ヒッチン方程式とその周辺

京都大学数理解析研究所・望月拓郎

はじめに　この公開講座では, ヒッチン方程式について紹介します. 数学には大事な方程式が数多くあります. その方程式の専門家以外にもどのような方程式であるかは知られているものもたくさんあります. 例えば, 熱方程式やシュレーディンガー方程式, ナヴィエ・ストークス方程式等々は, 物理現象との関係で興味を持たれる方も多いと思います.

ヒッチン方程式はそのようなレベルで標準的に知られているものではありませんし, 身近な物理現象を記述するものでもありません. しかし, 幾何学的にはとても面白い方程式で, 微分幾何学, トポロジー, 代数幾何学といったいくつかの分野を結びつけます. ヒッチンが彼の方程式に関連しておこなった研究は, 現在では数論や代数解析学といった当初は関連するとは思えなかったような分野にも大きな影響を及ぼすにいたっています. そのような研究の見取り図について説明したいというのがこの講義の当初の目論見でした. しかし, 大学の数学科の幾何学の知識を仮定せずに, ヒッチン方程式に関連する対象をある程度きちんと説明するのは思っていた以上に大変でした. この講義ノートでは, ヒッチン方程式の研究で最も重要な出発点となる, ヒッチン方程式の解とヒッグス束と局所系の対応を説明することを目指しました.

事前に準備した講義ノートを修正しました. まだ数学的なミスや日本語としておかしな部分が多々残っているかと思いますがご容赦ください. 拙い講義にお付き合いくださった参加者の方々に感謝します.

1　第一回 ガウス平面上のヒッチン方程式

1.1　平面上のヒッチン方程式

ヒッチン方程式を, 2 階の場合に述べます. 簡単のため, まずは平面上で考えることにします.

1.1.1　2 次正方行列

行列に関連する記号を説明します. $\mathbb{R}$ は実数全体をあらわし, $\mathbb{C}$ は複素数全体をあらわします. 複素数を成分にもつ 2 次正方行列全体を $M_2(\mathbb{C})$ であらわします.

$$M_2(\mathbb{C}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \,\middle|\, a, b, c, d \in \mathbb{C} \right\}.$$

I_2 と 0 はそれぞれ単位行列と零行列をあらわします.

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad 0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

零行列は別の記号を使う方が良いかもしれませんが煩わしいので 0 であらわします.

よく知られているように, $A, B \in M_2(\mathbb{C})$ の積 AB が次のように定まります.

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}, \qquad AB = \begin{pmatrix} ap+br & aq+bs \\ cp+dr & cq+ds \end{pmatrix}.$$

転置行列・共役・随伴行列　2 次正方行列 A に対して, $(1,2)$ 成分と $(2,1)$ 成分をいれかえたものを A の転置行列といい, t を左肩にのせてあらわします. また, 各成分の複素共役をとったものを $\overline{A}$ であらわします. 転置行列の複素共役 ${}^t\overline{A}$ は随伴行列と呼ばれます. この講義では $A^\dagger$ のようにあらわします. これは一般的な記号ではなくて, 線形代数の教科書によっては A^* のようにあらわす場合もあると思います.

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \qquad {}^tA = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}, \qquad \overline{A} = \begin{pmatrix} \overline{a} & \overline{b} \\ \overline{c} & \overline{d} \end{pmatrix}, \qquad A^\dagger = \begin{pmatrix} \overline{a} & \overline{c} \\ \overline{b} & \overline{d} \end{pmatrix}.$$

簡単にわかることですが, 行列のかけ算について

$$\overline{A \cdot B} = \overline{A} \cdot \overline{B}, \qquad {}^t(A \cdot B) = {}^tB \cdot {}^tA, \qquad (A \cdot B)^\dagger = B^\dagger \cdot A^\dagger.$$

となります.

交換子　$A, B \in M_2(\mathbb{C})$ に対して,

$$[A, B] = A \cdot B - B \cdot A$$

とおき, A と B のブラケット, あるいは交換子といいます. 交換子が次の性質をみたすことは, $[B, A] = -[A, B]$ が成り立ちます.

行列式　$A \in M_2(\mathbb{C})$ の行列式 $\det(A)$ が次のように定まります.

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \qquad \det(A) = ad - bc.$$

$\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$ が成り立ちます.

可逆な行列　$A \in M_2(\mathbb{C})$ が可逆であるとは $AB = BA = I_2$ となる行列 B が存在することを意味します. このとき, B を A の逆行列といい, A^{-1} であらわします. A が可逆であるための必要十分条件は $\det(A) \neq 0$ であり, A^{-1} が次のように与えられます.

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \qquad A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

A, B が可逆のとき, AB も可逆であり, $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ が成り立ちます.

　可逆な 2 次正方行列全体を $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ であらわします.

$$\mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) = \left\{ A \in M_2(\mathbb{C}) \;\middle|\; \det(A) \neq 0 \right\}.$$

1.1.2　ヒッチン方程式 (2 階の場合)

以上の準備のもとで, ヒッチン方程式を紹介します. A と Θ を $\mathbb{R}^2$ 上の $M_2(\mathbb{C})$ に値を持つ関数とします. さらに, A と Θ の各成分は $\mathbb{R}^2$ の座標 (x, y) に関して何回でも微分できることを仮定します. (何回でも微分できることを, C^∞-級という言い方をします.) $\partial_x A$ は A の各成分を x について偏微分したものとします.

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \qquad \partial_x A = \begin{pmatrix} \partial_x a & \partial_x b \\ \partial_x c & \partial_x d \end{pmatrix},$$

$\partial_y A$, $\partial_x\Theta$, $\partial_y\Theta$ 等も同様です.

この時, ヒッチン方程式とは, 関数の組 (A,Θ) に関する次のような方程式とみることができます.

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(\partial_x+\sqrt{-1}\partial_y)\Theta+[A,\Theta]=0 \\ \frac{1}{2}(\partial_x+\sqrt{-1}\partial_y)A^\dagger+\frac{1}{2}(\partial_x-\sqrt{-1}\partial_y)A+[A,A^\dagger]+[\Theta,\Theta^\dagger]=0. \end{cases}$$

もう少し簡単に書くために, 複素座標 $z=x+\sqrt{-1}y$ を用いることにして, $\partial_{\overline{z}}:=\frac{1}{2}(\partial_x+\sqrt{-1}\partial_y)$, $\partial_z:=\frac{1}{2}(\partial_x-\sqrt{-1}\partial_y)$ とおくと, ヒッチン方程式は, 次のようにあらわされます.

$$\begin{cases} \partial_{\overline{z}}\Theta+[A,\Theta]=0 \\ \partial_{\overline{z}}A^\dagger+\partial_z A+[A,A^\dagger]+[\Theta,\Theta^\dagger]=0. \end{cases} \tag{1}$$

注意 1.1 ここではヒッチン方程式をなるべく簡単に記述するためにこのように紹介しましたが, 実際には (A,Θ) を関数の組とみるよりも, 作用素 $\partial_{\overline{z}}+A$ と関数 Θ の組とみる方が良いです. こうみると, 上の方程式は

$$[\partial_{\overline{z}}+A,\Theta]=0,\quad [\partial_z-A^\dagger,\partial_{\overline{z}}+A]+[\Theta,\Theta^\dagger]=0$$

とあらわされます. ただし, $[G_1,G_2]=G_1\circ G_2-G_2\circ G_1$. $[\partial_{\overline{z}},\Theta]=\partial_{\overline{z}}(\Theta)$ 等に注意します.

