代数トポロジーと物理学

山下真由子

目次

1 イントロダクション

幾何学・トポロジーにおいて, 図形や多様体などの幾何学的対象を分類するというのは基本的な問題である. 代数トポロジーとは, 幾何学的対象の情報を扱いやすい代数的な情報に落として不変量を得る枠組みといえる. このように純粋数学的な問題意識から発展してきた代数トポロジーの手法が, 近年物理学に応用できることが明らかにされ, 注目を集めている. 本講義では, 代数トポロジーを物理学の分類問題に応用する基本的なアイデアを, 物性物理学や素粒子物理学に現れる例に基づいて解説する.

2　代数トポロジーとは

代数トポロジーとは, 位相空間や多様体などの幾何学的オブジェクトから群や不変量などの代数的な情報を取り出して研究する分野である．非常に大雑把には, 空間に対する不変量をシステマティックに取り出す枠組みといえる．代数トポロジーの標準的な教科書としては例えば [Hat02] などがある．まず, このような不変量の最も簡単な例である**オイラー数**を紹介する．

2.1　オイラー数と常コホモロジー群

2 次元曲面 M が与えられたとする．M を三角形分割し, 次の量を考える．

$$\chi(M) := (\text{頂点の数}) - (\text{辺の数}) + (\text{面の数}) \tag{1}$$

ここで, 有限個の三角形からなるような三角形分割が取れることを仮定している（これを M のコンパクト性とよぶ）．この量は, M の三角形分割の仕方によらないことを示すことができ, M の**オイラー数**と呼ばれる．

例 2.
- 2 次元球面 S^2 のオイラー数は $\chi(S^2) = 2$ である．
- 2 次元トーラス T^2 のオイラー数は $\chi(T^2) = 0$ である．より一般に, 穴が g 個空いた境界のない向き付可能曲面 Σ_g のオイラー数は $\chi(\Sigma_g) = 2 - 2g$ である．
- 2 次元射影平面のオイラー数は $\chi(\mathbb{R}P^2) = 1$ である．

公式 (1) は任意の次元に次のように一般化できる．n 次元の多様体 M が与えられたとき, M の三角形分割を選んで

$$\chi(M) := \sum_{k=0}^{n} (-1)^k (k \text{ 次元の面の数}) \tag{3}$$

と定義する．これは再び三角形分割によらず, M の**オイラー数**と呼ばれる．

- n-次元球面のオイラー数 $\chi(S^n)$ は n が偶数のとき 2, 奇数のとき 0 である．
- n-次元トーラスのオイラー数は $\chi(T^n) = 0$ である．

オイラー数の重要な性質は, **ホモトピー不変性**である．

事実 4. オイラー数はホモトピー不変である．つまり, ふたつの多様体 M と N が連続変

形で結べる[*1]とき, $\chi(M) = \chi(N)$ が成立する.

このように, 考えている同値関係（この場合「連続変形で結べる」という関係）で保たれる量を**不変量**とよぶ. 不変量は幾何学における分類問題に対して強力な道具となる. 実際, 2つの多様体 M と N のオイラー数を計算して値が異なれば, それらが連続変形で移り合わないと結論づけることができる.

上でオイラー数の公式 (1), (3) は天下り的に与えた. この公式はどこから生まれてきたのだろうか？実は, 代数トポロジーの最も基本的な道具である**（コ）ホモロジー群** $H^*(-;\mathbb{R})$ を使うと自然な構成であることがわかる. ここでは詳細は説明しないが, 位相空間 M と非負整数 n に対して実係数ベクトル空間 $H^n(M;\mathbb{R})$ が定義され,

$$\chi(M) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dim H^n(M;\mathbb{R}) \tag{5}$$

と表すことができる. 事実 4 は $H^n(M;\mathbb{R})$ は M に関してホモトピー不変であるという事実から従う.

2.2 ベクトル束と位相的 K 群

ここでは, 代数トポロジーの道具のもう一つの例として**位相的 K 群**を導入する. K 群は, 位相空間の上の**ベクトル束**を分類するものであり, 幾何学のさまざまな分野で基本的な道具である. また, 次節以降紹介するように, 物理との関連においても重要な役割を果たす. K 理論の教科書としては [LM89] などがある.

2.2.1 ベクトル束

ベクトル束とは, 位相空間で連続にパラメータ付けられたベクトル空間の「族」である.

