v)&=\mathcal{E}(u,u)+2\mathcal{E}(u,v)+\mathcal{E}(v,v)\le\mathcal{E}(u,u)+2|\mathcal{E}(u,v)|+\mathcal{E}(v,v)\\&\le\mathcal{E}(u,u)+2\mathcal{E}(u,u)^{1/2}\mathcal{E}(v,v)^{1/2}+\mathcal{E}(v,v)=\bigl(\mathcal{E}(u,u)^{1/2}\mathcal{E}(v,v)^{1/2}\bigr)^2\end{aligned}$$

となり (A.2) が得られる．□

次が本節の主定理である．

定理 A.2. $\mathcal{H}$ を内積 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ とノルム $\|\cdot\|$ を持つ $\mathbb{R}$ 上の無限次元内積空間, $\mathcal{F}$ を $\mathcal{H}$ の稠密な線型部分空間とし, $\mathcal{E}\colon \mathcal{F}\times\mathcal{F}\to\mathbb{R}$ は双線型, 対称, 非負定値, かつ内積 $\mathcal{E}_1 := \mathcal{E}+\langle\cdot,\cdot\rangle$ の下で $\mathcal{F}$ は完備（すなわち $(\mathcal{F},\mathcal{E}_1)$ は Hilbert 空間）であるとする．さらに包含写像 $\mathcal{F}\hookrightarrow\mathcal{H}$ は**コンパクト**，すなわち $\sup_{n\geq 1}\mathcal{E}_1(u_n,u_n)<\infty$ を満たす任意の $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathcal{F}$ に対し $u\in\mathcal{H}$ と狭義単調増加列 $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}\subset\mathbb{N}$ が存在して $\lim_{k\to\infty}\|u-u_{n_k}\|=0$ となるとする．このとき非負実数の非減少列 $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}\subset[0,\infty)$ と $\mathcal{F}$ の元の列 $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathcal{F}$ で次の (1), (2), (3) を満たすものが存在する：

(1)（φ_n は固有値 λ_n の固有ベクトル）任意の $n\in\mathbb{N}$ と任意の $v\in\mathcal{F}$ に対し

$$\mathcal{E}(\varphi_n,v)=\lambda_n\langle\varphi_n,v\rangle. \tag{A.4}$$

(2)（$\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ は $\mathcal{H}$ の正規直交系）任意の $n\in\mathbb{N}$ に対し $\|\varphi_n\|=1$, かつ $n\neq k$ を満たす任意の $n,k\in\mathbb{N}$ に対し $\langle\varphi_n,\varphi_k\rangle=0$.

(3)（$\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ は $\mathcal{H}$ において完全）$f\in\mathcal{H}$ が任意の $n\in\mathbb{N}$ に対し $\langle f,\varphi_n\rangle=0$ を満たすならば $f=0$.

さらに $\lim_{n\to\infty}\lambda_n=\infty$ である．

定理 A.2 の証明の核心は次の補題の証明である．

補題 A.3. $\mathcal{H}$ を内積 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ とノルム $\|\cdot\|$ を持つ $\mathbb{R}$ 上の内積空間で $\dim\mathcal{H}\geq 1$ を満たすもの，$\mathcal{F}$ を $\mathcal{H}$ の稠密な線型部分空間とし，$\mathcal{E}\colon\mathcal{F}\times\mathcal{F}\to\mathbb{R}$ は双線型，対称，非負定値，かつ内積 $\mathcal{E}_1 := \mathcal{E}+\langle\cdot,\cdot\rangle$ の下で $\mathcal{F}$ は完備（すなわち $(\mathcal{F},\mathcal{E}_1)$ は Hilbert 空間）であるとする．さらに包含写像 $\mathcal{F}\hookrightarrow\mathcal{H}$ はコンパクト，すなわち $\sup_{n\geq 1}\mathcal{E}_1(u_n,u_n)<\infty$ を満たす任意の $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathcal{F}$ に対し $u\in\mathcal{H}$ と狭義単調増加列 $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}\subset\mathbb{N}$ が存在して $\lim_{k\to\infty}\|u-u_{n_k}\|=0$ となるとする．このとき次が成り立つ：

(1) $\mathcal{F}\setminus\{0\}\neq\emptyset$ であり，$\lambda_1\in[0,\infty)$ を

$$\lambda_1 := \inf_{u\in\mathcal{F}\setminus\{0\}}\frac{\mathcal{E}(u,u)}{\|u\|^2} \tag{A.5}$$

で定義すると $\varphi_1\in\mathcal{F}$ が存在して $\|\varphi_1\|=1$ かつ $\mathcal{E}(\varphi_1,\varphi_1)=\lambda_1$.

(2) $\mathcal{E}(\varphi,\varphi)=\lambda_1\|\varphi\|^2$ を満たす任意の $\varphi\in\mathcal{F}$ と任意の $v\in\mathcal{F}$ に対し

$$\mathcal{E}(\varphi,v)=\lambda_1\langle\varphi,v\rangle. \tag{A.6}$$

証明. (1) まず $\dim\mathcal{H}\geq 1$ なので $\mathcal{H}$ は 0 とは異なる元 $f\in\mathcal{H}\setminus\{0\}$ を持ち，$\mathcal{F}$ は $\mathcal{H}$ において稠密なので $v\in\mathcal{F}$ が存在して $\|f-v\|<\|f\|$, 従って $\|v\|\geq\|f\|-\|f-v\|>0$ となるので，$v\in\mathcal{F}\setminus\{0\}$, 特に $\mathcal{F}\setminus\{0\}\neq\emptyset$ となり，よって $\lambda_1\in[0,\infty)$ が (A.5) により定義できることが分かる．すると各 $n\in\mathbb{N}$ に対し，(A.5) により $\widetilde{u}_n\in\mathcal{F}\setminus\{0\}$ が存在して

$$\mathcal{E}\bigl(\|\widetilde{u}_n\|^{-1}\widetilde{u}_n,\|\widetilde{u}_n\|^{-1}\widetilde{u}_n\bigr)=\frac{\mathcal{E}(\widetilde{u}_n,\widetilde{u}_n)}{\|\widetilde{u}_n\|^2}<\lambda_1+\frac{1}{n} \tag{A.7}$$

となり，$u_n := \|\widetilde{u}_n\|^{-1}\widetilde{u}_n$ とおくと $u_n \in \mathcal{F}$, $\|u_n\| = 1$, かつ (A.5) と (A.7) により

$$\lambda_1 \le \mathcal{E}(u_n, u_n) < \lambda_1 + \frac{1}{n}. \tag{A.8}$$

(A.8) より特に任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し $\mathcal{E}_1(u_n, u_n) = \mathcal{E}(u_n, u_n) + \|u_n\|^2 < \lambda_1 + n^{-1} + 1 \le \lambda_1 + 2$, 従って $\sup_{n\ge1} \mathcal{E}_1(u_n, u_n) \le \lambda_1 + 2 < \infty$ であるので，包含写像 $\mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{H}$ がコンパクトであるとの仮定により $\varphi_1 \in \mathcal{H}$ と狭義単調増加列 $\{n_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}$ が存在して $\lim_{k\to\infty} \|\varphi_1 - u_{n_k}\| = 0$ となる．特に（3 角不等式により $\big|\|\varphi_1\| - \|u_{n_k}\|\big| \le \|\varphi_1 - u_{n_k}\|$ なので）$\|\varphi_1\| = \lim_{k\to\infty} \|u_{n_k}\| = 1$ であり，また $k_0 \in \mathbb{N}$ を任意の $k \ge k_0$ に対し $\|\varphi_1 - u_{n_k}\| < 1$ を満たすように取れる．そこで任意の $k, l \ge k_0$ に対し，(A.5) により $\mathcal{E}(u_{n_k} + u_{n_l}, u_{n_k} + u_{n_l}) \ge \lambda_1 \|u_{n_k} + u_{n_l}\|^2$ であること，および 3 角不等式により $\|u_{n_k} + u_{n_l}\| \ge \|2\varphi_1\| - \|\varphi_1 - u_{n_k}\| - \|\varphi_1 - u_{n_l}\| = 2 - \|\varphi_1 - u_{n_k}\| - \|\varphi_1 - u_{n_l}\| > 0$ であることに注意すると，(A.8) と $\lim_{k\to\infty} \|\varphi_1 - u_{n_k}\| = 0$ により

$$\begin{aligned}
0 &\le \mathcal{E}(u_{n_k} - u_{n_l}, u_{n_k} - u_{n_l}) \\
&= 2\mathcal{E}(u_{n_k}, u_{n_k}) + 2\mathcal{E}(u_{n_l}, u_{n_l}) - \mathcal{E}(u_{n_k} + u_{n_l}, u_{n_k} + u_{n_l}) \\
&\le 2\Big(\lambda_1 + \frac{1}{n_k}\Big) + 2\Big(\lambda_1 + \frac{1}{n_l}\Big) - \lambda_1 \|u_{n_k} + u_{n_l}\|^2 \\
&\le 4\lambda_1 + \frac{2}{n_k} + \frac{2}{n_l} - \lambda_1\big(2 - \|\varphi_1 - u_{n_k}\| - \|\varphi_1 - u_{n_l}\|\big)^2 \\
&\xrightarrow{k\wedge l\to\infty} 4\lambda_1 + 0 + 0 - \lambda_1(2 - 0 - 0)^2 = 0.
\end{aligned} \tag{A.9}$$

また 3 角不等式と $\lim_{k\to\infty} \|\varphi_1 - u_{n_k}\| = 0$ により任意の $k, l \in \mathbb{N}$ に対し

$$0 \le \|u_{n_k} - u_{n_l}\| \le \|\varphi_1 - u_{n_k}\| + \|\varphi_1 - u_{n_l}\| \xrightarrow{k\wedge l\to\infty} 0. \tag{A.10}$$

よって (A.9) と (A.10) により $\lim_{k\wedge l\to\infty} \mathcal{E}_1(u_{n_k} - u_{n_l}, u_{n_k} - u_{n_l}) = 0$, すなわち $\{u_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ は Hilbert 空間 $(\mathcal{F}, \mathcal{E}_1)$ における Cauchy 列であるので，$u \in \mathcal{F}$ が存在して $\lim_{k\to\infty} \mathcal{E}_1(u - u_{n_k}, u - u_{n_k}) = 0$ となるが，このとき任意の $k \in \mathbb{N}$ に対し 3 角不等式により

$$0 \le \|\varphi_1 - u\| \le \|\varphi_1 - u_{n_k}\| + \|u_{n_k} - u\| \le \|\varphi_1 - u_{n_k}\| + \mathcal{E}_1(u - u_{n_k}, u - u_{n_k}) \xrightarrow{k\to\infty} 0,$$

従って $\|\varphi_1 - u\| = 0$ であるので，$\varphi_1 = u \in \mathcal{F}$ かつ $\lim_{k\to\infty} \mathcal{E}_1(\varphi_1 - u_{n_k}, \varphi_1 - u_{n_k}) = 0$ となる．（任意の $v \in \mathcal{F}$ に対し $0 \le \mathcal{E}(v, v) \le \mathcal{E}_1(v, v)$ であるので）特に $\lim_{k\to\infty} \mathcal{E}(\varphi_1 - u_{n_k}, \varphi_1 - u_{n_k}) = 0$ であり，ゆえに $\mathcal{F} \ni v \mapsto \mathcal{E}(v, v)^{1/2}$ に対する 3 角不等式（補題 A.1 の (A.2)）と (A.8) より $\mathcal{E}(\varphi_1, \varphi_1) = \lim_{k\to\infty} \mathcal{E}(u_{n_k}, u_{n_k}) = \lambda_1$.

