

# 二重指数関数型数値積分公式の理論と発展

大浦拓哉

# 台形則が高精度となる積分例

1. 解析的周期関数の1周期積分
2. 解析的関数の全無限区間積分

オイラー・マクローリン展開

$$T_N - I = \sum_{j=1}^m \frac{B_{2j}}{(2j)!} h^{2j} \left( f^{(2j-1)}(b) - f^{(2j-1)}(a) \right) + R_{2m},$$

$$R_{2m} = -\frac{h^{2m}}{(2m)!} \int_0^h B_{2m} \left( \frac{x}{h} \right) \sum_{n=0}^{N-1} f^{(2m)}(a + nh + x) dx$$

から予想がつく。

# 解析的周期関数の1周期積分の例1

$$J_0(1) = \int_0^1 \cos(\sin \pi x) dx$$

を台形則

$$T_N = h \sum_{n=0}^{N-1} \cos(\sin \pi n h), \quad h = \frac{1}{N}$$

で計算

$$J_0(1) \approx 0.7651976865579665514497$$

$$T_4 \approx \underline{0.7651978750048500049770}$$

$$T_8 \approx \underline{0.7651976865579665528870}$$

## 解析的周期関数の1周期積分の例2

$$K(1/2) = \int_0^{\pi} \frac{1}{2\sqrt{1 - (1/2)^2 \sin^2 x}} dx$$

を台形則

$$T_N = h \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{2\sqrt{1 - (1/2)^2 \sin^2 nh}}, \quad h = \frac{\pi}{N}$$

で計算

$$K(1/2) \approx 1.6857503548125960428712$$

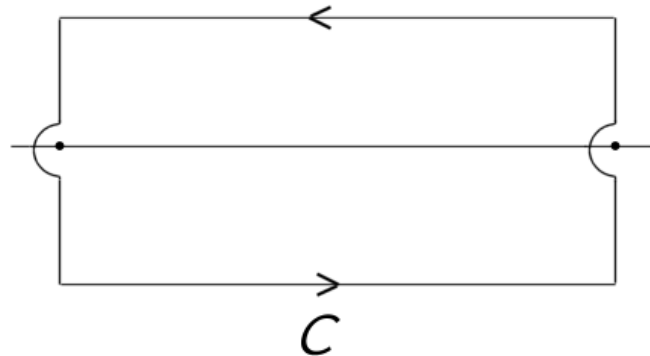
$$T_8 \approx \underline{1.6857503552806112197146}$$

$$T_{16} \approx \underline{1.6857503548125960431067}$$

# 解析的周期関数の1周期積分の誤差1

$$\int_0^1 f(x)dx - h \sum_{n=0}^{N-1} f(nh) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z)\Phi_h(z)dz,$$

$$\Phi_h(z) = \begin{cases} -\pi i - \pi \cot(\pi z/h), & \Im z > 0 \\ +\pi i - \pi \cot(\pi z/h), & \Im z < 0 \end{cases}$$



# cotの性質

$$\pi \cot(\pi z) = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=-m}^m \frac{1}{z - n},$$

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z) \pi \cot(\pi z) = h \sum_{n=0}^{N-1} f(nh)$$

一方

$$\begin{aligned} \cot(\pi z) &= i \frac{\exp(\pi iz) + \exp(-\pi iz)}{\exp(\pi iz) - \exp(-\pi iz)} \\ &= i \frac{1 + \exp(-2\pi iz)}{1 - \exp(-2\pi iz)} \\ &= \mp i \pm \frac{2i}{1 - \exp(\mp 2\pi iz)} \end{aligned}$$

## 解析的周期関数の1周期積分の誤差2

$$\int_0^1 f(x)dx - h \sum_{n=0}^{N-1} f(nh) = \Delta I_+ + \Delta I_-,$$

$$\begin{aligned} \Delta I_{\pm} &= \int_{0 \pm id}^{1 \pm id} \frac{f(z)}{1 - \exp(\mp 2\pi iz/h)} dz \\ &= \int_0^1 \frac{f(x \pm id)}{1 - \exp(2\pi d/h \mp 2\pi ix/h)} dx \end{aligned}$$