例 6. 最も簡単な例として, $S^1 = [0,1]/\{0 \sim 1\}$ でパラメータ付けられた 1 次元実ベクトル空間の族を考えよう.

$$V_{\mathrm{triv}} := [0,1] \times \mathbb{R}/\{(0,v) \sim (1,v)\ \forall v \in \mathbb{R}\} \tag{7}$$

$$V_{\text{Möbius}} := [0,1] \times \mathbb{R}/\{(0,v) \sim (1,-v)\ \forall v \in \mathbb{R}\} \tag{8}$$

と定義すると, いずれの空間も S^1 に自然に写像があり, 逆像には 1 次元のベクトル空間の構造が入っている. また, それらはパラメータ空間 S^1 に対して連続に繋がっている（局

[*1] 「連続変形」の正確な定義はここでは省略する.

所的には直積の形をしている）．これらは S^1 の上のランク 1 の実ベクトル束の例であり, 互いに同型ではない. V_{triv} は自明束, $V_{\text{Möbius}}$ は Möbius の帯と呼ばれる.

例 6 からわかるように, パラメータ空間 X と非負整数 r を与えたとき, X に関して局所的には $U \times \mathbb{R}^r \to U$（$U$ は十分小さい X の部分空間）という直積の形をしていても, 全体としては（「大域的には」）必ずしも自明束 $X \times \mathbb{R}^r \to X$ ではないようなベクトル空間の連続族が考えられる．このようなものを X 上の**ベクトル束**とよぶ．各点 $x \in X$ の上に載っているベクトル空間を X のファイバーとよび, ファイバーの次元 r をベクトル束のランクと呼ぶ．さらに非自明な例をいくつか挙げておく.

例 9. 実射影空間 $\mathbb{R}P^n$ は, $\mathbb{R}^{n+1}$ の 1 次元実部分空間全体のなす空間である.

$$\mathbb{R}P^n := \{L \subset \mathbb{R}^{n+1} \mid 1\text{ 次元実部分空間 }\} \simeq S^{n+1}/\{\pm 1\}. \tag{10}$$

例えば $\mathbb{R}P^1 \simeq S^1$ である．この上に, 次のランク 1 の実ベクトル束を考える.

$$\theta_{\mathbb{R}} := \{(L, v) \in \mathbb{R}P^n \times \mathbb{R}^{n+1} \mid v \in L\} \to \mathbb{R}P^n, \quad (L, v) \mapsto L. \tag{11}$$

つまり, 各点 $L \in \mathbb{R}P^n$ の上に, その点が表す 1 次元ベクトル空間そのものが載っている, というものであり, $\mathbb{R}P^n$ の上の **tautological な実直線束**とよばれる．例 6 で現れた Möbius の帯は, $n = 1$ の場合に対応する.

この構成は複素係数でも考えることができる．複素射影空間 $\mathbb{C}P^n$ は, $\mathbb{C}^{n+1}$ の 1 次元複素部分空間全体のなす空間である.

$$\mathbb{C}P^n := \{L \subset \mathbb{C}^{n+1} \mid 1\text{ 次元複素部分空間 }\} \tag{12}$$

例えば $\mathbb{C}P^1 \simeq S^2$ である．同様に

$$\theta_{\mathbb{C}} := \{(L, v) \in \mathbb{C}P^n \times \mathbb{R}^{n+1} \mid v \in L\} \to \mathbb{C}P^n, \quad (L, v) \mapsto L \tag{13}$$

と定義すれば, ランク 1 の複素ベクトル束となる．これは $\mathbb{C}P^n$ の上の **tautological な複素直線束**とよばれる.

例 14. n 次元球面を $S^n := \{\boldsymbol{x} = (x_1, \cdots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_1^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = 1\}$ と表し, S^n に接するベクトルを集めた空間

$$TS^n := \{(\boldsymbol{x}, v) \in S^n \times \mathbb{R}^{n+1} \mid \boldsymbol{x} \perp v\} \to S^n, \quad (\boldsymbol{x}, v) \mapsto \boldsymbol{x} \tag{15}$$

を考える．これは S^n 上のランク n の実ベクトル束であり, S^n の**接束**と呼ばれる．より一般に, 滑らかな多様体 M に対して, 各点の「接ベクトル空間」が考えられ, それを集めたものとして M の接束 TM が定義される.