1.1.3　$n\neq 2$ の場合

2 次の正方行列に値を持つ (A,Θ) について述べましたが, n を 1 以上の整数として, n 次正方行列にしても全く同じような方程式を考えることができます. n が 3 以上と $n=2$ では, 複雑さの度合いがだいぶ違いますが, 本質的にはあまり変わりません. $n=1$ と $n\geq 2$ では話が本質的に違います. $n=1$ の場合には $[A,B]=0$ なので, $\partial_{\overline{z}}\Theta=0$ と $\partial_{\overline{z}}A^\dagger+\partial_z A=0$ となります. Θ と A のそれぞれの方程式になっていますし, さらに線型な方程式になっています.

1.2　ヒッチン方程式の由来: 反自己双対方程式との関係

ヒッチン方程式の由来を説明します. 元をたどると, 物理の研究に起源を持ちます.

リー代数 $\mathfrak{u}(2)$　$\mathfrak{u}(2)\subset M_2(\mathbb{C})$ を次のように定めます.

$$\mathfrak{u}(2)=\left\{A\in M_2(\mathbb{C})\,\middle|\,A+A^\dagger=0\right\}.$$

$\mathfrak{u}(2)$ の元を 2 次の交代エルミート行列といいます. 簡単にわかることですが, $B_1,B_2\in\mathfrak{u}(2)$ ならば, $[B_1,B_2]\in\mathfrak{u}(2)$ です.

ヤン・ミルズ方程式と反自己双対方程式　4 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^4$ から $\mathfrak{u}(2)$ への 4 つの関数の組 $\boldsymbol{A}=(A_1,A_2,A_3,A_4)$ に対して "曲率" $F(\boldsymbol{A})=(F(\boldsymbol{A})_{i,j})$ を次のように定めます.

$$F(\boldsymbol{A})_{i,j}:=\partial_i A_j-\partial_j A_i+[A_i,A_j]\qquad(1\leq i,j\leq 4).$$

注意 1.2 $\boldsymbol{A}$ は "$\mathfrak{u}(2)$ への関数の組" とみるよりも, "ユニタリ接続" とみるほうが良いです. $F(\boldsymbol{A})_{i,j}=[\partial_i+A_i,\partial_j+A_j]$ です.

物理学で基礎的な重要性を持つ方程式の一つに, ヤン・ミルズ方程式 $\nabla_{\boldsymbol{A}}(*F(\boldsymbol{A}))=0$ や, あるいはもう少し簡単にした反自己双対方程式 $*F(\boldsymbol{A})=-F(\boldsymbol{A})$ というものがあります. これらは, マクスウェルの電磁場に関する方程式の一般化で, 物理に関心を持たれている方はご存知かもしれません. 反自己双対方程式を成分ごとに書くとこのようになります.

$$F(\boldsymbol{A})_{1,2}=-F(\boldsymbol{A})_{3,4}, \quad F(\boldsymbol{A})_{1,3}=-F(\boldsymbol{A})_{4,2}, \quad F(\boldsymbol{A})_{1,4}=-F(\boldsymbol{A})_{2,3}. \tag{2}$$

ヤン・ミルズ方程式や反自己双対方程式は, もともとは物理のゲージ理論で考えられていたものでしたが, 幾何学でもとても重要な方程式です. ここでは反自己双対方程式を $\mathbb{R}^4$ 上で考えていますが, もっと一般の 4 次元多様体上で考えることができます. 1980 年代から 1990 年代の初めにかけて特に詳しく研究され, 反自己双対方程式の解の空間を考えることで, 他の次元では起きないような現象が 4 次元では起きることが明らかにされました. 特に 1980 年代に, 反自己双対方程式は数学的に非常に面白い研究対象として認識されていましたし, 今の目で見てもとても面白い話だと思います.

反自己双対方程式の次元簡約とヒッチン方程式　反自己双対方程式は少し複雑な非線形な偏微分方程式です. このような場合, 変数を減らして簡単にしたものを調べるというアプローチの仕方があります. $\boldsymbol{A}$ が x_1 と x_2 に関しては定数であるという条件を課して, 変数を 2 つ減らしてみます. すると, (2) は次の連立方程式になります.

$$\begin{cases} [A_1,A_2]=-\partial_3 A_4+\partial_4 A_3+[A_3,A_4], \\ -\partial_3 A_1+[A_1,A_3]=-\partial_4 A_2-[A_4,A_2], \\ -\partial_4 A_1+[A_1,A_4]=\partial_3 A_2-[A_2,A_3]. \end{cases} \tag{3}$$

そこで,

$$(x,y)=(x_3,x_4), \qquad A=\frac{1}{2}(A_3+\sqrt{-1}A_4), \qquad \Theta=\frac{1}{2}(A_1+\sqrt{-1}A_2)$$

とおくと, 方程式 (3) はヒッチン方程式 (1) と同値であることがわかります. これは,

$$M_2(\mathbb{C})=\mathfrak{u}(2)\oplus\sqrt{-1}\mathfrak{u}(2)$$

と分解されること, すなわち, $M_2(\mathbb{C})$ の任意の元 B は $C_1, C_2 \in \mathfrak{u}(2)$ によって $B=C_1+\sqrt{-1}C_2$ のように一意的にあらわされる, という事実を使うと簡単に確認できます. このように変数を減らす操作のことを次元簡約といいます. したがって, ヒッチン方程式とは, 反自己双対方程式から 2 つ次元簡約をすることで得られた 2 次元空間上の方程式, ということになります.

こういった簡約化の操作自体は標準的な考えで, ヒッチンよりも前にこういった方程式を考えた物理学者はいらしゃったそうです. ただ, 簡約化した方程式を調べることになんの意義があるのか, ということはあまりはっきりしないためヒッチン以前にはあまり深く研究されませんでした. この方程式から, とても豊かな数学的な世界を見出したのが, ヒッチンのすごいところです.

ASD 方程式の他の次元簡約　話がそれますが, 次元簡約の操作は, 2 次元だけでなく, 1 次元, 3 次元, 4 次元でもできます. 一つ変数を減らして得られる 3 次元空間上の方程式はボゴモルニー方程式といいます. この方程式の解は, 物理学者ディラクが考えたモノポールの一般化になっているので, モノポールとよばれることもあります. 三つ変数を減らして得られるのが, ナーム方程式という 1 次元空間上の方程式になります. また, 4 つ変数を減らすと, 微分を含まない代数的な方程式になります. この代数方程式の解を ADHM データといいます. ADHM はアティヤー (Atiyah), ドリンフェルト (Drinfeld), ヒッチン (Hitchin), マニン (Manin) の頭文字です.

このうち, 反自己双対方程式とボゴモルニー方程式は物理的な興味に基づいて見出された方程式でした. また, これらの方程式の解の間にある種の双対性があります. ADHM データによってインスタントンを分類できる, ということがアティヤー・ドリンフェルト・ヒッチン・マニンによって 1980 年頃に示されました. ADHM データは純粋に代数的なデータです. 微分方程式に比べると代数的な方程式は (一般的には) はるかに扱いやすいと考えられます. そのようなデータによって複雑な微分方程式の解であるインスタントンを分類できる, というのは大きな驚きであったと思います. また, ボゴモルニー方程式の解がナーム方程式の解によって分類されるということを物理学者のナームが洞察し, 後にヒッチンや中島によって数学的にも確立されました. 微分方程式の中でも 1 変数に関する微分方程式 (常微分方程式) は, 多変数の微分方程式 (偏微分方程式) に比べるとはるかに扱いやすいと考えられます. そのようなこともあって, ADHM データやナーム方程式にも興味が持たれて研究されました.