(2) $\varphi \in \mathcal{F}$ は $\mathcal{E}(\varphi, \varphi) = \lambda_1 \|\varphi\|^2$ を満たすとし，$v \in \mathcal{F}$ とする．$\varphi = 0$ または $v = 0$ のときは (A.6) は明らかに（両辺とも 0 に等しく）成り立つので，$\varphi \ne 0 \ne v$ の仮定の下で (A.6) を示せばよい．$|t| < \|\varphi\|/\|v\|$ を満たす $t \in \mathbb{R}$ を任意に取るとき，3 角不等式

により $\|\varphi - tv\| \geq \|\varphi\| - |t|\|v\| > 0$, 従って $\varphi - tv \in \mathcal{F} \setminus \{0\}$ であることに注意すると (A.5) により

$$\frac{\mathcal{E}(\varphi,\varphi)}{\|\varphi\|^2} = \lambda_1 \leq \frac{\mathcal{E}(\varphi - tv, \varphi - tv)}{\|\varphi - tv\|^2} = \frac{\mathcal{E}(v,v)t^2 - 2\mathcal{E}(\varphi,v)t + \mathcal{E}(\varphi,\varphi)}{\|v\|^2 t^2 - 2\langle \varphi, v\rangle t + \|\varphi\|^2}. \tag{A.11}$$

(A.11) は，$\mathbb{R}$ の開区間 $\bigl(-\|\varphi\|/\|v\|, \|\varphi\|/\|v\|\bigr)$ 上で定義された微分可能な実数値関数 $t \mapsto \bigl(\mathcal{E}(v,v)t^2 - 2\mathcal{E}(\varphi,v)t + \mathcal{E}(\varphi,\varphi)\bigr)/\bigl(\|v\|^2t^2 - 2\langle\varphi,v\rangle t + \|\varphi\|^2\bigr)$ が $t = 0$ において最小値を取ることを意味しており，従ってその $t = 0$ における微分係数は 0, すなわち

$$0 = \frac{d}{dt}\frac{\mathcal{E}(v,v)t^2 - 2\mathcal{E}(\varphi,v)t + \mathcal{E}(\varphi,\varphi)}{\|v\|^2t^2 - 2\langle\varphi,v\rangle t + \|\varphi\|^2}\Bigg|_{t=0} = \frac{-2\mathcal{E}(\varphi,v)\|\varphi\|^2 + 2\mathcal{E}(\varphi,\varphi)\langle\varphi,v\rangle}{\|\varphi\|^4},$$

よって $\mathcal{E}(\varphi,v) = (\mathcal{E}(\varphi,\varphi)/\|\varphi\|^2)\langle\varphi,v\rangle = \lambda_1\langle\varphi,v\rangle$. □

定理 A.2 の証明. まず，(1) と (2) を満たす $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{F}$ が存在するような任意の $\{\lambda_n\}_{n=1}^\infty \subset [0,\infty)$ に対し $\lim_{n\to\infty}\lambda_n = \infty$ となることに注意する．実際，$\lambda_\infty := \liminf_{n\to\infty}\lambda_n < \infty$ と仮定すると，狭義単調増加列 $\{n(k)\}_{k=1}^\infty \subset \mathbb{N}$ が存在して $\sup_{k\geq 1}\lambda_{n(k)} \leq \lambda_\infty + 1$ となり，すると (1) と (2) により任意の $k \in \mathbb{N}$ に対し $\mathcal{E}_1(\varphi_{n(k)},\varphi_{n(k)}) = \lambda_{n(k)}\|\varphi_{n(k)}\|^2 + \|\varphi_{n(k)}\|^2 = \lambda_{n(k)} + 1 \leq \lambda_\infty + 2$, 従って $\sup_{k\geq 1}\mathcal{E}_1(\varphi_{n(k)},\varphi_{n(k)}) \leq \lambda_\infty + 2 < \infty$ であるので，包含写像 $\mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{H}$ がコンパクトであるとの仮定により $\varphi_\infty \in \mathcal{H}$ と狭義単調増加列 $\{k(l)\}_{l=1}^\infty \subset \mathbb{N}$ が存在して $\lim_{l\to\infty}\|\varphi_\infty - \varphi_{n(k(l))}\| = 0$ となる．ところがこのとき任意の $l \in \mathbb{N}$ に対し (2) と合わせて

$$\sqrt{2} = \|\varphi_{n(k(l))} - \varphi_{n(k(l+1))}\| \leq \|\varphi_{n(k(l))} - \varphi_\infty\| + \|\varphi_\infty - \varphi_{n(k(l+1))}\| \xrightarrow{l\to\infty} 0$$

となり矛盾するので，$\liminf_{n\to\infty}\lambda_n = \infty$, すなわち $\lim_{n\to\infty}\lambda_n = \infty$ が得られる．

さて，(1), (2), (3) を満たす非減少列 $\{\lambda_n\}_{n=1}^\infty \subset [0,\infty)$ と $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{F}$ の存在を示すために，$N \in \mathbb{N}$ とし，非負実数の非減少列 $\{\lambda_n\}_{n=1}^N$ と $\mathcal{F}$ の元の列 $\{\varphi_n\}_{n=1}^N \subset \mathcal{F}$ で (1), (2)（で $\mathbb{N}$ を $\{1,\ldots,N\}$ に置き換えたもの）および

$$\lambda_N = \inf\left\{\frac{\mathcal{E}(u,u)}{\|u\|^2} \;\middle|\; u \in \mathcal{F}\setminus\{0\}, \text{任意の } n \in \mathbb{N}\cap[0,N) \text{ に対し } \langle u,\varphi_n\rangle = 0\right\} \tag{A.12}$$

を満たすものが得られたとする（補題 A.3 により，これは $N = 1$ に対しては成り立つ；なお以下の議論から分かる通り，(A.12) 中の条件を満たす u は存在する）．このとき $\{\lambda_n\}_{n=1}^{N+1}$ と $\{\varphi_n\}_{n=1}^{N+1}$ が (1), (2)（で $\mathbb{N}$ を $\{1,\ldots,N+1\}$ に置き換えたもの）および (A.12) で N を $N+1$ に置き換えたものを満たすような $\lambda_{N+1} \in [\lambda_N,\infty)$ と $\varphi_{N+1} \in \mathcal{F}$ が存在することを，

$$\mathcal{H}_N := \{f \in \mathcal{H} \mid \text{任意の } n \in \{1,\ldots,N\} \text{ に対し } \langle f,\varphi_n\rangle = 0\}, \tag{A.13}$$

$$\mathcal{F}_N := \{u \in \mathcal{F} \mid \text{任意の } n \in \{1,\ldots,N\} \text{ に対し } \langle u,\varphi_n\rangle = 0\} = \mathcal{F}\cap\mathcal{H}_N \tag{A.14}$$

で定義される $\mathcal{H}_N, \mathcal{F}_N$ および $\mathcal{E}|_{\mathcal{F}_N\times\mathcal{F}_N}$ に対し補題 A.3 を適用することにより示そう．

まず $\mathcal{H}_N$ は（関数 $\mathcal{H} \ni f \mapsto \langle f, \varphi_n\rangle \in \mathbb{R}$ が連続線型写像であることから）$\mathcal{H}$ の閉線型部分空間であり，$\mathcal{H}$ の内積の $\mathcal{H}_N$ への制限を考えることにより $\mathcal{H}_N$ は $\mathbb{R}$ 上の内積空間となる．また $\{\varphi_n\}_{n=1}^N$ に対する (2) および $\{\varphi_n\}_{n=1}^N \subset \mathcal{F}$ より容易に確認できるように

$$\mathcal{H}_N = \left\{ f - \sum_{n=1}^N \langle f, \varphi_n\rangle\varphi_n \;\middle|\; f \in \mathcal{H} \right\}, \tag{A.15}$$

$$\mathcal{F}_N = \left\{ u - \sum_{n=1}^N \langle u, \varphi_n\rangle\varphi_n \;\middle|\; u \in \mathcal{F} \right\} \tag{A.16}$$

であり，そこで $\mathcal{H}_N$ が有限次元と仮定すると $\dim\mathcal{H} \le \dim\mathcal{H}_N + N < \infty$ となり $\mathcal{H}$ が無限次元であることに矛盾するので，$\mathcal{H}_N$ は無限次元である．次に $\mathcal{F}_N$ は明らかに $\mathcal{H}_N$ の線型部分空間であり，また任意の $f \in \mathcal{H}_N$ と任意の $\varepsilon \in (0,\infty)$ に対し，$\mathcal{F}$ が $\mathcal{H}$ において稠密であることから $u \in \mathcal{F}$ が存在して $\|f-u\| < \varepsilon$ となり，そこで $u_N := \sum_{n=1}^N \langle u, \varphi_n\rangle\varphi_n$ とおくと (A.15) と $\{\varphi_n\}_{n=1}^N \subset \mathcal{F}$ により $u - u_N \in \mathcal{F} \cap \mathcal{H}_N = \mathcal{F}_N$, これと $f \in \mathcal{H}_N$ により $\langle f - u + u_N, u_N\rangle = 0$ であるので

$$\varepsilon > \|f-u\| = \|f-u+u_N-u_N\| = \left(\|f-u+u_N\|^2 + \|u_N\|^2\right)^{1/2} \ge \|f-(u-u_N)\|, \tag{A.17}$$

ゆえに $\mathcal{F}_N$ は $\mathcal{H}_N$ において稠密である．そして $\mathcal{E}|_{\mathcal{F}_N\times\mathcal{F}_N} \colon \mathcal{F}_N \times \mathcal{F}_N \to \mathbb{R}$ は双線型，対称，非負定値であり，（関数 $\mathcal{F} \ni u \mapsto \langle u, \varphi_n\rangle \in \mathbb{R}$ は不等式 $|\langle u, \varphi_n\rangle| \le \|u\| \le \mathcal{E}_1(u,u)^{1/2}$ により連続なので）$\mathcal{F}_N$ は $(\mathcal{F}, \mathcal{E}_1)$ の閉線型部分空間，従って $\mathcal{E}|_{\mathcal{F}_N\times\mathcal{F}_N}$ が定める $\mathcal{F}_N$ 上の内積 $\mathcal{E}|_{\mathcal{F}_N\times\mathcal{F}_N} + \langle\cdot,\cdot\rangle = \mathcal{E}_1|_{\mathcal{F}_N\times\mathcal{F}_N}$ の下で $\mathcal{F}_N$ は完備になる．最後に包含写像 $\mathcal{F}_N \hookrightarrow \mathcal{H}_N$ がコンパクトであることは包含写像 $\mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{H}$ がコンパクトであることと $\mathcal{H}_N$ が $\mathcal{H}$ の閉集合であることから直ちに従う．

以上により $\mathcal{H}_N, \mathcal{F}_N, \mathcal{E}|_{\mathcal{F}_N\times\mathcal{F}_N}$ は補題 A.3 の仮定を全て満たすことが分かったので，補題 A.3 により次を得る：$\mathcal{F}_N \setminus \{0\} \neq \emptyset$ であり，$\lambda_{N+1} \in [0,\infty)$ を

$$\begin{aligned}\lambda_{N+1} &:= \inf_{u\in\mathcal{F}_N\setminus\{0\}} \frac{\mathcal{E}(u,u)}{\|u\|^2} \\ &= \inf\left\{ \frac{\mathcal{E}(u,u)}{\|u\|^2} \;\middle|\; u \in \mathcal{F}\setminus\{0\}, \text{任意の } n \in \mathbb{N}\cap[0,N+1) \text{ に対し } \langle u, \varphi_n\rangle = 0 \right\}\end{aligned} \tag{A.18}$$

で定めると，$\varphi_{N+1} \in \mathcal{F}_N$ が存在して $\|\varphi_{N+1}\| = 1$ かつ任意の $v \in \mathcal{F}_N$ に対し $\mathcal{E}(\varphi_{N+1}, v) = \lambda_{N+1}\langle\varphi_{N+1}, v\rangle$. すると (A.14) と合わせて $\{\varphi_n\}_{n=1}^{N+1} \subset \mathcal{F}$ は (2) を満たし，また (A.16) と $\{\varphi_n\}_{n=1}^N$ に対する (1) により任意の $v \in \mathcal{F}$ に対し

$$\mathcal{E}(\varphi_{N+1}, v) = \mathcal{E}\left(\varphi_{N+1}, v - \sum_{n=1}^N \langle v, \varphi_n\rangle\varphi_n\right) + \sum_{n=1}^N \langle v, \varphi_n\rangle\mathcal{E}(\varphi_n, \varphi_{N+1})$$

$$
\begin{aligned}
&= \lambda_{N+1}\left\langle \varphi_{N+1}, v - \sum_{n=1}^{N} \langle v, \varphi_n\rangle \varphi_n \right\rangle + \sum_{n=1}^{N} \langle v, \varphi_n\rangle \lambda_n \langle \varphi_n, \varphi_{N+1}\rangle \\
&= \lambda_{N+1}\langle \varphi_{N+1}, v\rangle,
\end{aligned}
$$

よって $\{\lambda_n\}_{n=1}^{N+1}, \{\varphi_n\}_{n=1}^{N+1}$ は (1) を満たす．さらに (A.12) と (A.18) により $\lambda_{N+1} \in [\lambda_N, \infty)$, 従って $\{\lambda_n\}_{n=1}^{N+1}$ は非減少列である．

ゆえに上記の結果により，非減少列 $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty} \subset [0,\infty)$ と $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{F}$ で (1) と (2) および任意の $N \in \mathbb{N}$ に対する (A.12) を満たすものを帰納的に構成することができる．するとこの（定理 A.2 の）証明の最初の段落により $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \infty$ であり，特に $N_0 \in \mathbb{N}$ を $\lambda_{N_0} > 0$ を満たすように取ることができる．最後に (3) を示すために*27，$f \in \mathcal{H}$ は任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し $\langle f, \varphi_n\rangle = 0$ を満たすとし，$\varepsilon \in (0,\infty)$ を任意に取る．このとき $\mathcal{F}$ が $\mathcal{H}$ において稠密であることから $u \in \mathcal{F}$ が存在して $\|f-u\| < \varepsilon$ となり，そこで $N \geq N_0$ を任意に取り $u_N := \sum_{n=1}^{N} \langle u, \varphi_n\rangle \varphi_n$ とおくと，$f \in \mathcal{H}_N$ なので (A.17) とその直前の議論により $u - u_N \in \mathcal{F}_N$ かつ (A.17) が成り立ち，また (1) と (2) により $\mathcal{E}(u-u_N, u_N) = 0$ であるので

$$
\begin{aligned}
\mathcal{E}(u,u) &= \mathcal{E}(u-u_N+u_N, u-u_N+u_N) = \mathcal{E}(u-u_N, u-u_N) + \mathcal{E}(u_N,u_N) \\
&\geq \mathcal{E}(u-u_N, u-u_N).
\end{aligned}
\tag{A.19}
$$