位相空間 X が与えられたとき, その上にどれだけ非自明なベクトル束が存在しうるか, という問いに対する答えは X のトポロジーを反映する. 実際, 1 点集合 pt 上のベクトル束は自明束しかありえないし, 単位区間 $[0,1]$ 上でも同様である. しかし $X = S^1$ を考えると非自明な実ベクトル束（Möbius の帯）が現れる. また, $X = S^1$ の場合はすべての複素ベクトル束は自明になってしまうことが示せるが, $X = \mathbb{C}P^1 \simeq S^2$ の場合, tautological な複素直線束 $\theta_{\mathbb{C}}$ は非自明な複素ベクトル束である. 与えられた位相空間に対してその上のベクトル束を分類するのはトポロジーの面白い問題であり, それを逆に X のトポロジカルな情報とみなすこともできる. それが次節で導入する**位相的 K 群** $K^0(X)$ である.

2.2.2 位相的 K 群

コンパクトな位相空間 X に対して, X 上のベクトル束を分類するようなアーベル群を定義したい. X 上のベクトル束 $E \to X$ と $F \to X$ が与えられたとき, ファイバーごとに直和をとることで, ベクトル束の直和 $E \oplus F \to X$ が定まる. こうして X 上の複素ベクトル束全体を同型で割った集合 $\mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}(X)$ には「足し算」

$$+\colon \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}(X) \times \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}(X) \to \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}(X), \quad [E] + [F] := [E \oplus F] \tag{16}$$

が定義できる. $E \oplus F \simeq F \oplus E$ であるから,「足し算」$+$ は交換法則 $[E]+[F] = [F]+[E]$ を満たすことがわかる. この「足し算」には逆元が存在しない（「引き算」ができない）ため, $\mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}(X)$ はこのままではアーベル群ではない. そのため, 技術的であるが $\mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}(X)$ の元の形式的な差 $[E] - [F]$ も許すことを考え, 次のように定義する.

$$K^0(X) := \{[E] - [F] \mid [E], [F] \in \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}(X)\} / \sim, \tag{17}$$

ここで同値関係は, 2 つの形式差 $[E_1] - [F_1]$ と $[E_2] - [F_2]$ に対して, ある実ベクトル束 $G \to X$ が存在してベクトル束の同型

$$E_1 \oplus F_2 \oplus G \simeq E_2 \oplus F_1 \oplus G \tag{18}$$

が存在するとき, そのときに限り $[E_1] - [F_1] \sim [E_2] - [F_2]$ と定義する（この同値関係を安定同値関係とよぶ[*2]）. すると $K^0(X)$ は直和によりアーベル群をなし, X の**位相的 K 群**とよばれる.

ここまでは複素係数を考えていたが, 実係数でも実ベクトル束を用いて同様の構成でアーベル群ができる. これは位相的 KO 群 $KO^0(X)$ とよばれる. 例を見てみよう.

[*2] ここで G が出てくるのは加法の結合法則を成立させるためである. 類似として, 非負整数の集合 $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ に足し算 $+$ を入れたものから, 整数全体のなすアーベル群 $\mathbb{Z}$ を作る操作を考えてみるとよい.

例 19. 一点集合 pt 上のベクトル束はすべて自明なものと同型で, ランクで分類される. ベクトル束のランクは安定同値によって保たれることもわかる. したがって $K^0(\mathrm{pt}) \simeq \mathbb{Z}$, $KO^0(\mathrm{pt}) \simeq \mathbb{Z}$ である.

例 20. S^1 上の複素ベクトル束はすべて自明束と同型であることが示せる. したがって $K^0(S^1) \simeq \mathbb{Z}$ である. 一方, 実ベクトル束を考えると, Möbius の帯 $V_{\text{Möbius}}$（例 6）は自明束と安定同値ではない. しかし, Möbius の帯を 2 つ直和すると自明束と同型である:

$$V_{\text{Möbius}} \oplus V_{\text{Möbius}} \simeq S^1 \times \mathbb{R}^2. \tag{21}$$

したがって $KO^0(S^1)$ においては $[V_{\text{Möbius}}] \neq 0$, $2[V_{\text{Möbius}}] = 0$ が成立する. 実際, $KO^0(S^1) \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2$ であることが示せる.