反自己双対方程式の 2 次元簡約という操作は数学的には自然なのですが, 組織的な研究をした人はヒッチン以前にはいませんでした. 推測になりますが, こういう見方をしても, ヒッチン方程式の物理における意味や応用が, その当時は見当らなかったので, それ以上調べる動機がなかったのだと思います. しかし, ヒッチンは数学的な興味から研究を推し進めて, このヒッチン方程式が幾何学的に興味深いもので, その研究が実り豊かなものであることを見出しました.

ヒッチン方程式が特に興味深いものであった理由の一つは, 平面だけでなくもっと一般のリーマン面上で考えることができて, そして, コンパクトリーマン面上のヒッチン方程式はヒッグス束や局所系である条件をみたすものと一対一に対応することです. このことについて次回以降に説明していきます.

1.3　ゲージ変換とモジュライ

ヒッチン方程式の一つの解が得られると, ゲージ変換という操作によって, 無限にたくさんの解が自動的に得られることを述べておきます.

$U(2)=\left\{A\in M_2(\mathbb{C})\,\middle|\,AA^\dagger=I_2\right\}$ とおきます. $U(2)$ の元をユニタリ行列といいます. $A\in U(2)$ ならば $A^{-1}\in U(2)$ であることや, $A,B\in U(2)$ ならば $AB\in U(2)$ であることなどは簡単にわかります.

(A,Θ) を $M_2(\mathbb{C})$ への関数の組とします. G を $\mathbb{C}$ から $U(2)$ への C^∞-級関数でとして, G による (A,Θ) のゲージ変換 $(G^*(A),G^*(\Theta))$ を,

$$G^*(A):=G^{-1}AG+G^{-1}\partial_{\overline{z}}G,\quad G^*(\Theta):=G^{-1}\Theta G$$

のように定めます. $G^*\Theta$ は G による Θ の共役で, 線形代数的に普通の変換です. 正方行列を, ある線型変換のある基底に関する行列表示とみたとき, 基底をとりかえると行列表示がかわるのですが, その変わり方と同じ変換です. 一方, $G^*(A)$ の方は, $G^{-1}AG$ に $G^{-1}\partial_{\overline{z}}G$ もついているので, 線形代数的な変換ではなくて, 接続のゲージ変換とよばれるタイプの変換です.

$$G^{-1}\circ(\partial_{\overline{z}}+A)\circ G=\partial_{\overline{z}}+G^*(A)$$

となるようにしています. 実際,

$$G^{-1}\circ(\partial_{\overline{z}}+A)\circ G=\partial_{\overline{z}}+G^{-1}\partial_{\overline{z}}(G)+G^{-1}\circ A\circ G=\partial_{\overline{z}}+G^*(A).$$

命題 1.3 (A,Θ) がヒッチン方程式の解であることと, そのゲージ変換 $(G^*(A),G^*\Theta)$ がヒッチン方程式の解であることは同値.

ゲージ変換によって得られる解と元の解は, 単に表示の仕方を変えただけで本質的な性質は同じと思うことができまして, あまり区別する必要がありません. 先程も触れましたが, n 次元ベクトル空間 V 上の線型変換 $f : V \to V$ を考え, V の基底 $\boldsymbol{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ をとると, f は n 次正方行列 A によって $f(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v}A$ のように表示されます. 別の基底 $\boldsymbol{w} = (w_1, \ldots, w_n)$ をとると別の行列表示 $f(\boldsymbol{w}) = \boldsymbol{w}B$ が得られます. 可逆な行列 G が $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{v}G$ という条件で一意的に定まりまして, B は $G^{-1}AG$ と等しくなります. ですから, B が $G^{-1}AG$ に等しいとき, A と B はどちらも線形変換 f を表示するものなので, 線形代数的には同じ性質を持つといえます. 例えば, 階数が同じであったり, 固有値やその重複度が同じになります.

それと同じように, あるヒッチン方程式の解が与えられた時, そのゲージ変換として別の解が得られるのですが, これらはあるモノの別の表示を考えているに過ぎないので, 本質的には同じ性質を持ちます. ですから, 解の分類をする時には区別する必要がないといえます.

命題の証明について説明します. 前に注意で述べたことを用いると少し計算が簡単になります. 次の二つを確認すれば良いです.

$$[\partial_{\overline{z}} + G^*(A), G^*(\Theta)] = G^{-1} \circ [\partial_{\overline{z}} + A, \Theta] \circ G, \tag{4}$$

$$\left[\partial_z - G^*(A)^\dagger, \partial_{\overline{z}} + G^*(A)\right] + [G^*\Theta, G^*(\Theta^\dagger)] = G^{-1} \circ \Big(\left[\partial_z - A^\dagger, \partial_{\overline{z}} + A\right] + [\Theta, \Theta^\dagger]\Big) \circ G. \tag{5}$$

(4) は次のように得られます.

$$G^{-1} \circ \big([\partial_{\overline{z}} + A, \Theta]\big) \circ G = \left[G^{-1} \circ (\partial_{\overline{z}} + A) \circ G, G^{-1} \circ \Theta \circ G\right] = [\partial_{\overline{z}} + G^*(A), G^*\Theta]$$

(5) を示します.

$$G^{-1} \circ (\partial_z - A^\dagger) \circ G = \partial_z + G^{-1}\partial_z G - G^{-1}A^\dagger G = \partial_z + G^{-1}\partial_z G - (G^{-1}AG)^\dagger.$$

一方, $G^\dagger = G^{-1}$ にも注意すると次が得られます.

$$\partial_z - G^*(A)^\dagger = \partial_z - (G^{-1}AG + G^{-1}\partial_z G)^\dagger = \partial_z - (G^{-1}AG) - (\partial_{\overline{z}} G^{-1})G.$$

ここで, $G^{-1}G = I_2$ とライプニッツ則に注意すると, $0 = \partial_{\overline{z}}(G^{-1}G)\partial_{\overline{z}}(G^{-1})G + G^{-1}\partial_{\overline{z}}(G)$ なので,

$$G^{-1} \circ (\partial_z - A^\dagger) \circ G = \partial_z + (G^*(A))^\dagger$$

が得られます. したがって,

$$\begin{aligned} G^{-1}\Big(\left[\partial_z - A^\dagger, \partial_{\overline{z}} + A\right] + [\Theta, \Theta^\dagger]\Big) \circ G &= \Big[G^{-1}(\partial_z - A^\dagger)G, G^{-1}(\partial_{\overline{z}} + A\Big])G, + \Big[G^{-1}\Theta G, G^{-1}\Theta^\dagger G\Big] \\ &= \left[\partial_z - (G^*(A))^\dagger, \partial_{\overline{z}} + G^*(A)\right] + [G^*\Theta, G^*(\Theta)^\dagger]. \end{aligned} \tag{6}$$

∎

注意 1.4 ヒッチン方程式の解の分類をしたい時には, 解そのものではなくて, 解のゲージ変換による同値類を考えることになります. つまりゲージ変換でうつりあう解は同じとみなすことで, 解全体のなす集合をつぶして得られる集合を考えます. 解の同値類全体のことをモジュライ空間といいます. ∎

1.4 ヒッチン方程式の解の例

ヒッチン方程式のような非線形の偏微分方程式の解を具体的に与えるのは, 一般には大変難しいです. ここでは簡単な例を紹介します.

例 1　z を変数とする多項式 $f(z)$ を用いて,

$$\Theta = \begin{pmatrix} f(z) & 0 \\ 0 & -f(z) \end{pmatrix}$$

とおくと, 組 $(0, \Theta)$ はヒッチン方程式を満たします.

実際, $\partial_{\overline{z}} z^m = 0$ であることを容易に確認できるので, $\partial_{\overline{z}} f(z) = 0$ であり, $\partial_{\overline{z}} \Theta = 0$ が得られます. また, この場合は $\Theta^\dagger = \Theta$ なので, $[\Theta, \Theta^\dagger] = 0$ が成り立ちます. したがって, $(0, \Theta)$ はヒッチン方程式をみたします.