すると (A.17), $u-u_N \in \mathcal{F}_N$, (A.12), (A.19) と $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \infty$ により

$$
\begin{aligned}
0 \leq \|f\| \leq \|f-u+u_N\| + \|u-u_N\| &\leq \varepsilon + \left(\frac{\mathcal{E}(u-u_N, u-u_N)}{\lambda_{N+1}}\right)^{1/2} \\
&\leq \varepsilon + \left(\frac{\mathcal{E}(u,u)}{\lambda_{N+1}}\right)^{1/2} \xrightarrow{N\to\infty} \varepsilon,
\end{aligned}
$$

従って $0 \leq \|f\| \leq \varepsilon$ であるが，$\varepsilon \in (0,\infty)$ は任意であったので $\|f\| = 0$, すなわち $f = 0$ となり (3) を得る． □

定理 A.2 の帰結として，各 $u \in \mathcal{F}$ は Hilbert 空間 $(\mathcal{F}, \mathcal{E}_1)$ においてノルム収束する固有ベクトル展開を持つことが従う．すなわち次の定理が成り立つ．

定理 A.4. 定理 A.2 の状況を仮定し，$\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty} \subset [0,\infty)$ と $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{F}$ を定理 A.2 の通りとする．このとき任意の $u \in \mathcal{F}$ に対し

$$
\lim_{N\to\infty} \mathcal{E}_1\left(u - \sum_{n=1}^{N} \langle u, \varphi_n\rangle \varphi_n, u - \sum_{n=1}^{N} \langle u, \varphi_n\rangle \varphi_n\right) = 0, \tag{A.20}
$$

$$
\mathcal{E}(u,u) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle u, \varphi_n\rangle^2, \qquad \|u\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \langle u, \varphi_n\rangle^2. \tag{A.21}
$$

*27 公開講座実施時に配布したテキストでは，(3) の証明は $f \in \mathcal{F}$ に対してしか通用しないものになってしまっており不完全であった．参加者の方々にお詫びするとともに，以下に (3) の完全な証明を与える．

証明. $u \in \mathcal{F}$ とし，各 $N \in \mathbb{N}$ に対し $u_N := \sum_{n=1}^{N} \langle u, \varphi_n \rangle \varphi_n$ とおく．このとき任意の $N \in \mathbb{N}$ に対し定理 A.2-(1),(2) により，$\mathcal{E}_1(u - u_N, u_N) = 0$, 従って

$$
\begin{aligned}
\mathcal{E}_1(u,u) &= \mathcal{E}_1(u - u_N + u_N, u - u_N + u_N) = \mathcal{E}_1(u - u_N, u - u_N) + \mathcal{E}_1(u_N, u_N) \\
&\geq \mathcal{E}_1(u_N, u_N) = \sum_{n=1}^{N} (\lambda_n + 1) \langle u, \varphi_n \rangle^2
\end{aligned}
$$

であるので,

$$
\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n + 1) \langle u, \varphi_n \rangle^2 \leq \mathcal{E}_1(u,u) < \infty. \tag{A.22}
$$

すると $M < N$ を満たす任意の $M, N \in \mathbb{N}$ に対し定理 A.2-(1),(2) と (A.22) により

$$
0 \leq \mathcal{E}_1(u_N - u_M, u_N - u_M) = \sum_{n=M+1}^{N} (\lambda_n + 1) \langle u, \varphi_n \rangle^2 \leq \sum_{n=M+1}^{\infty} (\lambda_n + 1) \langle u, \varphi_n \rangle^2 \xrightarrow{M \to \infty} 0,
$$

ゆえに $\{u_N\}_{N=1}^{\infty}$ は Hilbert 空間 $(\mathcal{F}, \mathcal{E}_1)$ における Cauchy 列であるので，$v \in \mathcal{F}$ が存在して $\lim_{N \to \infty} \mathcal{E}_1(v - u_N, v - u_N) = 0$ となる．ところがこのとき任意の $n \in \mathbb{N}$ と任意の $N \geq n$ に対し定理 A.2-(2) により

$$
\begin{aligned}
0 &\leq |\langle v - u, \varphi_n \rangle| = |\langle v, \varphi_n \rangle - \langle u, \varphi_n \rangle| = |\langle v, \varphi_n \rangle - \langle u_N, \varphi_n \rangle| = |\langle v - u_N, \varphi_n \rangle| \\
&\leq \|v - u_N\| \leq \mathcal{E}_1(v - u_N, v - u_N)^{1/2} \xrightarrow{N \to \infty} 0
\end{aligned}
$$

となるので $\langle v - u, \varphi_n \rangle = 0$ であり，従って定理 A.2-(3) により $v - u = 0$, すなわち $u = v$, よって $\lim_{N \to \infty} \mathcal{E}_1(v - u_N, v - u_N) = 0$ より $\lim_{N \to \infty} \mathcal{E}_1(u - u_N, u - u_N) = 0$ となり (A.20) が得られる．するとさらに $\mathcal{F} \ni v \mapsto \mathcal{E}(v,v)^{1/2}$ および $\|\cdot\|$ に対する 3 角不等式（補題 A.1 の (A.2)）により

$$
\begin{aligned}
\left| \mathcal{E}(u,u)^{1/2} - \mathcal{E}(u_N, u_N)^{1/2} \right|^2 &\leq \mathcal{E}(u - u_N, u - u_N) \leq \mathcal{E}_1(u - u_N, u - u_N) \xrightarrow{N \to \infty} 0, \\
\left| \|u\| - \|u_N\| \right| &\leq \|u - u_N\| \leq \mathcal{E}_1(u - u_N, u - u_N)^{1/2} \xrightarrow{N \to \infty} 0
\end{aligned}
$$

であるので，これを定理 A.2-(1),(2) と合わせると

$$
\begin{aligned}
\mathcal{E}(u,u) &= \lim_{N \to \infty} \mathcal{E}(u_N, u_N) = \lim_{N \to \infty} \sum_{n=1}^{N} \lambda_n \langle u, \varphi_n \rangle^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle u, \varphi_n \rangle^2, \\
\|u\|^2 &= \lim_{N \to \infty} \|u_N\|^2 = \lim_{N \to \infty} \sum_{n=1}^{N} \langle u, \varphi_n \rangle^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \langle u, \varphi_n \rangle^2
\end{aligned}
$$

となり (A.21) を得る． □

定理 A.4 の簡単な応用として，固有値の列 $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対する次の重要な変分公式が得られる．

定理 A.5. 定理 A.2 の状況を仮定し，$\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty} \subset [0,\infty)$ を定理 A.2 の通りとする．このとき任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し

$$\lambda_n = \inf\left\{ \sup_{u \in L \setminus \{0\}} \frac{\mathcal{E}(u,u)}{\|u\|^2} \;\middle|\; L \text{ は } \mathcal{F} \text{ の } n \text{ 次元線型部分空間} \right\}. \tag{A.23}$$

証明. $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{F}$ を定理 A.2 の通りとし，$N \in \mathbb{N}$ とする．まず L_N を $\{\varphi_n\}_{n=1}^{N}$ で生成される $\mathcal{F}$ の線型部分空間とすると，定理 A.2-(2) により $\{\varphi_n\}_{n=1}^{N}$ は線型独立，従って L_N の基底を成し，特に $\dim L_N = N$ である．さらに任意の $u \in L_N \setminus \{0\}$ に対し，定理 A.2-(2) により $u = \sum_{n=1}^{N} \langle u, \varphi_n \rangle \varphi_n$ であることに注意すると定理 A.2-(1) と $\{\lambda_n\}_{n=1}^{N}$ の非減少性により

$$\frac{\mathcal{E}(u,u)}{\|u\|^2} = \frac{\sum_{n=1}^{N} \lambda_n \langle u, \varphi_n \rangle^2}{\sum_{n=1}^{N} \langle u, \varphi_n \rangle^2} \leq \frac{\sum_{n=1}^{N} \lambda_N \langle u, \varphi_n \rangle^2}{\sum_{n=1}^{N} \langle u, \varphi_n \rangle^2} = \lambda_N = \frac{\mathcal{E}(\varphi_N, \varphi_N)}{\|\varphi_N\|^2},$$

よって

$$\lambda_N = \max_{u \in L_N \setminus \{0\}} \frac{\mathcal{E}(u,u)}{\|u\|^2} = \sup_{u \in L_N \setminus \{0\}} \frac{\mathcal{E}(u,u)}{\|u\|^2}. \tag{A.24}$$

次に L を $\mathcal{F}$ の任意の N 次元線型部分空間とし，線型写像 $\Phi_{N-1}^{L} \colon L \to \mathbb{R}^{N-1}$ を $\Phi_{N-1}^{L}(u) := (\langle u, \varphi_n \rangle)_{n=1}^{N-1}$ で定めると，$\dim(\Phi_{N-1}^{L})^{-1}(0) = \dim L - \dim \Phi_{N-1}^{L}(L) \geq N - (N-1) = 1 > 0$ であることから $u_L \in (\Phi_{N-1}^{L})^{-1}(0) \setminus \{0\}$ を取ることができ，すると $\Phi_{N-1}^{L}(u_L) = 0$ より任意の $n \in \mathbb{N} \cap [0, N)$ に対し $\langle u_L, \varphi_n \rangle = 0$ であるので定理 A.4 の (A.21) と $\{\lambda_n\}_{n=N}^{\infty}$ の非減少性により

$$\sup_{u \in L \setminus \{0\}} \frac{\mathcal{E}(u,u)}{\|u\|^2} \geq \frac{\mathcal{E}(u_L, u_L)}{\|u_L\|^2} = \frac{\sum_{n=N}^{\infty} \lambda_n \langle u_L, \varphi_n \rangle^2}{\sum_{n=N}^{\infty} \langle u_L, \varphi_n \rangle^2} \geq \frac{\sum_{n=N}^{\infty} \lambda_N \langle u_L, \varphi_n \rangle^2}{\sum_{n=N}^{\infty} \langle u_L, \varphi_n \rangle^2} = \lambda_N. \tag{A.25}$$

(A.25) において L は $\mathcal{F}$ の任意の N 次元線型部分空間であったので，これと (A.24) より (A.23) が得られる． □

参考文献

[1] M. T. Barlow and R. F. Bass, The construction of Brownian motion on the Sierpinski carpet, *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.* **25** (1989), 225–257.

[2] M. T. Barlow and R. F. Bass, Transition densities for Brownian motion on the Sierpinski carpet, *Probab. Theory Related Fields* **91** (1992), 307–330.

[3] M. T. Barlow and R. F. Bass, Brownian motion and harmonic analysis on Sierpinski carpets, *Canad. J. Math.* **51** (1999), 673–744.

[4] M. T. Barlow, R. F. Bass, T. Kumagai and A. Teplyaev, Uniqueness of Brownian motion on Sierpiński carpets, *J. Eur. Math. Soc.* **12** (2010), 655–701.

[5] M. T. Barlow and J. Kigami, Localized eigenfunctions of the Laplacian on p.c.f. self-similar sets, *J. London Math. Soc.* **56** (1997), 320–332.

[6] M. T. Barlow and E. A. Perkins, Brownian motion on the Sierpinski gasket, *Probab. Theory Related Fields* **79** (1988), 543–623.

[7] N. Bouleau and F. Hirsch, *Dirichlet Forms and Analysis on Wiener Space*, de Gruyter Stud. Math., vol. 14, Walter de Gruyter, Berlin, 1991.

[8] Z.-Q. Chen and M. Fukushima, *Symmetric Markov Processes, Time Change, and Boundary Theory*, London Math. Soc. Monogr., vol. 35, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 2012.

[9] A. Douady and J. H. Hubbard, Itération des polynômes quadratiques complexes, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **294** (1982), 123–126.

[10] P. J. Fitzsimmons, B. M. Hambly and T. Kumagai, Transition density estimates for Brownian motion on affine nested fractals, *Comm. Math. Phys.* **165** (1994), 595–620.

[11] M. Fukushima, Y. Oshima and M. Takeda, *Dirichlet Forms and Symmetric Markov Processes*, 2nd ed., de Gruyter Stud. Math., vol. 19, Walter de Gruyter, Berlin, 2011.

[12] M. Fukushima and T. Shima, On a spectral analysis for the Sierpinski gasket, *Potential Anal.* **1** (1992), 1–35.