例 22. $\mathbb{C}P^1 \simeq S^2$ 上の tautological な複素直線束 $\theta_{\mathbb{C}}$（例 9）は非自明な複素ベクトル束であり, 何倍しても複素係数では自明束と安定同値にはならない. 実際 $K^0(S^2) \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ である. 実係数では, $\theta_{\mathbb{C}}$ の複素構造を忘れて実ベクトル束とみなしたものは, それ自体は非自明な実ベクトル束であるが, 2 つ直和すると実ベクトル束としては自明束と同型になることが示される. 実際 $KO^0(S^1) \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2$ である.

上の例でわかるように, X が連結ならば, K, KO 群のいずれからも, 自明束の生成する $\mathbb{Z}$-直和因子が自然にとりだせる. 残りの部分を $\widetilde{K}^0(X)$, $\widetilde{KO}^0(X)$ とかくのが便利である（$K^0(X) \simeq \mathbb{Z} \oplus \widetilde{K}^0(X)$, $KO^0(X) \simeq \mathbb{Z} \oplus \widetilde{KO}^0(X)$）. d 次元球面 S^d の K, KO-群は表 1 のとおりである. ここからわかるように, 球面の K 群には 2-周期性, KO 群には 8-周期

$d \pmod 8$	0	1	2	3	4	5	6	7
$\widetilde{K}^0(S^d)$	$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}$	0
$\widetilde{KO}^0(S^d)$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}/2$	$\mathbb{Z}/2$	0	$\mathbb{Z}$	0	0	0

表 1　d 次元球面 S^d の位相的 K 群, KO 群

性がある. これは K, KO 理論の **Bott 周期性**とよばれる周期性の現れである.

3　物理系の数学的記述：量子力学

この節から, 物理学と関係する話題に移ろう. 物理系を数学的に記述する枠組みは様々なものがある. ここではまず, 最も基本的なモデルのひとつである**量子力学**モデルを導入する. 量子力学モデルにおいて, 物理系は

- 複素ヒルベルト空間 H. 「ありうる物理状態全体」をあらわす空間である.
- **ハミルトニアン**とよばれる自己共役作用素 $D\colon H \to H$.

という組 (H, D) によって指定される. 作用素 D は系の「時間発展」を生成する作用素, という物理的意味がある. 具体的には, 時間が経過することにより物理状態はユニタリ作用素によって発展する. 時間 $t \geq 0$ 経過したときの対応するユニタリ作用素を $U_t\colon H \to H$ とすると, 時間の和をとることは時間発展作用素の合成に対応するはずなので,

$$U_{t+s} = U_t \circ U_s \tag{23}$$

が任意の $t, s \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ に対して成立する（このような性質をもつ族 $\{U_t\}_{t \geq \mathbb{R}_{\geq 0}}$ を 1-パラメータ半群とよぶ）. 関数解析でよく知られた定理（Stone-von Neumann の定理）より, このような族はある自己共役作用素 D を用いて $U_t = e^{itD}$ とかくことができる. この作用素 D が上に現れたハミルトニアンである.

一般に, 複素ベクトル空間 V に作用する線形作用素 $T\colon V \to V$ が与えられたとき, ベクトル $v \neq 0 \in V$ が固有値 $\lambda \in \mathbb{C}$ の固有ベクトルであるとは,

$$Tv = \lambda v \tag{24}$$

が成立することをいう.

上の設定で, ヒルベルト空間 H が有限次元の場合, D は自己共役なのであり得る固有値はすべて実数である. また, すべてのベクトル $v \in H$ はいくつかの固有ベクトルの和で書けることも示され, D の固有値を用いて H を**固有空間分解**できる.

$$H = H_{\lambda_1} \oplus H_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus H_{\lambda_n}, \tag{25}$$

ここで $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n$ は D の固有値全体を小さいものから並べたものであり, H_{λ_k} は固有値 λ_k をもつ固有ベクトルのなすベクトル空間（固有空間）である. D の固有値全体 $\sigma(D) = \{\lambda_1, \cdots, \lambda_n\} \subset \mathbb{R}$ を D の**スペクトル集合**とよぶ. このように, ハミルトニアン D は状態空間を部分空間に分解する方法を与え, 分解のラベルを与えるのが固有値全体である, と見ることができる.