例 2　$B \in M_2(\mathbb{C})$ が $B^\dagger = -B$ をみたすとします. 複素数 α と β を用いて, $A = \alpha B$, $\Theta = \beta B$ とおき, $\mathbb{R}^2$ 上の定数関数とみなします. すると, (A, Θ) がヒッチン方程式をみたすことを簡単に確認できます.

実際, A と Θ の与え方より, $[A, \Theta] = \alpha\beta[B, B] = 0$ が成り立ちます. また, $A^\dagger = \overline{\alpha} B^\dagger = -\overline{\alpha} B$, $\Theta^\dagger = \overline{\beta} B^\dagger = -\overline{\beta} B$ なので, 同様にして $[A, A^\dagger] = [\Theta, \Theta^\dagger] = 0$ も確認できます. さらに A, $A^\dagger$, Θ の各成分が定数なので $\partial_{\overline{z}} \Theta = \partial_{\overline{z}} A^\dagger = \partial_z A = 0$ が成り立ちます. これらより (A, Θ) がヒッチン方程式をみたすことがわかります.

例 3　$0 < r < \infty$ に対して定義される関数 $h(r)$ について,

$$\frac{1}{4}(r\partial_r)^2 h - r^3(e^{2h} - e^{-2h}) = 0$$

という方程式を考えます. パンルヴェ方程式とよばれる方程式の一種で, 詳しく研究されています. 解はたくさんあるのですが, 適切な解 h_0 を選び,

$$g(z) = |z|^{1/2} e^{h_0(|z|)}$$

とおくと, $g(z)$ は $\mathbb{C}$ 上の無限回微分可能関数を定め, さらに $g(0) \neq 0$ となることが知られています. このような h_0 と g をとり,

$$A = \partial_{\overline{z}} \begin{pmatrix} \log(g(z)^{-1/2}) & 0 \\ 0 & \log(g(z)^{1/2}) \end{pmatrix}, \qquad \Theta = \begin{pmatrix} 0 & g(z) \\ z g(z)^{-1} & 0 \end{pmatrix}$$

とおくと, ヒッチン方程式の解であることがわかります. このような解は “fiducial solution” とよばれ, 最近の研究でもよく使われています.

2　第二回 ヒッチン方程式とヒッグス束と調和写像

まず, ヒッチン方程式の解から, もっと扱いやすい $M_2(\mathbb{C})$ への正則写像が得られることを説明します. ヒッチン方程式という微分幾何的な対象が, ヒッグス束という代数幾何的な対象と結びつくことにつながります.

また, ガウス平面上のヒッチン方程式が “調和写像” という幾何学的な対象とみなせることを述べます. そして, 一般の複素領域上で同様のことを考えると, “局所系” という位相的なねじれがあらわれることを説明します. これは, ヒッチン方程式の解を局所系上の “構造” とみなせることを意味しています. このことから, ヒッチン方程式を用いた局所系の研究につながります.

2.1 ヒッチン方程式と $M_2(\mathbb{C})$ への正則写像

2.1.1 正則関数

複素領域 $\mathbb{C}$ の部分集合で境界を含まないようなものを領域とか開集合といいます．すなわち，$\mathcal{U}\subset\mathbb{C}$ が複素領域であるとは，任意の $z_0\in\mathcal{U}$ に対して十分小さな $\epsilon>0$ をとると，$B(z_0,\epsilon)\subset\mathcal{U}$ が満たされることです．ただし，$B(z_0,\epsilon):=\left\{z\in\mathbb{C}\,\middle|\,|z-z_0|<\epsilon\right\}$.

任意の $z_0,z_1\in\mathcal{U}$ に対して，連続写像 $\gamma:[0,1]\longrightarrow\mathcal{U}$ で $\gamma(0)=z_0$, $\gamma(1)=z_1$ を満たすものがとれる時，$\mathcal{U}$ は連結であるといいます．(このような γ を z_0 と z_1 をつなぐ道といいます.) つまり，$\mathcal{U}$ のある点から別の点へ，$\mathcal{U}$ 内を通ってたどり着けることです．一般の複素領域は，連結成分の和としてあらわされます.

正則関数 複素領域 $\mathcal{U}$ 上の関数 f が正則であるとは，C^∞-級であり，コーシー・リーマン方程式 $\partial_{\bar{z}}f=0$ をみたすことを意味します.

正則関数はとても良い性質を持ちます．例えば，各 $z\in\mathcal{U}$ において複素微分可能，つまり

$$f'(z)=\lim_{h\to 0}\frac{f(z+h)-f(z)}{h} \tag{7}$$

が存在します．そして，$f'(z)$ も自動的に正則関数になります．そして，各点のまわりでは収束ベキ級数としてあらわされます.

注意 2.1 ここでは，正則関数はよくわかるものとみなします．一般の正則関数は難しいのですが，代数的なもの (例えば，コンパクトリーマン面から有限個の点を除いたところの正則関数で，極しかもたないような関数) は扱いやすいです.

2.1.2 行列に関する言葉の補足

行列に関する言葉の補足をします．2次の正方行列全体を $M_2(\mathbb{C})$ であらわしました.

$M_2(\mathbb{C})$ や $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ への正則写像 写像 $\Phi:\mathcal{U}\to M_2(\mathbb{C})$ の各成分が正則写像のとき，Φ を正則写像といいます．正則写像は $\partial_{\bar{z}}\Phi=0$ をみたす写像として特徴づけられます．同様に，写像 $\Phi:\mathcal{U}\to\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ の各成分が正則写像のとき，Φ を正則写像といいます.

エルミート行列と正定値性 $H=H^\dagger$ をみたす行列をエルミート行列といいます．$\sqrt{-1}\mathfrak{u}(2)=\left\{\sqrt{-1}A\,\middle|\,A\in\mathfrak{u}(2)\right\}$ の元とみることもできます.

H をエルミート行列とするとき，$u=\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}$, $v=\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}\in\mathbb{C}^2$ に対して，

$$(u,v)_H=(u_1,u_2)H\begin{pmatrix}\overline{v_1}\\\overline{v_2}\end{pmatrix}=H_{11}u_1\overline{v_1}+H_{12}u_1\overline{v_2}+H_{21}u_2\overline{v_1}+H_{22}u_2\overline{v_2}$$

と定めます．H がエルミート行列であることから，

$$(u,v)_H=\overline{(v,u)_H}$$

であることがわかります．特に，$(u,u)_H$ は実数です.