[13] 福島 正俊，竹田 雅好「マルコフ過程」，確率論教程シリーズ 4，培風館，2008.

[14] S. Goldstein, Random walks and diffusions on fractals, in: H. Kesten (ed.), *Percolation Theory and Ergodic Theory of Infinite Particle Systems*, IMA Vol. Math. Appl., vol. 8, Springer, New York, 1987, pp. 121–129.

[15] A. Grigor'yan and N. Kajino, Localized upper bounds of heat kernels for diffusions via a multiple Dynkin–Hunt formula, *Trans. Amer. Math. Soc.* **369** (2017), 1025–1060.

[16] M. Hino, On singularity of energy measures on self-similar sets, *Probab. Theory Related Fields* **132** (2005), 265–290.

[17] M. Hino, Martingale dimensions for fractals, *Ann. Probab.* **36** (2008), 971–991.

[18] M. Hino, Energy measures and indices of Dirichlet forms, with applications to derivatives on some fractals, *Proc. London Math. Soc.* **100** (2010), 269–302.

[19] M. Hino, Upper estimate of martingale dimension for self-similar fractals, *Probab. Theory Related Fields* **156** (2013), 739–793.

[20] 井川 満「偏微分方程式論入門」，裳華房，1996.

[21] N. Kajino, On-diagonal oscillation of the heat kernels on post-critically finite self-similar fractals, *Probab. Theory Related Fields* **156** (2013), 51–74.

[22] N. Kajino, Heat kernel asymptotics for the measurable Riemannian structure on the Sierpinski gasket, *Potential Anal.* **36** (2012), 67–115.

[23] N. Kajino, Analysis and geometry of the measurable Riemannian structure on the

Sierpiński gasket, in: *Fractal Geometry and Dynamical Systems in Pure and Applied Mathematics I: Fractals in Pure Mathematics*, Contemp. Math., vol. 600, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2013, pp. 91–133.

[24] N. Kajino, Non-regularly varying and non-periodic oscillation of the on-diagonal heat kernels on self-similar fractals, in: Fractal Geometry and Dynamical Systems in Pure and Applied Mathematics II: Fractals in Applied Mathematics, *Contemp. Math.*, vol. 601, 2013, pp. 165–194.

[25] 梶野 直孝「フラクタル上の解析学入門」，京都大学大学院情報学研究科 2013 年度集中講義「応用解析学特論 I」講義ノート，2014. `https://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~nkajino/lectures/2013/Fractal2013.html`

[26] 梶野 直孝「フラクタル上の解析学」，『数学セミナー』2017 年 3 月号，19–25.

[27] 梶野 直孝「熊谷隆氏の Humboldt 賞受賞によせて」，『数学通信』第 23 巻第 1 号 (2018)，16–21. `https://mathsoc.jp/publication/tushin/2301/kumagai-kajino.pdf`

[28] 梶野 直孝「フラクタル上のラプラシアン・熱方程式入門」，奈良女子大学理学部 2018 年度集中講義「数学特別講義 I」講義ノート，2018. `https://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~nkajino/lectures/2018/Fractal2018.html`

[29] N. Kajino and M. Murugan, On the conformal walk dimension: quasisymmetric uniformization for symmetric diffusions, *Inventiones mathematicae*, to appear. `arXiv:2008.12836`

[30] I. Karatzas and S. E. Shreve, *Brownian Motion and Stochastic Calculus*, 2nd ed., Graduate Texts in Math. **113**, Springer-Verlag, New York - Berlin - Heidelberg, 1991.

[31] J. Kigami, A harmonic calculus on the Sierpinski spaces, *Japan J. Appl. Math.* **6** (1989), 259–290.

[32] J. Kigami, Harmonic calculus on p.c.f. self-similar sets, *Trans. Amer. Math. Soc.* **335** (1993), 721–755.

[33] J. Kigami, Harmonic metric and Dirichlet form on the Sierpinski gasket, in: K. D. Elworthy and N. Ikeda (eds.), *Asymptotic Problems in Probability Theory: Stochastic Models and Diffusions on Fractals (Sanda/Kyoto, 1990)*, Pitman Research Notes in Math., vol. 283, Longman Sci. Tech., Harlow, 1993, pp. 201–218.

[34] J. Kigami, Effective resistances for harmonic structures on p.c.f. self-similar sets, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **115** (1994), 291–303.

[35] J. Kigami, Harmonic calculus on limits of networks and its application to dendrites, *J. Funct. Anal.* **128** (1995), 48–86.

[36] J. Kigami, Distributions of localized eigenvalues of Laplacians on post critically finite self-similar sets, *J. Funct. Anal.* **156** (1998), 170–198.

[37] J. Kigami, *Analysis on Fractals*, Cambridge Tracts in Math., vol. 143, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2001.

[38] J. Kigami, Measurable Riemannian geometry on the Sierpinski gasket: the Kusuoka measure and the Gaussian heat kernel estimate, *Math. Ann.* **340** (2008), 781–804.

[39] J. Kigami, Volume doubling measures and heat kernel estimates on self-similar sets, *Mem. Amer. Math. Soc.* **199** (2009), no. 932.

[40] J. Kigami, Resistance forms, quasisymmetric maps and heat kernel estimates, *Mem. Amer. Math. Soc.* **216** (2012), no. 1015.

[41] J. Kigami and M. L. Lapidus, Weyl's problem for the spectral distribution of Laplacians on p.c.f. self-similar fractals, *Comm. Math. Phys.* **158** (1993), 93–125.

[42] T. Kumagai, Short time asymptotic behaviour and large deviation for Brownian motion on some affine nested fractals, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* **33** (1997), 223–240.

[43] T. Kumagai, *Random Walks on Disordered Media and their Scaling Limits*, Lecture Notes in Math., vol. 2101, Springer, 2014.

[44] 熊谷 隆「ランダム媒質とフラクタル」，『数学セミナー』2017 年 3 月号，26–31.

[45] 熊谷 隆「複雑な系の上の異常拡散現象の解析」，『数学』第 70 巻第 1 号 (2018), 81–100. `https://doi.org/10.11429/sugaku.0701081`

[46] S. Kusuoka, A diffusion process on a fractal, in: K. Ito and N. Ikeda (eds.), *Probabilistic Methods in Mathematical Physics (Katata/Kyoto, 1985)*, Academic Press, Boston, MA, 1987, pp. 251–274.

[47] S. Kusuoka, Dirichlet forms on fractals and products of random matrices, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* **25** (1989), 659–680.

[48] S. Kusuoka and X. Y. Zhou, Dirichlet forms on fractals: Poincaré constant and resistance, *Probab. Theory Related Fields* **93** (1992), 169–196.

[49] T. Lindstrøm, Brownian motion on nest fractals, *Mem. Amer. Math. Soc.* **83** (1990), no. 420.

[50] Z.-M. Ma and M. Röckner, *Introduction to the Theory of (Non-Symmetric) Dirichlet Forms*, Universitext, Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg, 1992.

[51] B. B. Mandelbrot, *Fractals: Form, Chance, and Dimension*, W. H. Freeman and Co., San Francisco, CA, 1977.

[52] B. B. Mandelbrot, *The Fractal Geometry of Nature*, W. H. Freeman and Co., San Francisco, CA, 1982.

[53] P. A. P. Moran, Additive functions of intervals and Hausdorff measure, *Proc. Cambridge Phil. Soc.* **42** (1946), 15–23.

[54] H. Noda, A short time asymptotic behavior of the Brownian motion on scale irregular Sierpinski gaskets, *J. Math. Sci. Univ. Tokyo* **18** (2011), 1–33.

[55] W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, 3rd ed., McGraw-Hill, New York, 1987.

[56] M. Shishikura, The Hausdorff dimension of the boundary of the Mandelbrot set and Julia sets, *Ann. of Math. (2)* **147** (1998), 225–267.

[57] R. S. Strichartz, *Differential Equations on Fractals: A Tutorial*, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 2006.

[58] S. J. Taylor, The Hausdorff α-dimensional measure of Brownian paths in n-space, *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **49** (1953), 31–39.

[59] 内田 伏一「集合と位相」，数学シリーズ，裳華房，1986.

No. 1

Date . .

フラクタル上のラプラシアン・熱方程式入門

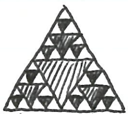
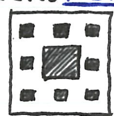
梶野 直孝(京都大学数理解析研究所)
第43回(2022年度)数学入門公開講座

▷フラクタル (fractal) ……「長さ∞の曲線」「面積0の(平面)図形」のような，滑らかな曲線・曲面とは全く異質の幾何構造を有する(「病的な」)図形

●Mandelbrot [51,52]:「自然界は実はフラクタルだらけ!」
(例：シダの葉，リアス式海岸やフィヨルド，人体の毛細血管)

●数学においても，力学系や確率論で自然に現れ，重要。

●典型的には何らかの自己相似性を有することが多い。
この側面を理想化したのがSGやSCに代表される自己相似集合
(図0.1,0.2,0.3参照)

SG  SC 

(Sierpiński gasket) (Sierpiński carpet)

●自然界の物理現象のモデル化として，フラクタル上の熱方程式や波動方程式を考えるのは自然(フラクタル上の解析学の始まり)

本講義の主題 SG上の熱方程式の厳密な定式化の紹介!
(より乱雑な(主にランダムな)フラクタルでの研究は[44,45,43]参照)

$\mathbb{R}^d$上のラプラシアン(Laplacian)Δと熱方程式$\frac{\partial}{\partial t}u=\Delta u$:

$$\boxed{\mathcal{E}(u,v)} = \int_{\mathbb{R}^d}\langle\nabla u,\nabla v\rangle dx = \int_{\mathbb{R}^d}\sum_{k=1}^d \frac{\partial u}{\partial x_k}\frac{\partial v}{\partial x_k}dx$$

$$\updownarrow\quad \mathcal{E}(u,v) = -\int_{\mathbb{R}^d} v\cdot\Delta u\,dx \qquad (\nabla u := \mathrm{grad}\,u := (\tfrac{\partial u}{\partial x_k})_{k=1}^d)$$

$$\boxed{\Delta} = \Delta_{\mathbb{R}^d} = \mathrm{div}\,\mathrm{grad} = \sum_{k=1}^d \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}$$

$$\lim_{t\downarrow 0}\frac{E_x[u(B_{2t})]-u(x)}{t} = \Delta u(x)$$

$\frac{\partial}{\partial t}u=\Delta u$, $u(0,\cdot)=f$の解が $u(t,x)=\int_{\mathbb{R}^d}p_t(x,y)f(y)dy$

$\boxed{熱核\ p_t(x,y)} = (4\pi t)^{-d/2}e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}$

$P_x[B_{2t}\in dy]=p_t(x,y)dy$

$\mathbb{R}^d$上のBrown運動$\boxed{\{B_{2t}\}_{t\ge0}}$

上の対応関係は一般化できる(Dirichlet形式の理論；[13,11,8])。
$\mathcal{E}(u,v)$が最も扱い易いことが多い。$\mathcal{E}$に要求される性質は次:

(DF1) $\mathcal{E}$は閉(完備性の一種)。

(DF2)(Markov性) $\mathcal{E}(u^+\wedge1,u^+\wedge1)\le\mathcal{E}(u,u)$.

(DF3)(正則性) $\mathcal{E}$の定義域は連続関数を十分豊富に含む。

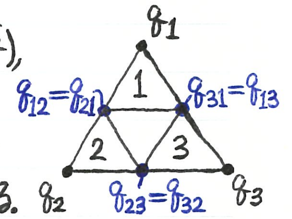
(DF4)(強局所性) $\exists a\in\mathbb{R}, (u-a)v\equiv0 \Rightarrow \mathcal{E}(u,v)=0$.

「熱は空間内を連続的にしか伝わらない」という性質に対応
正確な定式化は定理1.24参照。さて，そこで:

本講義の目標 ① SG上に(DF1~4)を満たす(非自明な)$\mathcal{E}$を作る!
② $p_t(x,y)$，およびΔの固有値・固有関数の性質の紹介。

§1 SG上の標準Dirichlet形式・Laplacianの構成

1.1 Sierpiński gasket (SG)



▷$V_0:=\{q_1,q_2,q_3\}\subset\mathbb{R}^2$: $q_1:=(\frac12,\frac{\sqrt3}{2})$, $q_2:=(0,0)$, $q_3:=(1,0)$.