これを用いれば精密な誤差評価ができ、また

$$|\Delta I_{\pm}| \leq \int_0^1 \frac{|f(x \pm id)|}{\exp(2\pi d/h) - 1} dx = \frac{A_{\pm}}{\exp(2\pi d/h) - 1}$$

と粗い評価もできる。

# 解析的周期関数の1周期積分の誤差3

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \exp(2\pi i k x)$$

と置く

$$\int_0^1 f(x) dx = c_0,$$

$$h \sum_{n=0}^{N-1} f(nh) dx = h \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \sum_{n=0}^{N-1} \exp(2\pi i k n h) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_{Nj}$$

なぜなら

$$\sum_{n=0}^{N-1} \exp(2\pi i k n / N) = \frac{1 - \exp(2\pi i N k / N)}{1 - \exp(2\pi i k / N)} = 0 \quad k \neq 0, \pm N, \pm 2N, \dots$$



## 解析的周期関数の1周期積分の誤差4

$$f(x) = \frac{1}{2}c_0 + \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos(2\pi kx) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(2\pi kx)$$

と置く

$$\int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{2}a_0,$$

$$h \sum_{n=0}^{N-1} f(nh) dx = \frac{1}{2}(a_0 + a_N + a_{2N} + \dots)$$

ゆえに台形則は係数  $\{a_0, b_1, a_1, \dots, b_{N-1}, a_{N-1}, b_N\}$  に対応する  $2N$  項の三角関数を正しく計算する。

台形則：フーリエ級数におけるガウス型公式

# 解析的関数の全無限区間積分の例

$$\sqrt{\pi} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$$

を台形則

$$I_h = h \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-(nh)^2}$$

で計算

$$\sqrt{\pi} \approx 1.772453850905516027298$$

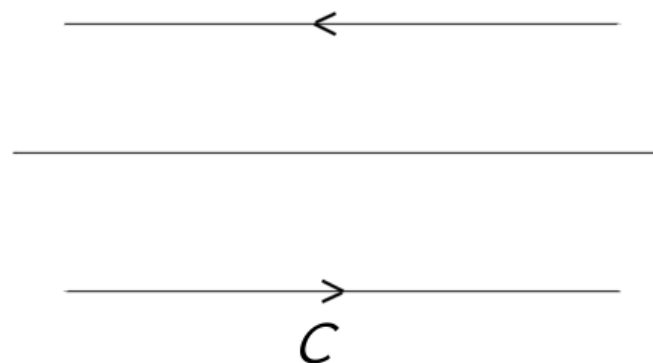
$$I_1 \approx \underline{1.772637204826652153031}$$

$$I_{1/2} \approx \underline{1.772453850905516052670}$$

# 解析的周期関数の1周期積分の誤差1

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx - h \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nh) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z)\Phi_h(z)dz,$$

$$\Phi_h(z) = \begin{cases} -\pi i - \pi \cot(\pi z/h), & \Im z > 0 \\ +\pi i - \pi \cot(\pi z/h), & \Im z < 0 \end{cases}$$



# 解析的周期関数の1周期積分の誤差2

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \max_{-d \leq y \leq d} |f(x + iy)| = 0$$

かつ

$$\int_{-\infty}^{\infty} (|f(x + id)| + |f(x - id)|) dx < +\infty$$

ならば

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx - h \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nh) = \Delta I_+ + \Delta I_-,$$

$$\begin{aligned} \Delta I_{\pm} &= \int_{-\infty \pm id}^{\infty \pm id} \frac{f(z)}{1 - \exp(\mp 2\pi iz/h)} dz \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x \pm id)}{1 - \exp(2\pi d/h \mp 2\pi ix/h)} dx \end{aligned}$$