定義 2.2 $u\neq 0$ ならば $(u,u)_H>0$ となるような H を正定値エルミート行列といいます．正定値エルミート行列全体をこのノートでは $\mathfrak{p}(2)$ であらわすことにします. ∎

注意 2.3 $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$ も 0 であらわしています．また，$(0,0)_H = 0$ は明らかです． ▮

注意 2.4 $G \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ のとき，$A = {}^t G \cdot \overline{G} \in \mathfrak{p}(2)$ です．逆に，$A \in \mathfrak{p}(2)$ に対して (一意的ではありませんが) $A = {}^t G \cdot \overline{G}$ となる G が存在することを簡単に証明できます．例えばグラム・シュミットの直交化法などを用います． ▮

2.1.3 ヒッチン方程式と $M_2(\mathbb{C})$ への正則写像

$\mathcal{U}$ を複素領域とします．$\mathcal{U}$ 上の関数の組 (A, Θ) に関してヒッチン方程式 (1) を考えることができます．さらに，ヒッチン方程式 (1) を考えることは，関数 $\Phi : \mathcal{U} \to M_2(\mathbb{C})$ と $H : \mathcal{U} \to \mathfrak{p}(2)$ の組に関する次の方程式

$$\begin{cases} \partial_{\overline{z}}(\Phi) = 0, \\ \partial_{\overline{z}}\big(\overline{H}^{-1}\partial_z \overline{H}\big) - \big[\Phi,\ \overline{H}^{-1}\Phi^\dagger \overline{H}\big] = 0. \end{cases} \tag{8}$$

を考えることと同等です．つまり，ヒッチン方程式の解の下部構造として，$M_2(\mathbb{C})$ への正則写像 Θ があらわれていることになります．ヒッチン方程式の解は，正則写像 Θ に 2 番目の方程式をみたす “エルミート計量” H を付け加えたものとみなすことができます．

どのように関連づけられるか？ (1) の解と (8) の解がどのように関連づけられるかを説明します．一般に次の二つの命題が成り立ちます．

命題 2.5 任意の C^∞-級関数 $A : \mathcal{U} \to M_2(\mathbb{C})$ に対して，

$$\partial_{\overline{z}} G + AG = 0 \tag{9}$$

をみたす C^∞-級関数 $G : \mathcal{U} \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ が存在する． ▮

命題 2.6 任意の C^∞-級関数 $H : \mathcal{U} \to \mathfrak{p}(2)$ に対して，

$$H = {}^t G \cdot \overline{G} \tag{10}$$

をみたす C^∞-級関数 $G : \mathcal{U} \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ が存在する． ▮

命題 2.6 は簡単で，前の注意で述べたことと同様です．一方，命題 2.5 の証明はそれほど簡単ではありません．二つ問題がありまして，$\mathcal{U}$ 上局所的な解の存在と大域的な解の存在です．ここでは詳細は省略します．

(A, Θ) を方程式 (1) の解とします．(9) をみたす G をとり，$G^*\Theta : \mathcal{U} \to M_2(\mathbb{C})$ と $H : \mathcal{U} \to \mathfrak{p}(2)$ を次のように定めます．

$$G^*\Theta = G^{-1}\Theta G, \qquad H = {}^t G \cdot \overline{G}.$$

命題 2.7 $(G^*\Theta, H)$ は方程式 (8) の解．

(証明の概略) 次の二つの式を示せば十分です．(元のノートにミスがありました．すみません．)

$$\partial_{\overline{z}}(G^*\Theta) = G^{-1}\big(\partial_{\overline{z}}\Theta + [A, \Theta]\big)G, \tag{11}$$

$$\partial_{\overline{z}}(\overline{H}^{-1}\partial_z \overline{H}) - [G^*\Theta, \overline{H}^{-1}(G^*\Theta)^\dagger \overline{H}] = -G^{-1}\big(\partial_z A + \partial_{\overline{z}} A^\dagger + [A, A^\dagger] + [\Theta, \Theta^\dagger]\big)G. \tag{12}$$

$A=-\partial_{\bar z}(G)G^{-1}$ を用いて $\partial_{\bar z}(G^*\Theta)$ を計算してみると,

$$\partial_{\bar z}(G^*\Theta)=\partial_{\bar z}(G^{-1}\Theta G)=G^{-1}\Big(\partial_{\bar z}\Theta-(\partial_{\bar z}G)G^{-1}\Theta+\Theta\partial_{\bar z}(G)G^{-1}\Big)G=G^{-1}(\partial_{\bar z}\Theta+[A,\Theta])G$$

となり, (11) が得られます.

(12) を示すために, まず $\partial_{\bar z}(\overline{H}^{-1}\partial_z\overline{H})$ を計算して, 次が成り立つことを示します.

$$\partial_{\bar z}(\overline{H}^{-1}\partial_z\overline{H})=-G^{-1}\big(\partial_z A+\partial_{\bar z}A^\dagger+[A,A^\dagger]\big)G. \tag{13}$$

$\overline{H}=G^\dagger\cdot G$ なのでライプニッツ則を用いると,

$$\begin{aligned}\partial_{\bar z}(\overline{H}^{-1}\partial_z\overline{H})&=\partial_{\bar z}\big(G^{-1}(G^\dagger)^{-1}\partial_z(G^\dagger)G+G^{-1}\partial_zG\big)\\&=-G^{-1}(\partial_{\bar z}G)G^{-1}(G^\dagger)^{-1}\partial_z(G^\dagger)\cdot G-G^{-1}(G^\dagger)^{-1}(\partial_{\bar z}G^\dagger)(G^\dagger)^{-1}(\partial_zG^\dagger)G\\&\quad+G^{-1}(G^\dagger)^{-1}\partial_z\partial_{\bar z}(G^\dagger)G+G^{-1}(G^\dagger)^{-1}(\partial_zG^\dagger)\cdot\partial_{\bar z}G-G^{-1}(\partial_{\bar z}G)G^{-1}\partial_zG+G^{-1}(\partial_{\bar z}\partial_zG).\end{aligned}\tag{14}$$

G がみたす式 (9) $(\partial_{\bar z}G+AG=0)$ より, 次の等式も得られます.

$$\partial_zG^\dagger+G^\dagger A^\dagger=0,\quad \partial_z\partial_{\bar z}G+(\partial_zA)G+A\partial_zG=0,\quad \partial_{\bar z}\partial_zG^\dagger+(\partial_{\bar z}G^\dagger)A^\dagger+G^\dagger\partial_{\bar z}A^\dagger=0.$$

これらを用いると, (14) の右辺は次のようになります.

$$\begin{aligned}&-G^{-1}(AA^\dagger)G-G^{-1}(G^\dagger)^{-1}(\partial_{\bar z}G^\dagger)(-A^\dagger)\cdot G+G^{-1}\big(-(G^\dagger)^{-1}\partial_{\bar z}(G^\dagger)A^\dagger-\partial_{\bar z}A^\dagger\big)G\\&\quad+G^{-1}\big(A^\dagger A\big)G-G^{-1}(-A)\partial_zG+G^{-1}\big(-(\partial_zA)G-A\partial_zG\big)\\&=-G^{-1}\big(\partial_{\bar z}A^\dagger+\partial_zA+[A,A^\dagger]\big)G\end{aligned}\tag{15}$$

となり, (13) が得られます. また, $\overline{H}^{-1}(G^*\Theta)^\dagger\overline{H}=G^{-1}\Theta^\dagger G$ なので,

$$[G^*\Theta,(G^*\Theta)^\dagger_H]=G^{-1}[\Theta,\Theta^\dagger]G \tag{16}$$

となります. (13) と (16) より, (12) が得られます. ∎

逆に, (Φ,H) を方程式 (8) の解とします. (10) をみたす $G:\mathbb{C}\to\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ をとり,

$$A=-G^{-1}\partial_{\bar z}G,\quad (G^{-1})^*\Phi=G\Phi G^{-1}$$

とおくと, 同様の計算で次の命題を確認できます.

命題 2.8 $(A,(G^{-1})^*\Phi)$ はヒッチン方程式 (1) の解. ∎

研究の一つの方針　ヒッチン方程式の解を具体的に記述するということは一般にはとても難しいことです. そもそもヒッチン方程式の解の存在も自明なことではありません. 一方, 正則関数 $\Theta:\mathcal{U}\to M_2(\mathbb{C})$ はたくさん存在しますし, その性質も比較的よくわかります. そこで, 正則関数 $\Theta:\mathcal{U}\to M_2(\mathbb{C})$ に対して (8) の解となるような $H:\mathcal{U}\to\mathfrak{p}(2)$ をみつけることや, Θ の性質によって H の性質がどのぐらい決定されるかを調べることが研究の基礎になります. こういったことについて, 第三回で触れます.