▷$S:=\{1,2,3\}$とし，各$j\in S$に対し$f_j:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$を$f_j(x):=\frac12(x+q_j)$で定める。

▷$m\in\mathbb{N}$に対し帰納的に$V_m:=\bigcup_{j\in S}f_j(V_{m-1})$と定める。

●明らかに$V_0\subset V_1$であり，これとmに関する帰納法により容易に
$\forall m\in\mathbb{N}\cup\{0\}$, $V_m\subset V_{m+1}$ も分かる。

▷$V_*:=\bigcup_{m=0}^\infty V_m$, $K:=\overline{V_*}^{\mathbb{R}^2}$ ---------- (1.3)
と定義し，Kを(2次元標準)Sierpiński gasket (SG)という。

●Kは$\mathbb{R}^2$の有界閉集合，従ってコンパクト。

●$K=\bigcup_{j\in S}f_j(K)$. ---------- (1.4)

☺ $V_*=\bigcup_{j\in S}f_j(V_*)$は容易に分かる。あとは$f_j$, f_j^{-1}の連続性により $\overline{f_j(V_*)}^{\mathbb{R}^2}=f_j(\overline{V_*}^{\mathbb{R}^2})=f_j(K)$であることに注意すると

$$K=\overline{V_*}^{\mathbb{R}^2}=\overline{\bigcup_{j\in S}f_j(V_*)}^{\mathbb{R}^2}=\bigcup_{j\in S}\overline{f_j(V_*)}^{\mathbb{R}^2}=\bigcup_{j\in S}f_j(K).$$

▷各$j\in S$に対し$F_j:=f_j|_K$とおく。(1.4)により，$F_j:K\to K$連続な単射。

▷$j\ne k$なる$j,k\in S$に対し$q_{jk}:=F_j(q_k)$とおく。$q_{jk}=q_{kj}$である。

命題1.2 $F_2(K)\cap F_3(K)=\{q_{23}\}$, $F_3(K)\cap F_1(K)=\{q_{31}\}$, $F_1(K)\cap F_2(K)=\{q_{12}\}$.

証明 $V_*\subset\triangle q_1q_2q_3$，従って$K\subset\triangle q_1q_2q_3$. 主張はこれより明らか。■

1.2 SG上の標準Dirichlet形式I: 定義と基本性質

方針 V_m上に自然な有限グラフ(電気回路)の構造を入れることにより$\mathcal{E}^{(m)}:\mathbb{R}^{V_m}\times\mathbb{R}^{V_m}\to\mathbb{R}$を定め，$m\to\infty$のときの極限を取る。

具体的には:

$(V_0,\overset{0}{\sim})$ $(V_1,\overset{1}{\sim})$ $(V_2,\overset{2}{\sim})$ ......

$m\in\mathbb{N}\cup\{0\}$とし， 辺構造($x,y\in V_0$間に辺があるとき$x\overset{0}{\sim}y$)

$x,y\in V_m$に対し

$x\overset{m}{\sim}y \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} x\ne y$ かつ $\exists w\in W_m$, $x,y\in F_w(V_0)$, ---------- (1.8)

ただし$W_m:=S^m=\{w_1\ldots w_m\mid w_1,\ldots,w_m\in S\}$ ($W_0:=\{\emptyset\}$(空語)),
$w=w_1\ldots w_m\in W_m$に対し $F_w:=F_{w_1}\circ\cdots\circ F_{w_m}$ ($F_\emptyset:=\mathrm{id}_K$),
と定める。そして$E^{(m)}$, $\mathcal{E}^{(m)}:\mathbb{R}^{V_m}\times\mathbb{R}^{V_m}\to\mathbb{R}$を次で定義する:

$$E^{(m)}(u,v):=\frac12\sum_{x,y\in V_m,\ x\overset{m}{\sim}y}(u(x)-u(y))(v(x)-v(y)), \qquad (1.9)$$

$$\mathcal{E}^{(m)}(u,v):=\left(\frac53\right)^m E^{(m)}(u,v).$$

$\mathcal{E}^{(m)}$の$m\to\infty$のときの極限が取れる根拠となるのが，次の命題である。

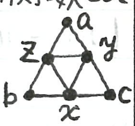
命題1.3 $\forall m\in\mathbb{N}\cup\{0\}$, $\forall u\in\mathbb{R}^{V_m}$, $\exists^1 H_{m,m+1}(u)\in\mathbb{R}^{V_{m+1}}$: uの拡張，

$$\underbrace{\frac35 E^{(m)}(u,u)}_{\mathcal{E}^{(m)}} = \min_{v\in\mathbb{R}^{V_{m+1}},\ v|_{V_m}=u} \underbrace{E^{(m+1)}(v,v)}_{\mathcal{E}^{(m+1)}} = E^{(m+1)}(H_{m,m+1}(u),H_{m,m+1}(u)). \qquad (1.10)$$

※§1の結果は[14,46,6,31]で本質的には得られていたのが[12]によってこの形に整理されたものである。
さらなる詳細については[37,57]を参照のこと(特に[57, Chapter 1], [37, Sections 3.1–3.4]が§1の内容に関係する)。

証明 $m=0$のときは, $(u(q_1),u(q_2),u(q_3))=:(a,b,c)$とおくと, $\mathcal{E}^{(1)}(v,v)$は$(x,y,z):=(v(q_{23}),v(q_{31}),v(q_{12}))$の関数として

$$\mathcal{E}^{(1)}(v,v)=(y-z)^2+(a-y)^2+(a-z)^2+(b-x)^2+(x-z)^2+(z-b)^2+(x-c)^2+(c-y)^2+(y-x)^2$$



で与えられ, これが

$$4x=b+z+y+c,\quad 4y=c+x+z+a,\quad 4z=a+y+x+b \cdots (1.12)^D$$

すなわち $x=\dfrac{a+2b+2c}{5}$, $y=\dfrac{2a+b+2c}{5}$, $z=\dfrac{2a+2b+c}{5}$ $(1.11)^D$

のときにのみ最小値$\frac{3}{5}((b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2)=\frac{3}{5}\mathcal{E}^{(0)}(u,u)$を取ることは容易に示せる. ($x,y,z$について順次平方完成することで高校数学の範囲で示せる. 多変数の微分法でもできる.)

一般の$m\in\mathbb{N}$のときは, 各$w\in W_m$に対し$F_w(V_1)$上で先程と同様の計算を行えば($u\circ F_w|_{V_0}$, $v\circ F_w|_{V_1}$に$m=0$の場合の結果を適用したものを$w\in W_m$について加えれば)よい. ■

注意 命題1.3の$\mathbb{R}^{V_m}\ni u\mapsto H_{m,m+1}(u)\in\mathbb{R}^{V_{m+1}}$は線型写像であることが, 上記の証明(特に$(1.11)^D$)より分かる.

(1.10)より特に, 各$u:V_*\to\mathbb{R}$に対し次が分かる:

● $\{\mathcal{E}^{(m)}(u|_{V_m},u|_{V_m})\}_{m=0}^{\infty}\subset[0,\infty)$は非減少. (∵ $u|_{V_{m+1}}$は$u|_{V_m}$の拡張.)
(従って $\exists\lim_{m\to\infty}\mathcal{E}^{(m)}(u|_{V_m},u|_{V_m})\in[0,\infty]$.)

そこで$\mathcal{F}_*\subset\mathbb{R}^{V_*}$と$\mathcal{E}^{(*)}:\mathcal{F}_*\times\mathcal{F}_*\to\mathbb{R}$を次で定義:

▷ $\mathcal{F}_*:=\{u\in\mathbb{R}^{V_*}\mid \lim_{m\to\infty}\mathcal{E}^{(m)}(u|_{V_m},u|_{V_m})<\infty\}$ (これは線型空間
(∵ $u,v\in\mathcal{F}_*$, $a\in\mathbb{R}$とすると$\forall m\in\mathbb{N}\cup\{0\}$, $\mathcal{E}^{(m)}(au,au)=a^2\mathcal{E}^{(m)}(u,u)$,
$\mathcal{E}^{(m)}(u+v,u+v)^{1/2}\le\mathcal{E}^{(m)}(u,u)^{1/2}+\mathcal{E}^{(m)}(v,v)^{1/2}$ (補題A.1))

▷ $\mathcal{E}^{(*)}(u,v):=\lim_{m\to\infty}\mathcal{E}^{(m)}(u|_{V_m},v|_{V_m})\in\mathbb{R}$ (これは双線型, 対称, 非負定値)
(∵ 極限値の存在は$\mathcal{E}^{(m)}(u,v)=\frac{1}{4}(\mathcal{E}^{(m)}(u+v,u+v)-\mathcal{E}^{(m)}(u-v,u-v))$と$u+v,u-v\in\mathcal{F}_*$より分かる. $\mathcal{E}^{(*)}$が双線型, 対称, 非負定値は自明)

するとさらに次が成り立つ.

命題1.5 $\mathcal{F}_*=\{u\in\mathbb{R}^{V_*}\mid \forall j\in S,\ u\circ F_j|_{V_*}\in\mathcal{F}_*\}$, ········ (1.25)

$\forall u,v\in\mathcal{F}_*$, $\mathcal{E}^{(*)}(u,v)=\sum_{j\in S}\frac{5}{3}\mathcal{E}^{(*)}(u\circ F_j|_{V_*},v\circ F_j|_{V_*})$ ··(1.26)

証明 $u\in\mathbb{R}^{V_*}$とすると, 各$m\in\mathbb{N}\cup\{0\}$に対し(1.8),(1.9)より

$$\mathcal{E}^{(m+1)}(u|_{V_{m+1}},u|_{V_{m+1}})=\sum_{j\in S}\frac{5}{3}\mathcal{E}^{(m)}(u\circ F_j|_{V_m},u\circ F_j|_{V_m}) \cdots (1.27)^D$$

であることは容易に分かり, 従って

$$\begin{aligned}u\in\mathcal{F}_* &\iff \lim_{m\to\infty}\mathcal{E}^{(m+1)}(u|_{V_{m+1}},u|_{V_{m+1}})<\infty\\ &\iff \forall j\in S,\ \lim_{m\to\infty}\mathcal{E}^{(m)}(u\circ F_j|_{V_m},u\circ F_j|_{V_m})<\infty\\ &\iff \forall j\in S,\ u\circ F_j|_{V_*}\in\mathcal{F}_*\end{aligned}$$

となり(1.25)を得る.
(1.26)については, $(1.27)^D$で(u,u)の代わりに(u,v)としたものも成り立つことに注意し$m\to\infty$とすればよい. ■

現状では各$u\in\mathcal{F}_*$はV_*(可算集合!)上でしか定義されていないことに注意しよう. これではuのK上での積分を定義できないので具合が悪く, また後に(DF3)(正則性)を示したいという観点からも不都合である. この問題は, 次の演習1.1と定理1.6を用いて各$u\in\mathcal{F}_*$のK上への連続拡張$\overline{u}\in C(K)$を取ることにより克服される.

演習1.1 (X,ρ)を距離空間, YをXの稠密な部分集合とし, $u:Y\to\mathbb{R}$は($\rho|_{Y\times Y}$について)一様連続であるとする. このとき$\overline{u}|_Y=u$を満たす連続関数$\overline{u}:X\to\mathbb{R}$が唯1つ存在することを示せ.

定理1.6 $\alpha:=\log_2\frac{5}{3}$とおく. このとき$\forall u\in\mathcal{F}_*$, $\forall x,y\in V_*$,

$$|u(x)-u(y)|^2\le 400|x-y|^{\alpha}\mathcal{E}^{(*)}(u,u).$$

定理1.6の証明のために, まず次の補題を示す.