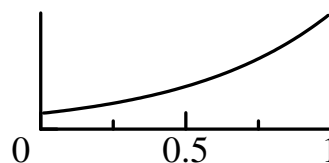
# 変数変換型数値積分公式

変数変換で1周期積分あるいは全無限区間積分に変換してから台形則を適用

- IMT 変換：1周期積分に変換
- SE 変換 (tanh 則)：全無限区間積分に変換
- DE 変換：全無限区間積分に変換
- IMT 型 DE 変換：1周期積分に変換
- DE 公式と同性能を持つIMT 型変換

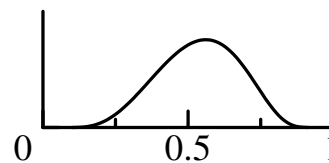
# IMT 公式

$$I = \int_0^1 f(x) dx,$$



$$\Downarrow x = \phi(t)$$

$$I = \int_0^1 f(\phi(t))\phi'(t) dt,$$



⇓ 台形則

$$I_h = h \sum_{n=1}^{N-1} f(\phi(nh))\phi'(nh), \quad h = 1/N$$

$$\phi(t) = \frac{1}{Q} \int_0^t \exp\left(-\frac{1}{s} - \frac{1}{1-s}\right) ds, \quad Q = \int_0^1 \exp\left(-\frac{1}{s} - \frac{1}{1-s}\right) ds$$

# IMT 公式の性能と改良

IMT 公式 (伊理, 森口, 高澤 1970):

$$|I - I_h| = O\left(\exp\left(-c\sqrt{N}\right)\right)$$

IMT 型 DE 変換  $x = \tanh\left(A \sinh\left(B\left(\frac{1}{1-t} - \frac{1}{1+t}\right)\right)\right)$ , (森 1978) and  
IMT-Double 変換  $x = \phi(\phi(t))$ , (室田, 伊理 1982):

$$|I - I_h| = O\left(\exp\left(-cN/(\log N)^2\right)\right)$$

IMT-Triple 変換  $x = \phi(\phi(\phi(t)))$ , (室田, 伊理 1982):

$$|I - I_h| = O\left(\exp\left(-cN/\left((\log N)(\log \log N)^2\right)\right)\right)$$

# DE公式と同性能を持つIMT型公式

$$I = \int_{-1}^1 f(x) dx$$

を以下で近似

$$I_h = h \sum_{n=1}^{N-1} f(\phi_{m,k}(-1 + nh)) \phi'_{m,k}(-1 + nh), \quad h = 2/N,$$

$$\phi_{m,k}(t) = \operatorname{erf} \left( \frac{k}{(1-t)^m} - \frac{k}{(1+t)^m} \right), \quad \operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt,$$

$$m = \frac{1}{2} \log N, \quad k = \text{const.}$$

$$\text{誤差} : |I - I_h| = O(\exp(-cN/\log N))$$



# DE 公式と同性能を持つIMT 型公式の極限

座標変換 :  $t = \tau/m, t \in (-1, 1), \tau \in (-m, m)$

DE 公式と同じ漸近性能を持つIMT 型変換 :

$$\begin{aligned}\phi_{m,k}(\tau/m) &= \operatorname{erf} \left( \frac{k}{(1 - \tau/m)^m} - \frac{k}{(1 + \tau/m)^m} \right) \\ &\sim \operatorname{erf} (2k \sinh \tau) = \phi_{*,k}(\tau) \quad : \text{DE 変換} \\ &\quad \text{as } m = \frac{1}{2} \log N \rightarrow \infty\end{aligned}$$

DE 公式と同性能を持つIMT 型公式の極限:

$$I_h \sim h' \sum_{n=-N/2}^{N/2} f(\phi_{*,k}(nh')) \phi'_{*,k}(nh'), \quad h' = mh = \frac{\log N}{N}$$

→ DE 公式 (erf-sinh 変換)