2.2　ヒッチン方程式と調和写像と局所系

2.2.1　ガウス平面上のヒッチン方程式と調和写像

関数 $H:\mathbb{C}\to\mathfrak{p}(2)$ に関する次の方程式もヒッチン方程式と同等な方程式と考えられます.

$$\partial_{\overline{z}}\big(\overline{H}^{-1}\partial_z\overline{H}\big)+\frac{1}{2}\big[\overline{H}^{-1}\partial_{\overline{z}}\overline{H},\overline{H}^{-1}\partial_z\overline{H}\big]=0. \tag{17}$$

注意 2.9 $\mathfrak{p}(2)$ はとても良い幾何的構造を持つ “対称空間” とよばれるリーマン多様体の一種です. そして, $\mathfrak{p}(2)$ を対称空間とみた場合, 方程式 (17) は写像 $H:\mathbb{C}\to\mathfrak{p}(2)$ が “調和写像” とよばれる良い性質をもつことを意味しています. 調和写像というのは, リーマン多様体の間の写像 $X\to Y$ について, エネルギーが定義されるのですが, “そのエネルギーを最小にする”, という条件から導かれる微分方程式をみたすものです. 例えば $Y=\mathbb{R}$ であれば調和関数になりますし, $X=\mathbb{R}$ であれば測地線になります. 幾何学的にはとても大事な条件です. ∎

どのように関連づけられるか？　(A,Θ) を $\mathbb{C}$ 上の (1) の解とします. まず次の補題に注意します.

補題 2.10 微分作用素 $\partial_{\overline{z}}+A+\Theta^\dagger$ と $\partial_z-A^\dagger+\Theta$ は可換. すなわち, 任意の微分可能な関数 $s:\mathcal{U}\to\mathbb{C}^2$ について,

$$\big(\partial_z-A^\dagger+\Theta\big)\circ\big(\partial_{\overline{z}}+A+\Theta^\dagger\big)s=\big(\partial_{\overline{z}}+A+\Theta^\dagger\big)\circ\big(\partial_z-A^\dagger+\Theta\big)s.$$

(証明の概略)　方程式 (1) の $\partial_{\overline{z}}\Theta+[A,\Theta]=0$ は, 微分作用素 $\partial_{\overline{z}}+A$ と Θ が可換であることを意味します. また, $\partial_{\overline{z}}\Theta+[A,\Theta]=0$ より

$$\partial_z\Theta^\dagger-[A^\dagger,\Theta^\dagger]=0$$

が得られますが, これは $\partial_z-A^\dagger$ と $\Theta^\dagger$ が可換であることを意味します. すると,

$$\big[\partial_z-A^\dagger+\Theta,\partial_{\overline{z}}+A+\Theta^\dagger\big]=\big[\partial_z-A^\dagger,\partial_{\overline{z}}+A\big]+[\Theta,\Theta^\dagger]=\partial_zA+\partial_{\overline{z}}A^\dagger+[A,A^\dagger]+[\Theta,\Theta^\dagger]=0$$

が得られます. ∎

次の一般的な命題が成り立ちます.

命題 2.11 複素領域 $\mathcal{U}$ の各連結成分が単連結のとき, $F_z,F_{\overline{z}}:\mathcal{U}\to M_2(\mathbb{C})$ について, 微分作用素 ∂_z+F_z と $\partial_{\overline{z}}+F_{\overline{z}}$ が可換ならば, 次の条件をみたす $G:\mathcal{U}\to\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ が存在する.

$$\partial_zG+F_zG=0,\quad \partial_{\overline{z}}G+F_{\overline{z}}G=0.$$

(単連結とは雑にいうと “穴があいていない” ということです.) ∎

これはそれほど難しくありません. $A:\mathbb{R}\to M_2(\mathbb{C})$ が与えられた時, 線型な常微分方程式 $\partial_t\boldsymbol{v}+A\boldsymbol{v}=0$ が与えられた初期値にたいして一意的な解を持ち, さらに初期値に関してなめらかに依存する, ということを用いると簡単にわかります. (可換な組 ∂_z+F_z と $\partial_{\overline{z}}+F_{\overline{z}}$ について述べてありますが, 可換な組 ∂_x+F_x と ∂_y+F_y について考えることと同値です.)

ガウス平面は単連結なので, 次の条件をみたす $G:\mathbb{C}\to\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ の存在がわかります.

$$\partial_{\overline{z}}G+(A+\Theta^\dagger)G=0,\quad \partial_zG+(-A^\dagger+\Theta)G=0. \tag{18}$$

G は次の条件もみたします.

$$\partial_zG^\dagger+G^\dagger(A^\dagger+\Theta)=0,\quad \partial_{\overline{z}}G^\dagger+G^\dagger(-A+\Theta^\dagger)=0. \tag{19}$$

この G を用いて $H:\mathbb{C}\to\mathfrak{p}(2)$ を次のように定めます.

$$H={}^t G\cdot\overline{G}.$$

命題 2.12 H は方程式 (17) をみたす.

(証明の概略) (18) と (19) を用いると, 次が得られます.

$$\overline{H}^{-1}(\partial_z\overline{H}) = G^{-1}\partial_z G + G^{-1}(G^\dagger)^{-1}(\partial_z G^\dagger)G = G^{-1}(A^\dagger - \Theta - A^\dagger - \Theta)G = -2G^{-1}\Theta G. \tag{20}$$

同様に, 次が得られます.

$$\overline{H}^{-1}\partial_{\bar z}\overline{H} = G^{-1}\partial_{\bar z} G + G^{-1}(G^\dagger)^{-1}\partial_{\bar z} G^\dagger \cdot G = G^{-1}(-A - \Theta^\dagger + A - \Theta^\dagger)G = -2G^{-1}\Theta^\dagger G. \tag{21}$$

(20) と (21) より,

$$\frac{1}{2}\big[\overline{H}^{-1}\partial_{\bar z}\overline{H},\ \overline{H}^{-1}\partial_z\overline{H}\big] = 2G^{-1}[\Theta^\dagger, \Theta]G.$$

また, (20) より

$$\begin{aligned}\partial_{\bar z}\big(\overline{H}^{-1}\partial_z\overline{H}\big) &= 2G^{-1}(\partial_{\bar z}G)G^{-1}\Theta G - 2G^{-1}(\partial_{\bar z}\Theta)G - 2G^{-1}\Theta(\partial_{\bar z}G)\\ &= 2G^{-1}(-A-\Theta^\dagger)\Theta\cdot G - 2G^{-1}(\partial_{\bar z}\Theta)\cdot G - 2G^{-1}\Theta(-A-\Theta^\dagger)\cdot G\\ &= -2G^{-1}\big([A+\Theta^\dagger, \Theta] + \partial_{\bar z}\Theta\big)\cdot G. \end{aligned}\tag{22}$$

あわせると,

$$\partial_{\bar z}\big(\overline{H}^{-1}\partial_z\overline{H}\big) + \frac{1}{2}\big[\overline{H}^{-1}\partial_{\bar z}\overline{H},\ \overline{H}^{-1}\partial_z\overline{H}\big] = 2G^{-1}(\partial_{\bar z}\Theta + [A,\Theta])G = 0$$

が得られます. ∎

逆に, H を (17) の解とします. $H = {}^t\!G\overline{G}$ となる $G : \mathbb{C} \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ が存在します. このような G を用いて

$$A = \frac{1}{2}\Big(-(\partial_{\bar z}G)G^{-1} + (G^\dagger)^{-1}\partial_{\bar z}G^\dagger\Big), \qquad \Theta = \frac{1}{2}\Big(-(\partial_z G)G^{-1} - (G^\dagger)^{-1}\partial_z(G^\dagger)\Big). \tag{23}$$

とおきます. 同様の計算で, 次の命題を確認できます.