補題1.7 $\forall u\in\mathcal{F}_*$, $\forall x,y\in V_*$,

$$|u(x)-u(y)|^2\le 100\,\mathcal{E}^{(*)}(u,u).$$

証明 まず次の事実に注意する: $\forall v\in\mathbb{R}^{V_1}$, $\forall y,z\in V_1$, $\exists q\in V_1$, 「$y=q=z$」または「$y\overset{1}{\sim}q$かつ$q=z$」または「$y\overset{1}{\sim}q$かつ$q\overset{1}{\sim}z$かつ$y\neq z$」,
従って

$$\begin{aligned}|v(y)-v(z)|&\le|v(y)-v(q)|+|v(q)-v(z)|\\ &\le\sqrt{2}\left(|v(y)-v(q)|^2+|v(q)-v(z)|^2\right)^{1/2} \quad (1.30)\\ &\le\sqrt{2}\left(\tfrac{3}{5}\mathcal{E}^{(1)}(v,v)\right)^{1/2}=\sqrt{6/5}\,\mathcal{E}^{(1)}(v,v)^{1/2}.\end{aligned}$$

さて, $u\in\mathcal{F}_*$と$x\in V_*$を任意に取る. このとき$\exists m\in\mathbb{N}$, $x\in V_m$, 従って$\exists w=w_1\ldots w_m\in W_m$, $x\in F_w(V_0)$であるので$\exists j\in S$, $x=F_w(q_j)$. そこで$\{x_k\}_{k=0}^{m}\subset V_m$を$x_0:=q_1$と$k\in\{1,\ldots,m\}$に対し$x_k:=F_{w_1\ldots w_k}(q_j)$で定めると, $x_m=x$であり, また$\forall k\in\{1,\ldots,m\}$, $x_{k-1},x_k\in F_{w_1\ldots w_{k-1}}(V_1)$ (ただし$k=1$のときは$w_1\ldots w_{k-1}:=\emptyset$)であるので(1.30), $(1.27)^D$により

$$\begin{aligned}&|u(x_{k-1})-u(x_k)|\\ &=|u\circ F_{w_1\ldots w_{k-1}}(F_{w_1\ldots w_{k-1}}^{-1}(x_{k-1}))-u\circ F_{w_1\ldots w_{k-1}}(F_{w_1\ldots w_{k-1}}^{-1}(x_k))|\\ &\le\sqrt{6/5}\,\mathcal{E}^{(1)}(u\circ F_{w_1\ldots w_{k-1}}|_{V_1},u\circ F_{w_1\ldots w_{k-1}}|_{V_1})^{1/2}\\ &\le\sqrt{6/5}\left(\tfrac{3}{5}\right)^{(k-1)/2}\Big(\sum_{\tau\in W_{k-1}}\left(\tfrac{5}{3}\right)^{k-1}\mathcal{E}^{(1)}(u\circ F_\tau|_{V_1},u\circ F_\tau|_{V_1})\Big)^{1/2}\\ &=\sqrt{6/5}\,(3/5)^{\frac{k-1}{2}}\mathcal{E}^{(k)}(u|_{V_k},u|_{V_k})^{1/2}\le\sqrt{6/5}\,(3/5)^{\frac{k-1}{2}}\mathcal{E}^{(*)}(u,u)^{1/2}.\end{aligned}$$

よってこれと$x_0=q_1$, $x_m=x$により

$$\begin{aligned}|u(q_1)-u(x)|&\le\sum_{k=1}^{m}|u(x_{k-1})-u(x_k)|\\ &\le\sum_{k=1}^{m}\sqrt{\tfrac{6}{5}}\left(\tfrac{3}{5}\right)^{\frac{k-1}{2}}\mathcal{E}^{(*)}(u,u)^{1/2}\le 5\,\mathcal{E}^{(*)}(u,u)^{1/2}. \quad (1.32)\end{aligned}$$

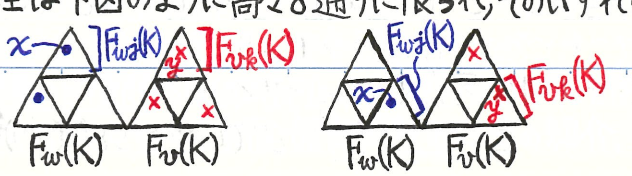
No. 3

Date

(1.32)において$x \in V_*$は任意だったので, $\forall x, y \in V_*$,
$$|u(x)-u(y)| \leq |u(x)-u(q_1)| + |u(q_1)-u(y)|$$
$$\leq 5\mathcal{E}^{(*)}(u,u)^{1/2} + 5\mathcal{E}^{(*)}(u,u)^{1/2} = 10\mathcal{E}^{(*)}(u,u)^{1/2}$$
となり, 主張が得られる. ■

定理1.6の証明 $u \in \mathcal{F}_*$と$x, y \in V_*$を任意に取る. $x=y$のときは主張の不等式は自明に成り立つので, 以下$x \neq y$と仮定する. $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$が$2^{-m} < \frac{1}{2}|x-y|$を満たすならば$x \in F_w(K)$かつ$y \in F_v(K)$となる任意の$w, v \in W_m$に対し$F_w(K) \cap F_v(K) = \emptyset$であることに注意して
(実際, $q \in F_w(K) \cap F_v(K)$が存在すると仮定すると
$|x-y| \leq |x-q| + |q-y| \leq 2^{-m} + 2^{-m} = 2 \cdot 2^{-m} < |x-y|$で矛盾),
$n = n_{x,y} \in \mathbb{N}$を次で定める:
$$n := n_{x,y} := \max\left\{ m \in \mathbb{N} \cup \{0\} \;\middle|\; \begin{array}{l} \exists w, v \in W_m,\ x \in F_w(V_*), \\ y \in F_v(V_*),\ F_w(V_*) \cap F_v(V_*) \neq \emptyset \end{array} \right\}$$
(この右辺の集合は0,1を含み$\{m \in \mathbb{N} \cup \{0\} \mid 2^{-m} \geq \frac{1}{2}|x-y|\}$に含まれる).
するとnの定義により$\exists w, v \in W_n$, $x \in F_w(V_*)$, $y \in F_v(V_*)$, $F_w(V_*) \cap F_v(V_*) \neq \emptyset$, かつ$2^{-n} \geq \frac{1}{2}|x-y|$すなわち$|x-y| \leq 2^{1-n}$.
特に$q \in F_w(V_*) \cap F_v(V_*)$が取れ, このとき補題1.7と命題1.5により
$$|u(x)-u(y)| \leq |u(x)-u(q)| + |u(q)-u(y)|$$
$$= |u \circ F_w(F_w^{-1}(x)) - u \circ F_w(F_w^{-1}(q))| + |u \circ F_v(F_v^{-1}(q)) - u \circ F_v(F_v^{-1}(y))|$$
$$\overset{\text{補題1.7}}{\leq} 10\,\mathcal{E}^{(*)}(u \circ F_w|_{V_*}, u \circ F_w|_{V_*})^{1/2} + 10\mathcal{E}^{(*)}(u \circ F_v|_{V_*}, u \circ F_v|_{V_*})^{1/2}$$
$$\leq 10\sqrt{2}\left(\mathcal{E}^{(*)}(u \circ F_w|_{V_*}, u \circ F_w|_{V_*}) + \mathcal{E}^{(*)}(u \circ F_v|_{V_*}, u \circ F_v|_{V_*})\right)^{1/2}$$
$$\overset{w \neq v}{\leq} 10\sqrt{2}(3/5)^{n/2}\left(\textstyle\sum_{\tau \in W_n} \left(\frac{5}{3}\right)^n \mathcal{E}^{(*)}(u \circ F_\tau|_{V_*}, u \circ F_\tau|_{V_*})\right)^{1/2}$$
$$\overset{\text{命題1.5}}{=} 10\sqrt{2}(3/5)^{n/2}\mathcal{E}^{(*)}(u,u)^{1/2} \quad \text{------} (1.34)$$
($w \neq v$であることは次段落の冒頭で示す).

他方, $V_* = \bigcup_{j \in S} F_j(V_*)$なので$\exists j, k \in S$, $x \in F_w(F_j(V_*)) = F_{wj}(V_*)$かつ$y \in F_v(F_k(V_*)) = F_{vk}(V_*)$となるが, このときnの最大性と$wj, vk \in W_{n+1}$により$F_{wj}(V_*) \cap F_{vk}(V_*) = \emptyset$.
そこで$w=v$と仮定するとF_wの単射性により
$$\emptyset = F_{wj}(V_*) \cap F_{wk}(V_*) = F_w(F_j(V_*) \cap F_k(V_*)) \neq \emptyset$$
となり矛盾するので, $w \neq v$. このとき命題1.2を用いることで容易に確認できるように, $F_{wj}(K)$と$F_{vk}(K)$の相対的な配置の可能性は下図のように高々8通りに限られ, そのいずれの場合も$\forall a \in F_{wj}(K)$, $\forall b \in F_{vk}(K)$, $|a-b| \geq \frac{\sqrt{3}}{2}2^{-n-1}$であるので, 特に$|x-y| \geq \frac{\sqrt{3}}{2}2^{-n-1}$. これと(1.34), $\alpha = \log_2\frac{5}{3}$により
$$|u(x)-u(y)|^2 \leq 200(2^{-n})^\alpha \mathcal{E}^{(*)}(u,u)$$
$$\leq 200\left(\tfrac{4}{\sqrt{3}}\right)^\alpha |x-y|^\alpha \mathcal{E}^{(*)}(u,u) \leq 400|x-y|^\alpha \mathcal{E}^{(*)}(u,u)$$
となる(最後の不等式は$(4/\sqrt{3})^\alpha < (2^{5/4})^\alpha = (5/3)^{5/4} < 2$による). ■



(1.3)によりV_*はKにおいて稠密であるので, 定理1.6と演習1.1により各$u \in \mathcal{F}_*$は$\overline{u} \in C(K)$に唯1通りに拡張される. これを踏まえて, $\mathcal{F}_*$と$\mathcal{E}^{(*)}$の代わりに$\mathcal{F} \subset C(K)$と$\mathcal{E} : \mathcal{F} \times \mathcal{F} \to \mathbb{R}$を次のように定義し直す:

▷ $\mathcal{F} := \{u \in C(K) \mid \lim_{m \to \infty} \mathcal{E}^{(m)}(u|_{V_m}, u|_{V_m}) < \infty\} = \{u \in C(K) \mid u|_{V_*} \in \mathcal{F}_*\}$
(これは$C(K)$の線型部分空間で, $\mathcal{F} \ni u \mapsto u|_{V_*} \in \mathcal{F}_*$は線型同型)

▷ $\mathcal{E}(u,v) := \lim_{m \to \infty} \mathcal{E}^{(m)}(u|_{V_m}, v|_{V_m}) = \mathcal{E}^{(*)}(u|_{V_*}, v|_{V_*}) \in \mathbb{R}$
($\mathcal{E}^{(*)}$が双線型, 対称, 非負定値なので, $\mathcal{E}$もそう)

定義1.8 $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$をSG K上の標準Dirichlet形式と呼ぶ.

命題1.9 $\mathcal{F} = \{u \in C(K) \mid \forall j \in S,\ u \circ F_j \in \mathcal{F}\}$, ------ (1.37)
$\forall u, v \in \mathcal{F}$, $\mathcal{E}(u,v) = \sum_{j \in S} \frac{5}{3}\mathcal{E}(u \circ F_j, v \circ F_j)$. ------ (1.38)

証明 $\forall u \in C(K)$, $\forall j \in S$, $u \circ F_j \in C(K)$と命題1.5より直ちに従う. ■

定理1.10 $\alpha := \log_2\frac{5}{3}$とおく. このとき$\forall u \in \mathcal{F}$, $\forall x, y \in K$,
$$|u(x)-u(y)|^2 \leq 400|x-y|^\alpha \mathcal{E}(u,u). \quad \text{------} (1.39)$$

証明 (1.39)の両辺が$(x,y) \in K \times K$の連続関数であること, および$\overline{V_*}^K = K$と定理1.6より直ちに従う. ■

命題1.11 $\mathbb{R}\mathbb{1}_K := \{a\mathbb{1}_K \mid a \in \mathbb{R}\} \subset \{u \in \mathcal{F} \mid \mathcal{E}(u,u) = 0\}$.

証明 $\mathbb{R}\mathbb{1}_K \subset C(K)$と(1.9)および$\mathcal{F}, \mathcal{E}$の定義より直ちに従う. ■

系1.13 $u, v \in \mathcal{F}$とする.
(1) $\forall f \in \{u^+ \wedge 1, |u|, u^+, u^-\}$, $f \in \mathcal{F}$かつ$\mathcal{E}(f,f) \leq \mathcal{E}(u,u)$.
(2) $u \vee v, u \wedge v \in \mathcal{F}$かつ$\mathcal{E}(u \vee v, u \vee v) + \mathcal{E}(u \wedge v, u \wedge v) \leq \mathcal{E}(u,u) + \mathcal{E}(v,v)$.
(3) $uv \in \mathcal{F}$かつ$\mathcal{E}(uv, uv) \leq 2\|v\|_{\sup}^2 \mathcal{E}(u,u) + 2\|u\|_{\sup}^2 \mathcal{E}(v,v)$.

証明 (1),(3) (1.9)と$\mathcal{F}, \mathcal{E}$の定義および次の不等式より直ちに従う:
(1): $\forall x, y \in K$, $|f(x)-f(y)| \leq |u(x)-u(y)|$.
(3): $\forall x, y \in K$, $|(uv)(x)-(uv)(y)|^2 \leq 2\|v\|_{\sup}^2 |u(x)-u(y)|^2 + 2\|u\|_{\sup}^2 |v(x)-v(y)|^2$.
(2) $u \vee v = \frac{1}{2}(u+v+|u-v|)$, $u \wedge v = \frac{1}{2}(u+v-|u-v|)$と(1)より従う. ■

1.3 SG上の標準Dirichlet形式II：正則性($\mathcal{F} \subsetneq_{\text{dense}} C(K)$)

本小節の目標は次の定理の証明である。

定理1.18 $\mathcal{F}$はBanach空間$(C(K),\|\cdot\|_{\sup})$において稠密である，すなわち$\forall f\in C(K)$, $\forall\varepsilon\in(0,\infty)$, $\exists u\in\mathcal{F}$, $\|f-u\|_{\sup}<\varepsilon$.

定理1.18は系1.13-(3)および以下に述べる系1.17と定理1.19の簡単な帰結である。

系1.17 $\forall V \subsetneq_{\text{有限}} K$ ($V\neq\emptyset$), $\{u|_V \mid u\in\mathcal{F}\}=\mathbb{R}^V$.