H が無限次元の場合, 上の話がそのまま適用できるわけではないが, 適切な拡張が存在する. 詳細は省略するが, 自己共役作用素 D に対して, 固有値の概念を一般化することで,「スペクトル集合」$\sigma(D) \subset \mathbb{R}$ が定義され, それに（一般化された意味で）ラベル付けられた H の「スペクトル分解」が定義される. この場合, $\sigma(D)$ は上にも下にも有界とは限らないし, $\sigma(D) = [0, 1] \in \mathbb{R}$ のような形をしていてもよく, $\mathbb{R}$ の離散部分集合であるとは限

らない．また, $\lambda \in \sigma(D)$ が通常の意味での固有値であっても, λ を固有ベクトルとして持つベクトル全体のなす空間は有限次元とは限らない．

ハミルトニアンの固有値は状態の**エネルギー**を表すという物理的意味がある．つまり, H は「物理状態全体」を表す空間だったが, D のスペクトルによる分解 25 において, 各部分空間 H_{λ_k} は「エネルギー λ_k の状態全体のなす空間」とみなされる．したがって, ハミルトニアン D による H のスペクトル分解は, 「エネルギーによる分解」であると解釈される．エネルギーが低い状態ほど起こる確率が高い, というのが量子力学の基本的な考え方である．この解釈に基づくと, スペクトラム集合の下の方に属する部分空間のみを取り出して扱いたい（「低エネルギー有効理論」とよばれる）と考えるのは自然であり, 物性物理学でよく現れる状況である．これは, 数学的には次の**「スペクトルギャップ条件」**に対応する：

(a) ある $\mu \in \mathbb{R}$（**「スペクトルギャップ」**と呼ばれる）が固定され, $\mu \notin \sigma(D)$ である．

このとき, スペクトル集合の分解 $\sigma(D) = (\sigma(D) \cap [-\infty, \mu)) \sqcup (\sigma(D) \cap (\mu, \infty])$ に従って H が

$$H = H_- \oplus H_+, \tag{26}$$

と分解され, H_- が「低エネルギー有効状態」のなす空間と解釈される．

4　ギャップをもつ量子力学系の位相的 K 群による分類

この節では, 代数トポロジーの概念の例として小節 2.2.2 で紹介した位相的 K 理論が, 節 3 で導入した「スペクトルギャップを持つ量子力学系」の分類に応用できることを紹介する．ここでは**格子上の平行移動不変なハミルトニアン**の例を紹介する．これは Kitaev, Freed, Moore などにより展開された一般論（[Kit09], [FM13]）の一部である．

物性物理学では, 物理系を格子でモデル化する（「格子模型」）ことがしばしばある．最も簡単な格子の例である 1 次元整数格子 $\mathbb{Z}$ を考えよう．自然数 N（「内部自由度」を表す）を固定して, 状態空間を

$$H := l^2(\mathbb{Z}; \mathbb{C}^N) = \{f \in \mathrm{Map}(\mathbb{Z}, \mathbb{C}^N) \mid \sum_{i \in \mathbb{Z}} |f(i)|^2 < \infty\} \tag{27}$$

と定義する．この上のハミルトニアン D として, 平行移動不変であり, かつ十分「局所的」であるもの, を考えたいとする．すると数学的には, 以下の形の作用素に限られることがわ

かる：

$$D = \sum_{k=-M}^{M} a_k T_k \tag{28}$$

ここで, T_k は k-シフト作用素 $(T_k f)(i) = f(i-k)$ であり, M はある自然数で, 各 $-M \leq k \leq M$ に対して $a_k \in M_N(\mathbb{C})$ で $a_k = (a_{-k})^*$ をみたすものである. このような $\mathbb{Z}$ 上の作用素は, **フーリエ変換**して 1 次元トーラス $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z|^2 = 1\}$ 上の作用素に置き換えると扱いやすくなる. ここで, フーリエ変換とは, 以下で定まるヒルベルト空間の同型

$$\mathcal{F} \colon l^2(\mathbb{Z};\mathbb{C}) \simeq L^2(\mathbb{T};\mathbb{C}) \tag{29}$$

$$\delta_n \mapsto z^n \tag{30}$$

である. ここで整数 $n \in \mathbb{Z}$ に対して, $\delta_n \in l^2(\mathbb{Z};\mathbb{C})$ は $\delta_n(n) = 1$, $\delta_n(i) = 0 \forall i \neq n$ で定義され, $\{\delta_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ は $l^2(\mathbb{Z};\mathbb{C})$ の正規直交基底をなす. 同型 (29) によって $\mathbb{Z}$ 上の k-シフト作用素は $\mathbb{T}$ 上の z^k による掛け算作用素に対応する. したがって, 平行移動不変なハミルトニアン (28) は, フーリエ変換を通じて, $L^2(T;\mathbb{C}^N)$ 上の, 以下で与えられる自己共役な行列値の関数 $\mathcal{F}(D)$ による掛け算作用素に対応する.