命題 2.13 (A, Θ) は方程式 (1) の解. ∎

2.2.2 一般の複素領域上のヒッチン方程式

一般の複素領域上では方程式 (1) と方程式 (17) は同等ではありません. (17) の解 H から (1) の解は前節と同様に構成できます. つまり, $H = {}^t\!G \cdot \overline{G}$ となる G が存在するので, これを用いて, (23) のように (A, Θ) を定めることで (1) の解が得られます. しかし, 逆は一般にはうまくいきません. 命題 2.11 では複素領域 $\mathcal{U}$ が “単連結”, つまり $\mathcal{U}$ に穴があいていないという仮定が必要です. $\mathcal{U}$ が単連結でない場合, (1) の解 (A, Θ) から (17) の解を構成できるとはかぎりません. 否定的な言い方をしていますが, これは悪いことではなくて, むしろヒッチン方程式の意義と密接に関わることです.

局所系 ヒッチン方程式が $\mathcal{U}$ のトポロジーと関連してくることを説明するために, $\mathbb{C}$-局所系を導入します. ここでは安直に次のようなものを考えます. 複素部分領域 $\mathcal{U}_i \subset \mathcal{U}$ $(i \in \Lambda)$ を $\mathcal{U} = \bigcup_{i\in\Lambda}\mathcal{U}_i$ となるようにとります. ただし, 各 $\mathcal{U}_i$ は単連結とします. 次の条件をみたす関数 $K_{i,j} : \mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ の組 $\boldsymbol{K} = (K_{i,j})_{i,j\in\Lambda}$ を $\mathcal{U}$ 上の階数 2 の $\mathbb{C}$-局所系といいます.

- $K_{i,j}$ は局所定数. すなわち, $\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j$ の各連結成分上で定数.
- $K_{i,i} = I_2$, $K_{i,j} = K_{j,i}^{-1}$.
- (1 コサイクル条件) $\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j \cap \mathcal{U}_k$ 上で $K_{i,j} \cdot K_{j,k} = K_{i,k}$.

注意 2.14 このような述べ方は被覆 $\{\mathcal{U}_i\}_{i\in\Lambda}$ の取り方に依存するので本来は好ましくありません. 通常は, 局所系はある良い性質を持つ層として定式化されます. 局所系の間の射が定義されて, 圏となります. そして, $\mathcal{U}$ が連結ならば, 階数 2 の局所系のなす圏と $\mathcal{U}$ の基本群 $\pi_1(\mathcal{U})$ から $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ への準同型のなす圏は同値です. 一般に, 基本群の準同型を考えることは, 空間の性質を理解する上で意義があります. ▮

局所系でひねられた調和写像　局所系 $\boldsymbol{K}$ でひねられた $\mathcal{U}$ から $\mathfrak{p}(2)$ への写像とは, 写像 $H_i : \mathcal{U}_i \to \mathfrak{p}(2)$ $(i \in \Lambda)$ の組 $\boldsymbol{H} = (H_i)_{i\in\Lambda}$ で

$$H_j = {}^tK_{i,j} H_i \overline{K_{i,j}}$$

という条件をみたすものとします. 各 H_i が方程式 (17) をみたすとき, $\boldsymbol{H}$ は局所系 $\boldsymbol{K}$ でひねられた $\mathcal{U}$ から $\mathfrak{p}(2)$ への調和写像といいます.

注意 2.15 $K_{i,j} = I_2$ が全ての $i, j \in \Lambda$ について成り立つならば, 局所系 $\boldsymbol{K}$ でひねられた $\mathcal{U}$ から $\mathfrak{p}(2)$ への写像とは $\mathcal{U}$ から $\mathfrak{p}(2)$ への通常の意味での写像と一致します. ▮

注意 2.16 局所系 $\boldsymbol{K}$ でひねられた $\mathcal{U}$ から $\mathfrak{p}(2)$ への写像は, 普通は, $\mathcal{U}$ の "普遍被覆空間" から $\mathfrak{p}(2)$ への写像であって, 基本群の作用に関して同変なものとして定式化します. ▮

局所系でひねられた調和写像とヒッチン方程式の解

命題 2.17 $\mathcal{U}$ 上の方程式 (1) の解 (A, Θ) から, 局所系 $\boldsymbol{K} = (K_{i,j})_{i,j\in\Lambda}$ と $\boldsymbol{K}$ でひねられた $\mathfrak{p}(2)$ への調和写像が得られる.

(証明の概略)　(A, Θ) を (1) の解とします. $G_i : \mathcal{U}_i \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ を

$$\partial_{\bar z} G_i + (A + \Theta^\dagger) G_i = 0, \qquad \partial_z G_i + (-A^\dagger + \Theta) G_i = 0$$

をみたすようにとります. $K_{i,j} = G_i^{-1} G_j$ とおきます. 構成より, $K_{i,i} = I_2$, $K_{i,j} = K_{j,i}^{-1}$ であり, 1 コサイクル条件もみたされます. 次の補題によって, $\boldsymbol{K} = (K_{i,j})_{i,j\in\Lambda}$ は局所系を定めます.

補題 2.18 $\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j$ において, $\partial_z (K_{i,j}) = 0$, $\partial_{\bar z} K_{i,j} = 0$ が成り立つ. すなわち, $K_{i,j}$ は局所定数関数である.

(証明の概略)　記号を簡単にするために, $F_z = -A^\dagger + \Theta$, $F_{\bar z} = A + \Theta^\dagger$ とおきます. $\partial_{\bar z} G_i + F_{\bar z} G_i = 0$ より $\partial_{\bar z} G_i^{-1} - G_i^{-1} F_{\bar z} = 0$ が得られます. したがって,

$$\partial_{\bar z}(G_i^{-1} G_j) = \partial_{\bar z}(G_i^{-1}) G_j + G_i^{-1} \partial_{\bar z}(G_j) = G_i^{-1} F_{\bar z} G_j + G_i^{-1}(-F_{\bar z} G_j) = 0.$$

同様に, $\partial_z (G_i^{-1} G_j) = 0$ が得られます. ▮

$H_i = {}^tG_i \overline{G_i} : \mathcal{U}_i \to \mathfrak{p}(2)$ は (17) の解であり, 構成より, $H_j = {}^tK_{i,j} \cdot H_i \cdot \overline{K_{i,j}}$ が成り立ちます. すなわち, (H_i) は $\boldsymbol{K}$ でひねられた $\mathfrak{p}(2)$ への調和写像を定めます. ▮

逆に, 局所系 $\boldsymbol{K}$ によってひねられた調和写像 (H_i) が与えられたとします. 最も素朴なレベルでのリーマン・ヒルベルト対応を用いると, 局所系 $\boldsymbol{K}$ に対応する平坦束 (V, ∇) が得られます. 方程式 (17) を V のエルミート計量についての方程式と読みかえることができます. $\mathcal{U}$ 上のエルミート計量付ベクトル束は必ず正規直交枠を持つことを用いると, (1) の解が得られます.

3　第三回 ヒッチン方程式の解析

第二回で, ヒッチン方程式から $M_2(\mathbb{C})$ への正則写像が得られるということを述べました. 今回は, この正則写像を出発点にしたヒッチン方程式の解析について紹介します.