証明 $f\in\mathbb{R}^V$を任意に取る。$\exists u\in\mathcal{F}$, $u|_V=f$を示せばよい。$m\in\mathbb{N}$を，$\forall w\in W_m$, $\#(V\cap F_w(K))\le 1$となるように取り，$v\in\mathbb{R}^{V_m}$を，$V\cap F_w(K)=\{x_w\}\neq\emptyset$なる$w\in W_m$に対しては$F_w(V_0)$上で$f(x_w)$，$V_m\setminus\bigcup_{w\in W_m, V\cap F_w(K)\neq\emptyset}F_w(V_0)$上では0とおくことにより定める。($m$を十分大きく取ることにより，$V\cap F_w(K)\neq\emptyset$, $V\cap F_\tau(K)\neq\emptyset$, $F_w(K)\cap F_\tau(K)\neq\emptyset$ならば$x_w=x_\tau$となるようにしておけば，上記の方法で$v\in\mathbb{R}^{V_m}$は矛盾なく定義される。) そして命題1.3の$H_{m,m+1}$を用いて，$u\in\mathbb{R}^{V_*}$を，$n>m$を満たす各$n\in\mathbb{N}$に対し$u|_{V_n}:=H_{n-1,n}\circ\cdots\circ H_{m,m+1}(v)$とおくことにより定義すると，(1.10)により$n>m$を満たす任意の$n\in\mathbb{N}$に対し$\mathcal{E}^{(n)}(u|_{V_n},u|_{V_n})=\mathcal{E}^{(m)}(v,v)\xrightarrow{n\to\infty}\mathcal{E}^{(m)}(v,v)$, 従って$u\in\mathcal{F}_*$であるので，定理1.6と演習1.1により$\exists\overline{u}\in\mathcal{F}$, $\overline{u}|_{V_*}=u$. 一方，$x\in V$とし$w_x\in W_m$を$x\in F_{w_x}(K)$を満たすように取ると，$v|_{F_{w_x}(V_0)}=f(x)$と(1.11)'により$u|_{F_{w_x}(V_*)}=f(x)$, 従って$\overline{u}|_{F_{w_x}(K)}=f(x)$, 特に$\overline{u}(x)=f(x)$となる。ここで$x\in V$は任意だったので，$\overline{u}\in\mathcal{F}$は$\overline{u}|_V=f$を満たす。■

定理1.19 (Stone-Weierstrassの定理) Xをコンパクト位相空間，$\mathcal{A}$を$C(X)$の線型部分空間とするとき，$\mathcal{A}$が次の3条件を満たすならば$\mathcal{A}$は$(C(X),\|\cdot\|_{\sup})$において稠密である：(SW1) $\forall u,v\in\mathcal{A}$, $uv\in\mathcal{A}$.
(SW2) $\forall x\in X$, $\forall y\in X\setminus\{x\}$, $\exists u\in\mathcal{A}$, $u(x)\neq u(y)$.
(SW3) $\forall x\in X$, $\exists v\in\mathcal{A}$, $v(x)\neq 0$.

証明 位相空間論の教科書(例えば[59, 定理29.4])参照。■

定理1.18の証明 Kはコンパクト距離空間であり，$\mathcal{F}$は系1.13-(3)により(SW1)を，系1.17により(SW2)を，命題1.11により(SW3)を満たす。よってKと$\mathcal{F}$に定理1.19が適用できるので，$\mathcal{F}$は$(C(K),\|\cdot\|_{\sup})$において稠密である。■

1.4 SG上の標準Dirichlet形式III：閉性($\mathcal{F}$の$\mathcal{E}$-完備性)

本小節では(DF1)($(\mathcal{E},\mathcal{F})$の閉性)の正確な定式化と証明を与える。その本質は次の定理が成り立つことにある。

定理1.20 $\{u\in\mathcal{F}\mid\mathcal{E}(u,u)=0\}=\mathbb{R}\mathbb{1}_K$であり，$(\mathcal{F}/\mathbb{R}\mathbb{1}_K,\mathcal{E})$はHilbert空間である。

証明 $\mathbb{R}\mathbb{1}_K\subset\{u\in\mathcal{F}\mid\mathcal{E}(u,u)=0\}$は命題1.11で既に見た。逆に$\mathcal{E}(u,u)=0$を満たす$u\in\mathcal{F}$を任意に取ると，各$m\in\mathbb{N}$に対し$0\le\mathcal{E}^{(m)}(u|_{V_m},u|_{V_m})\le\mathcal{E}(u,u)=0$なので$\mathcal{E}^{(m)}(u|_{V_m},u|_{V_m})=0$, 従って(1.9)により$x\overset{m}{\sim}y$なる任意の$x,y\in V_m$に対し$u(x)=u(y)$となるが，$(V_m,\overset{m}{\sim})$は連結(つまり辺の上だけを通って任意の点から任意の点に到達可能)なので$\forall x\in V_m$, $u(x)=u(q_1)$, $m\in\mathbb{N}$は任意なので$\forall x\in V_*$, $u(x)=u(q_1)$, これと$\overline{V_*}^K=K$, $u\in C(K)$より$u=u(q_1)\mathbb{1}_K\in\mathbb{R}\mathbb{1}_K$となる。ゆえに$\{u\in\mathcal{F}\mid\mathcal{E}(u,u)=0\}\subset\mathbb{R}\mathbb{1}_K$が分かり，前半の主張が従う。

後半の主張については，$\mathcal{E}$が自然に$\mathcal{F}/\mathbb{R}\mathbb{1}_K$上の内積を定めることは容易に分かるので，あとは完備性，すなわち次を示せばよい：

claim $\{u_n\}_{n=1}^\infty\subset\mathcal{F}$は$\lim_{k\wedge l\to\infty}\mathcal{E}(u_k-u_l,u_k-u_l)=0$を満たすとする。このとき$\exists u\in\mathcal{F}$, $\lim_{n\to\infty}\mathcal{E}(u-u_n,u-u_n)=0$.

☺ (1.36)と(1.9)により$\forall u,v\in\mathcal{F}$, $\forall a,b\in\mathbb{R}$, $\mathcal{E}(u+a\mathbb{1}_K,v+b\mathbb{1}_K)=\mathcal{E}(u,v)$であるので，$u_n$の代わりに$u_n-u_n(q_1)\mathbb{1}_K$を考えることにより$\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n(q_1)=0$と仮定してよい。このとき各$x\in K$に対し，定理1.10により$\forall k,l\in\mathbb{N}$,

$$0\le|u_k(x)-u_l(x)|=|(u_k-u_l)(x)-(u_k-u_l)(q_1)|$$
$$\le 20|x-q_1|^{\alpha/2}\mathcal{E}(u_k-u_l,u_k-u_l)^{1/2}\xrightarrow{k\wedge l\to\infty}0$$

なので$\{u_n(x)\}_{n=1}^\infty$は$\mathbb{R}$におけるCauchy列であり，従って極限値$u(x):=\lim_{n\to\infty}u_n(x)\in\mathbb{R}$が存在する。この$u:K\to\mathbb{R}$について$u\in\mathcal{F}$かつ$\lim_{n\to\infty}\mathcal{E}(u-u_n,u-u_n)=0$であることを示そう。まず3角不等式(補題A.1の(A.2))により$\forall k,l\in\mathbb{N}$,

$$0\le|\mathcal{E}(u_k,u_k)^{1/2}-\mathcal{E}(u_l,u_l)^{1/2}|\le\mathcal{E}(u_k-u_l,u_k-u_l)^{1/2}\xrightarrow{k\wedge l\to\infty}0$$

なので$\{\mathcal{E}(u_n,u_n)^{1/2}\}_{n=1}^\infty$は$\mathbb{R}$におけるCauchy列であり，従って極限値$A:=\lim_{n\to\infty}\mathcal{E}(u_n,u_n)^{1/2}\in\mathbb{R}$が存在する。すると定理1.10により$\forall x,y\in K$,

$$|u(x)-u(y)|=\lim_{n\to\infty}|u_n(x)-u_n(y)|\le\lim_{n\to\infty}20|x-y|^{\alpha/2}\mathcal{E}(u_n,u_n)^{1/2}$$
$$=20A|x-y|^{\alpha/2}$$

となるので，$u\in C(K)$. 次に$\varepsilon\in(0,\infty)$を任意に取り，$N\in\mathbb{N}$を$k\wedge l\ge N$なる任意の$k,l\in\mathbb{N}$に対し$\mathcal{E}(u_k-u_l,u_k-u_l)\le\varepsilon$となるように取る。$k,l\in\mathbb{N}$は$k\wedge l\ge N$を満たすとし，$m\in\mathbb{N}\cup\{0\}$

No. 5

Date

とする．このとき

$$\mathcal{E}^{(m)}((u_\ell-u_k)|_{V_m},(u_\ell-u_k)|_{V_m}) \le \mathcal{E}(u_\ell-u_k,u_\ell-u_k)\le\varepsilon \quad \cdots\cdots(1.50)$$

であるが，$\mathcal{E}^{(m)}$の定義(1.9)中の和は一定項数の有限和なので(1.50)において$\ell\to\infty$とすることにより

$$\mathcal{E}^{(m)}((u-u_k)|_{V_m},(u-u_k)|_{V_m}) = \lim_{\ell\to\infty}\mathcal{E}^{(m)}((u_\ell-u_k)|_{V_m},(u_\ell-u_k)|_{V_m}) \overset{(1.50)}{\le}\varepsilon,$$

よって $\lim_{m\to\infty}\mathcal{E}^{(m)}((u-u_k)|_{V_m},(u-u_k)|_{V_m})\le\varepsilon<\infty$となり，これと$u-u_k\in C(K)$により$u-u_k\in\mathcal{F}$，従って$u=(u-u_k)+u_k\in\mathcal{F}$，かつ$\mathcal{E}(u-u_k,u-u_k)\le\varepsilon$．ここで$k\ge N$なる$k\in\mathbb{N}$は任意だったので，先の不等式は$\lim_{n\to\infty}\mathcal{E}(u-u_n,u-u_n)=0$を意味している．//(claim) ■

本講義の冒頭のLaplacianとDirichlet形式の対応関係でも示唆されているように，Laplacianを定義するためにはL^2-内積(K上の関数u,vの積uvの積分)を導入する必要がある．ここでは「Riemann積分」的な形で次のように定式化しておく(本来は測度論を用いるべきところなのだが，本講義では測度論なしで済ませる)．

定義1.21 $W_*:=\bigcup_{m=0}^\infty W_m$とおく．
$\nu: W_*\to(0,\infty)$が$(K,S,\{F_j\}_{j\in S})$上の前測度

$\overset{\text{def}}{\iff}$
(PM1) $\forall w\in W_*$, $\nu(w)=\sum_{j\in S}\nu(wj)$.
(PM2) $\forall w\in W_*\setminus\{\emptyset\}$, $\forall j\in S$, $\lim_{n\to\infty}\nu(wj^n)=0$.

さらにνを$(K,S,\{F_j\}_{j\in S})$上の前測度とするとき，$u\in C(K)$のνに関する積分$\int_K u\,d\nu\in\mathbb{R}$を

$$\int_K u\,d\nu := \lim_{m\to\infty}\sum_{w\in W_m} u(F_w(q_1))\nu(w) \quad \text{-----------}(1.53)$$

で定義し，各$u,v\in C(K)$に対し$\langle u,v\rangle_\nu:=\int_K uv\,d\nu$, $\|u\|_\nu:=(\int_K u^2\,d\nu)^{1/2}=\langle u,u\rangle_\nu^{1/2}$と定める．

演習1.2 νを$(K,S,\{F_j\}_{j\in S})$上の前測度とする．
(1) $u\in C(K)$とする．このとき(1.53)の極限値が存在することを示せ．
(2) $\langle\cdot,\cdot\rangle_\nu: C(K)\times C(K)\to\mathbb{R}$は$C(K)$上の内積であることを示せ．

命題1.22 νを$(K,S,\{F_j\}_{j\in S})$上の前測度とする．このとき内積$\mathcal{E}_\nu:=\mathcal{E}+\langle\cdot,\cdot\rangle_\nu$の下で$\mathcal{F}$は完備(すなわち$(\mathcal{F},\mathcal{E}_\nu)$はHilbert空間)である．

証明 まず$u\in\mathcal{F}$と$x,y\in K$を任意に取ると，定理1.10により

$$|u(x)|^2\le(|u(x)-u(y)|+|u(y)|)^2\le 2|u(x)-u(y)|^2+2|u(y)|^2 \le 800\mathcal{E}(u,u)+2|u(y)|^2 \quad \text{----}(1.54)$$

であるので，(1.54)の各辺を$x\in K$もしくは$y\in K$の連続関数とみなしそのνに関する積分を取ることにより

$$\mathcal{E}_\nu(u,u)=\mathcal{E}(u,u)+\int_K u^2\,d\nu\le(1+800\nu(\emptyset))\mathcal{E}(u,u)+2\nu(\emptyset)|u(y)|^2, \quad (1.55)$$

$$|u(x)|^2\le 800\mathcal{E}(u,u)+2\nu(\emptyset)^{-1}\int_K u^2\,d\nu\le(800+2\nu(\emptyset)^{-1})\mathcal{E}_\nu(u,u). \quad (1.56)$$