$$\mathcal{F}(D)(z) = \sum_{k=-M}^{M} a_k z^k \in C^\infty(\mathbb{T}; M_N^{\mathrm{sa}}(\mathbb{C})). \tag{31}$$

ここで重要なのは, フーリエ変換後の作用素 $\mathcal{F}(D)$ は空間 $\mathbb{T}$ でパラメータ付けられた $\mathbb{C}^N$ 上の自己共役作用素の族, とみなせることである. 掛け算作用素のスペクトラムは各点での行列のスペクトラムの和集合となる.

$$\sigma(\mathcal{F}(D)) = \cup_{z\in\mathbb{T}} \sigma(\mathcal{F}(D)(z)) \subset \mathbb{R}. \tag{32}$$

したがって, 「スペクトルギャップ条件」(a) は, 以下の条件

(b) ある $\mu \in \mathbb{R}$ が固定され, すべての $z \in \mathbb{T}$ に対して, $\mu \notin \sigma(\mathcal{F}(D)(z))$ である.

と等価になる. この条件のもとで, 分解 (26) は以下のように理解できる. 各点 $z \in \mathbb{T}$ に対して, 条件 (b) により, $\mathcal{F}(D)(z)$ の μ より小さい/大きい固有空間への直和分解

$$\mathbb{C}^N = V_-(z) \oplus V_+(z) \tag{33}$$

が与えられる．$V_- := \{V_-(z)\}_{z\in\mathbb{T}}$, $V_+ := \{V_+(z)\}_{z\in\mathbb{T}}$ はそれぞれ $\mathbb{T}$ 上の複素ベクトル束となる．これを用いて, 分解 26 のフーリエ変換での像は

$$\mathcal{F}(H_\pm) = L^2(\mathbb{T}; V_\pm) \tag{34}$$

（複号同順）となる．したがって, ギャップを持つ局所的で平行移動不変なハミルトニアンの「低エネルギー有効状態」のなす空間 H_- の情報は, $\mathbb{T}$ 上のベクトル束 V_- の情報と等価になる．

今まで 1 次元格子 $\mathbb{Z}$ を考えてきたが, フーリエ変換の多変数版 ($l^2(\mathbb{Z}^d;\mathbb{C}) \simeq L^2(T^d;\mathbb{C})$) を使うことで, d 次元格子 $\mathbb{Z}^d$ に話を拡張することができる．小節 2.2.2 で説明した通り, $\mathbb{T}^d$ 上のベクトル束 V_- は元 $[V_-] \in K^0(\mathbb{T}^d)$ を定める．この対応は, ギャップを持つ平行移動不変な量子力学系のトポロジカルな分類を与えることが知られている．

事実 35. $\mathbb{Z}^d$ 上の, スペクトルギャップを持つ平行移動不変な量子力学系の連続変形[*3]による同値類全体は, $K^0(\mathbb{T}^d)$ と 1 対 1 対応する．

例 36 (2 次元 Chern insulator). 最も基本的な例として, $d = 2$ 次元の **Chern insulator** とよばれる例を紹介する．フーリエ変換後の, 2 次元トーラス $\mathbb{T}^2$ 上の作用素の族を先に与えてしまうことにする．$N = 2$ とし, $\mathbb{C}^N = \mathbb{C}^2$ 上の自己共役行列 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ を以下で与える：

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\ \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ \sigma_3 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}. \tag{37}$$

これらはパウリ行列と呼ばれ, $\sigma_i^2 = 1$, $\sigma_i\sigma_j + \sigma_j\sigma_i = 0$（$\forall i, j = 1, 2, 3,\ i \neq j$）をみたす．2 次元トーラス $T^2 \simeq \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ の座標を $(x, y) \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ と書くことにする．実数 $m \in \mathbb{R}$ を固定し, $H_m = H_m(x, y) \in C^\infty(\mathbb{T}^2; M_2^{\mathrm{sa}}(\mathbb{C}))$ を以下で定義する．

$$H_m(x, y) := \sin x \cdot \sigma_1 + \sin y \cdot \sigma_2 - (2 - m - \cos x - \cos y) \cdot \sigma_3. \tag{38}$$

このとき, m の値によって, H_m は $\widetilde{K}^0(\mathbb{T}^2) \simeq \mathbb{Z}$ の中で以下のように分類される[*4].