さて，$\{u_n\}_{n=1}^\infty\subset\mathcal{F}$は$\lim_{k\wedge\ell\to\infty}\mathcal{E}_\nu(u_k-u_\ell,u_k-u_\ell)=0$を満たすとする．このとき(1.56)により$\forall k,\ell\in\mathbb{N}$,

$$0\le|u_k(q_1)-u_\ell(q_1)|\le(800+2\nu(\emptyset)^{-1})^{1/2}\mathcal{E}_\nu(u_k-u_\ell,u_k-u_\ell)^{1/2}\xrightarrow{k\wedge\ell\to\infty}0$$

なので$\{u_n(q_1)\}_{n=1}^\infty$は$\mathbb{R}$におけるCauchy列であり，従って極限値$a:=\lim_{n\to\infty}u_n(q_1)\in\mathbb{R}$が存在する．また定理1.20(の証明中のclaim)により$\exists u\in\mathcal{F}$, $\lim_{n\to\infty}\mathcal{E}(u-u_n,u-u_n)=0$かつ$u(q_1)=a$．すると$y=q_1$に対する(1.55)により$\forall n\in\mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}0&\le\mathcal{E}_\nu(u-u_n,u-u_n)\\&\le(1+800\nu(\emptyset))\mathcal{E}(u-u_n,u-u_n)+2\nu(\emptyset)|(u-u_n)(q_1)|^2\\&=(1+800\nu(\emptyset))\mathcal{E}(u-u_n,u-u_n)+2\nu(\emptyset)|a-u_n(q_1)|^2\\&\xrightarrow{n\to\infty}0\end{aligned}$$

なので$\lim_{n\to\infty}\mathcal{E}_\nu(u-u_n,u-u_n)=0$となり，ゆえに$\mathcal{F}$は内積$\mathcal{E}_\nu$により定まる距離関数に関し完備である． ■

1.5 SG上の標準Dirichlet形式IV：強局所的な正則対称Dirichlet形式としての$(\mathcal{E},\mathcal{F})$

本小節では(DF4)($(\mathcal{E},\mathcal{F})$の強局所性)を証明した後，ここまでに示した$(\mathcal{E},\mathcal{F})$の性質を定理1.24にまとめる．$f\in C(K)$に対し$\mathrm{supp}_K[f]:=\overline{\{x\in K\mid f(x)\neq0\}}^K$とおく．

命題1.23 $(\mathcal{E},\mathcal{F})$は強局所的である，すなわち$\exists a\in\mathbb{R}$, $\mathrm{supp}_K[u]\cap\mathrm{supp}_K[v-a\mathbb{1}_K]=\emptyset$なる任意の$u,v\in\mathcal{F}$に対し$\mathcal{E}(u,v)=0$.

証明 $\delta:=\inf\{|x-y|\mid x\in\mathrm{supp}_K[u],\ y\in\mathrm{supp}_K[v-a\mathbb{1}_K]\}$(ただし$\inf\emptyset:=\infty$)とおくと，$\mathrm{supp}_K[u]$, $\mathrm{supp}_K[v-a\mathbb{1}_K]$が互いに交わらないコンパクト集合であることから$\delta>0$であり，よって$m\in\mathbb{N}$を$2^{-m}<\delta$となるように取ることができる．すると各$w\in W_m$に対し$F_w(K)$は$\mathrm{supp}_K[u]$, $\mathrm{supp}_K[v-a\mathbb{1}_K]$の両方と交わることはないため$u\circ F_w=0$または$v\circ F_w=a\mathbb{1}_K$であり，従って命題1.9により$\mathcal{E}(u,v)=\sum_{w\in W_m}\left(\frac{5}{3}\right)^m\mathcal{E}(u\circ F_w,v\circ F_w)=0$となる． ■

正則対称Dirichlet形式の理論([11,8,13]参照)と記述をそろえるため, $C_c(K):=\{f\in C(K)\mid \mathrm{supp}_K[f]$ はコンパクト$\}$ とおく(今の状況ではKがコンパクトなので $C_c(K)=C(K)$ である).

定理1.24 ν を $(K,S,\{F_j\}_{j\in S})$ 上の前測度とする.このとき $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ は (K,ν) 上の強局所的な正則対称Dirichlet形式である,すなわち次が成り立つ:

(DF1)(閉性) $(\mathcal{F},\mathcal{E}_\nu)$ はHilbert空間である(ただし $\mathcal{E}_\nu:=\mathcal{E}+\langle\cdot,\cdot\rangle_\nu$).

(DF2)(Markov性) $\forall u\in\mathcal{F}$, $u^+\wedge 1\in\mathcal{F}$ かつ $\mathcal{E}(u^+\wedge 1,u^+\wedge 1)\leq\mathcal{E}(u,u)$.

(DF3)(正則性) $\mathcal{F}\cap C_c(K)$ は $(\mathcal{F},\mathcal{E}_\nu)$ と $(C_c(K),\|\cdot\|_{\sup})$ において稠密である.

(DF4)(強局所性) $\exists a\in\mathbb{R}$, $\mathrm{supp}_K[u]\cap\mathrm{supp}_K[v-a\mathbb{1}_K]=\emptyset$ なる任意の $u,v\in\mathcal{F}\cap C_c(K)$ に対し $\mathcal{E}(u,v)=0$.

証明 (DF1)は命題1.22で,(DF2)は系1.13-(1)で,(DF4)は命題1.23で既に示した.(DF3)については,$\mathcal{F}\cap C_c(K)=\mathcal{F}$ なので前半は自明,後半は定理1.18で既に示した. ■

1.6 SG上のLaplacianとそのスペクトル分解

定義1.26 ν を $(K,S,\{F_j\}_{j\in S})$ 上の前測度とする.このとき $\mathcal{D}[\Delta_\nu]\subset\mathcal{F}$ と $\Delta_\nu:\mathcal{D}[\Delta_\nu]\to C(K)$ を次で定める:

▷ $\mathcal{D}[\Delta_\nu]:=\{u\in\mathcal{F}\mid \exists f\in C(K), \forall v\in\mathcal{F}, \mathcal{E}(u,v)=\langle f,v\rangle_\nu\}$

(これは明らかに $C(K)$ の線型部分空間である.)

▷ $\Delta_\nu u:=-f$ (ただし f は $\forall v\in\mathcal{F}, \mathcal{E}(u,v)=\langle f,v\rangle_\nu$ なる $C(K)$ の元)

(定理1.18により各 $u\in\mathcal{D}[\Delta_\nu]$ に対しそのような f は唯1つであり(補題1.25参照),すると明らかに Δ_ν は線型写像である.)

Δ_ν を $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ に対応する ν-Laplacian と呼ぶ.

定理1.27 ν を $(K,S,\{F_j\}_{j\in S})$ 上の前測度とする.このとき $\exists\{\lambda_n^\nu\}_{n=1}^\infty\subset[0,\infty)$ 非減少, $\exists\{\varphi_n^\nu\}_{n=1}^\infty\subset\mathcal{D}[\Delta_\nu]$,

(1)(φ_n^ν は固有値 λ_n^ν の固有関数) $\forall n\in\mathbb{N}$, $-\Delta_\nu\varphi_n^\nu=\lambda_n^\nu\varphi_n^\nu$.

(2)($\{\varphi_n^\nu\}_{n=1}^\infty$ は正規直交系) $\forall n,k\in\mathbb{N}$, $\langle\varphi_n^\nu,\varphi_k^\nu\rangle_\nu=\begin{cases}1 & (n=k),\\ 0 & (n\neq k).\end{cases}$

(3)($\{\varphi_n^\nu\}_{n=1}^\infty$ は完全) $f\in C(K)$ が $\forall n\in\mathbb{N}$, $\langle f,\varphi_n^\nu\rangle_\nu=0$ を満たすならば $f=0$.

さらに $\lim_{n\to\infty}\lambda_n^\nu=\infty$.

定理1.27は定理1.18,命題1.22と次の命題より得られる.

命題1.28 ν を $(K,S,\{F_j\}_{j\in S})$ 上の前測度とする.このとき包含写像 $\mathcal{F}$ は $\mathcal{E}_\nu$ と $\|\cdot\|_{\sup}$ に関してコンパクト,すなわち $\sup_{n\geq 1}\mathcal{E}_\nu(u_n,u_n)<\infty$ を満たす任意の $\{u_n\}_{n=1}^\infty\subset\mathcal{F}$ に対し $\exists u\in C(K)$, $\exists\{n_k\}_{k=1}^\infty\subset\mathbb{N}$ 狭義単調増加,

$$\lim_{k\to\infty}\|u-u_{n_k}\|_{\sup}=0.$$

§2 SG上の標準Laplacianの解析

本§では, $\mu(w):=3^{-m}$ ($m\in\mathbb{N}\cup\{0\}, w\in W_m$) で与えられる $(K,S,\{F_j\}_{j\in S})$ 上の前測度 $\mu:W_*\to(0,\infty)$ を通して定まる μ-Laplacian Δ_μ (これをSG K上の標準Laplacianと呼ぶ)に関して知られている重要な結果をいくつか紹介する.

2.1 熱核の構成

ν を $(K,S,\{F_j\}_{j\in S})$ 上の前測度とし, $\{\lambda_n^\nu\}_{n=1}^\infty\subset[0,\infty)$ と $\{\varphi_n^\nu\}_{n=1}^\infty\subset\mathcal{D}[\Delta_\nu]$ を定理1.27の通りとする.このとき

$$p_t^\nu(x,y):=\sum_{n=1}^\infty e^{-\lambda_n^\nu t}\varphi_n^\nu(x)\varphi_n^\nu(y),\quad (t,x,y)\in(0,\infty)\times K\times K$$

の右辺は $\forall T\in(0,\infty)$ に対し $[T,\infty)\times K\times K$ 上で一様収束し, Δ_ν に対応する熱核 $p^\nu=p_t^\nu:(0,\infty)\times K\times K\to[0,\infty)$ で連続なものを与えることが証明できる.詳細は[40,39,37]参照.

2.2 標準Laplacianに対応する熱核の劣Gauss型評価

定理2.1(Barlow-Perkins [6]) $d_f:=\log_2 3$, $d_w:=\log_2 5$ とおくと, $\exists c_1,c_2,c_3,c_4\in(0,\infty)$, $\forall(t,x,y)\in(0,1]\times K\times K$,

$$c_1 t^{-d_f/d_w}\exp\left(-\left(\frac{|x-y|^{d_w}}{c_2 t}\right)^{1/(d_w-1)}\right)\leq p_t^\mu(x,y)\leq c_3 t^{-d_f/d_w}\exp\left(-\left(\frac{|x-y|^{d_w}}{c_4 t}\right)^{1/(d_w-1)}\right).$$

● $d_w>2$ が極めて重要!

2.3 標準Laplacianの固有値・固有関数の性質と熱核の挙動

定理2.2 (1)(木上-Lapidus [41](一部は木上[36])) $\exists G:\mathbb{R}\to(0,\infty)$ 右連続な $\log 5$-周期関数, $0<\inf_{s\in\mathbb{R}}G(s)\leq\sup_{s\in\mathbb{R}}G(s)<\infty$, かつ $\lambda\to\infty$ のとき $\#\{n\in\mathbb{N}\mid\lambda_n^\mu\leq\lambda\}=\lambda^{d_f/d_w}G(\log\lambda)+O(1)$.

(2)(福島-島[12], Barlow-木上[5]) (1)の G は不連続(特に非定数).

特徴的な点 (i) $d_f/d_w<d_f/2$.

(ii) 極限値 $\lim_{\lambda\to\infty}\#\{n\in\mathbb{N}\mid\lambda_n^\mu\leq\lambda\}/\lambda^{d_f/d_w}$ は存在しない.

定理2.3 (1)(熊谷[42]) $\forall x\in K$, $\forall y\in K\setminus\{x\}$, $\nexists\lim_{t\downarrow 0}t^{1/(d_w-1)}\log p_t^\mu(x,y)$.

(2)(梶野[21]) $\forall x\in K$, $\nexists\lim_{t\downarrow 0}t^{d_f/d_w}p_t^\mu(x,x)$.

§3 Sierpiński carpet (SC)の場合

SCは無限分岐的である(隣接する縮小像同士の共通部分は無限集合である)ため,命題1.3のような「異なる近似レベル間の'等式'」が成り立つことは期待できず,全ての極限操作を種々の複雑な不等式評価の組み合わせにより達成しなくてはならない.これが極めて難しい.詳しくは原論文[1,48,3,4]を参照.定理2.1はこの場合にも成り立つことが[2]で示されており,定理2.3-(2)も少し弱い形でこの場合に拡張されているが([24]),定理2.2や定理2.3-(1)のこの場合への拡張はなされていない.