- $m < 0$ または $m > 4$ のとき, スペクトルギャップが $\mu = 0$ に存在する．負の固有空間に対応するベクトル束 V_- は $\mathbb{T}^2$ 上の自明束となり, $0 \in \widetilde{K}^0(\mathbb{T}^2)$ に対応する．
- $m = 0, 2, 4$ のとき, スペクトルギャップは存在しない．

[*3] 「連続変形」も数学的にきちんと定義しなければならないが, ここでは省略する．

[*4] 同型 $\widetilde{K}^0(\mathbb{T}^2) \simeq \mathbb{Z}$ には符号の不定性があるが, ひとつ固定しておくことにする．

- $0 < m < 2$ のとき, スペクトルギャップが $\mu = 0$ に存在する. V_- は非自明な複素直線束であり, $1 \in \widetilde{K}^0(\mathbb{T}^2)$ に対応する.
- $2 < m < 4$ のとき, スペクトルギャップが $\mu = 0$ に存在する. V_- は非自明な複素直線束であり, $-1 \in \widetilde{K}^0(\mathbb{T}^2)$ に対応する.

このように物理系のパラメータが特定の値（上の例の場合, $m = 0, 2, 4$）を取るときスペクトルギャップが閉じて, 前後で系の性質が変わるという現象がしばしば起こる. これは物理における「相転移」に対応し, 物質の性質の変化として実際に観測されている.

5 発展的話題

節 4 で紹介したのは, 格子上の平行移動不変な量子力学系, という単純な設定であった. 実際の物理学では色々な設定での分類問題が現れ, 対応して代数トポロジーのさまざまな道具を使う必要がある. ここではそれらの例を紹介する.

理論物理学における重要な概念のひとつに, 物理系の**対称性**がある. 格子上のギャップのある平行移動不変な量子力学系の設定で, さらに群対称性が内部自由度の空間に作用している場合を考えると, 群作用付きのベクトル束を分類する**同変 K 理論**, あるいはさらに同変ねじれ K 理論で分類されることが知られている [FM13].

一方で, 対称性がより一般の形をしているときは, 分類は非常に難しくなる. 実は, 一般的な代数トポロジーを使った分類は知られていない*5. しかしその中で, ハミルトニアンの最低固有空間が 1 次元であり最低固有値が孤立している, という性質を持つ系は, **SPT 相（Symmetry Protected Topological Phases）**とよばれ, 一般の対称性をもつ場合も分類に代数トポロジーの道具が適用可能であるとされている [FH21]. ここで用いられる代数トポロジーの道具は, **コボルディズム群**, あるいはその「双対」をなす一般コホモロジー理論である. さらに SPT 相の分類は, 物性物理学で重要なだけではなく, 素粒子物理学でも現れる**量子異常**の分類とも深く関係している. 代数トポロジーの道具を用いて素粒子物理学における量子異常を数学的に解析するなどの応用は, 現在盛んに研究されているテーマである.

*5 「対称性」という概念自体数学的に定式化は未だにされておらず, 近年理論物理学において, 群作用で与えられないような対称性が考えられるとわかってきて, 対称性の概念が大きく変わってきている. 圏論的対称性などとよばれ, ホットな研究テーマである.

参考文献

[FH21] D. S. Freed and M. J. Hopkins, *Reflection positivity and invertible topological phases*, Geom. Topol. **25** (2021) 1165–1330.

[FM13] D. S. Freed and G. W. Moore, *Twisted equivariant matter*, Ann. Henri Poincaré **14** (2013) 1927–2023.

[Hat02] A. Hatcher, *Algebraic topology*, Cambridge University Press, Cambridge, 2002.

[Kit09] A. Kitaev, *Periodic table for topological insulators and superconductors*, AIP Conf. Proc. **1134** (2009) 22–30, `arXiv:0901.2686 [cond-mat.mes-hall]`.

[LM89] H. B. Lawson, Jr. and M.-L. Michelsohn, *Spin geometry*, Princeton Mathematical Series, vol. 38, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1989.