3.1　境界値問題

$R>0$ に対して, $B(R)=\left\{z\in\mathbb{C}\,\middle|\,|z|<R\right\}$, $\partial B(R)=\left\{z\in\mathbb{C}\,\middle|\,|z|=R\right\}$ とおきます. $\Theta : B(R)\to M_2(\mathbb{C})$ を正則写像とします. $0<R_1<R$ をとります. $\Theta_{|B(R_1)} : B(R_1)\to M_2(\mathbb{C})$ が Θ によって誘導されます. $H_1 : \partial B(R_1)\to\mathfrak{p}(2)$ を滑らかな関数とします. このとき, ドナルドソン [3] が次の重要な定理を証明しています.

定理 3.1 次の条件をみたす C^∞-級関数 $H : B(R_1)\to\mathfrak{p}(2)$ がただ一つ存在する.

- $(\Theta_{B(R_1)}, H)$ は (8) の解, *i.e.*, $\partial_{\overline{z}}(\overline{H}^{-1}\partial_z\overline{H})-[\Theta,\Theta_H^\dagger]=0$.
- $H=H_1$ が $\partial B(R_1)$ 上で成り立つ.

特に, 円板上には非自明なヒッチン方程式の解がたくさん存在していることがわかります.

3.1.1　補足

$n=1$ の場合は古典的な調和関数の話になります. つまり, $\mathcal{U}=B(R_1)$ として, $u_1 : \partial\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ が与えられている時に,

$$(\partial_x^2+\partial_y^2)u=0,\quad u_{|\partial\mathcal{U}}=u_1$$

という方程式の解が一意的に存在する, という話になります. (調和関数のディリクレ問題). 一意性は “最大値の原理” を用いて証明できます. つまり円板の上の調和関数は最大値や最小値を境界でとる, という主張からわかります. 存在は, $\mathcal{U}=B(R_1)$ の場合はポワソン核を使って解けます.

$$u(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1-|z|^2}{|e^{\sqrt{-1}\theta}-z|^2}u_1(e^{\sqrt{-1}\theta})d\theta.$$

境界が滑らかな一般の領域 $\mathcal{U}$ でも正しくて, 例えば “ディリクレの原理” を用いて証明されます. つまり, $u_{|\partial\mathcal{U}}=u_1$ をみたす関数の中で $\int_{\mathcal{U}}(|\partial_x u|^2+|\partial_y u|^2)$ が最小になるものが解になります.

3.1.2　証明の方針

ドナルドソンによる証明の方針を紹介しておきます. $\mathcal{U}=B(R_1)$ とおきます. $H_0 : \mathcal{U}\to\mathfrak{p}(2)$ を $H_{0|\partial\mathcal{U}}=H_1$ をみたすようにとります. そして, 関数 $H_t : \mathbb{R}_{\geq 0}\times\mathcal{U}\to\mathfrak{p}(2)$ に関するまず次のような方程式を考えます.

$$\overline{H}_t^{-1}\partial_t\overline{H}_t=2\partial_{\overline{z}}(\overline{H}_t^{-1}\partial_z\overline{H}_t)-2[\Theta,\Theta_{H_t}^\dagger],\quad H_{t|t=0}=H_0,\quad H_{t|\partial\mathcal{U}}=H_{0|\partial\mathcal{U}}.$$

注意 3.2 $B=\overline{H}_t\partial_{\overline{z}}(\overline{H}_t^{-1}\partial_z\overline{H}_t), \overline{H}_t[\Theta,\Theta_{H_t}^\dagger]$ は $B^\dagger=B$ をみたします.

変数を増やしてかえってわかりにくくなっているようにも思うかもしれませんが, こうすると力学系的な考え方を使うことができるようになるというメリットもあります. おおまかな議論としては, まず, $\mathbb{R}_{\geq 0}\times\mathcal{U}$ 上で解けるということがわかります. さらに, $t\to\infty$ で H_t が収束することがわかり, $\lim_{t\to\infty}H_t$ が求める解になります.

上の非線形な熱方程式が解ける, という部分も実際には二つのステップにわかれていて, 短い時間に解が存在するというのはある程度一般的な非線形熱方程式についていえることです. 長い時間でも解が存在することを示すにはこの場合に特有の議論が必要になり, いろいろ難しいこともあります.

ここではその後の収束についてどのような議論をするかについてもう少し述べます. もっと簡単化して 2 次元の力学系についてみてみます. $\mathbb{R}^2$ 上に定常的な流れがあったとすると, 各点において流れの速度ベクトル $V:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ が定まります. 今, $V(x,y)=0$ となっているような $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ を見つけたいとします. 仮に, 一つの軌道として得られる曲線 $\varphi_t:\mathbb{R}_{>0}\to\mathbb{R}^2$ について, t が大きくなるときに $\partial_t\varphi_t$ が急速に小さくなり, $\int|\partial_t\varphi_t|<\infty$ が成り立つとします. すると, これはこの曲線の長さが有限なので, $\lim_{t\to\infty}\varphi_t$ が存在することを意味します. さらに, その極限は $V=0$ となっている点になります.

上の熱方程式は, $\{H:\mathcal{U}\to\mathfrak{p}(2)\ H_{|\partial\mathcal{U}}=H_{0|\partial\mathcal{U}}\}$ という空間上で

$$\mathcal{V}(H_t)=2\overline{H}_t\big(\partial_{\overline{z}}(\overline{H}_t^{-1}\partial_z\overline{H}_t)-[\Theta,\Theta_{H_t}^\dagger]\big)$$

とおくと, ベクトル場 $\overline{\mathcal{V}(H_t)}$ に沿った流れを考えていることになります. この時に, $\mathfrak{p}(2)$ 上ではベクトル場の長さのはかり方が $H\in\mathfrak{p}(2)$ では $|V|_H=|H^{-1}V|$ で与えられることに注意します. そして, 形式的な計算で,

$$(\partial_t-2\partial_z\partial_{\overline{z}})|H_t^{-1}\overline{\mathcal{V}(H_t)}|^2\le 0$$

を確認できます. また, 形式的に考えると, $\partial\mathcal{U}$ では $\partial_tH_t=0$ なので, $t>0$ のとき $\partial\mathcal{U}$ 上では $\mathcal{V}(H_t)=0$ となり, $|H_t^{-1}\overline{\mathcal{V}(H_t)}|^2_{|\mathbb{R}_{>0}\times\partial\mathcal{U}}=0$ がなりたちます.

ここで, 次の二つのことに注意します. まず,

$$(\partial_t-2\partial_z\partial_{\overline{z}})f=0,\quad(\partial_t-2\partial_z\partial_{\overline{z}})g\le 0,\quad f_{|\mathbb{R}_{>0}\times\partial\mathcal{U}}=g_{|\mathbb{R}_{>0}\times\mathcal{U}},\quad f_{|\{0\}\times\mathcal{U}}=g_{|\{0\}\times\mathcal{U}}$$

ならば, $g\le f$ が成り立ちます. 熱方程式の最大値の原理とよばれるものです. 次に,

$$(\partial_t-2\partial_z\partial_{\overline{z}})f=0,\quad f_{|\mathbb{R}_{>0}\times\partial\mathcal{U}}=0$$

とすると, $C,\epsilon>0$ を適当にとると $|f|\le Ce^{-\epsilon t}$ が成り立ちます. 雑な議論をすると, まず, ラプラシアン $-\partial_z\partial_{\overline{z}}$ に関して固有空間分解できます. $a:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ で, $a_{|\partial\mathcal{U}}=0$ をみたすものは,

$$a=\sum_{\lambda>0}a_\lambda,\quad -2\partial_z\partial_{\overline{z}}a_\lambda=\lambda a_\lambda,\quad a_{\lambda|\partial\mathcal{U}}=0$$

という形に分解されます. すると, $f_{|t=0}=a$ となるような f は

$$f=\sum_{\lambda>0}e^{-\lambda t}a_\lambda$$

となります. したがって, (もう少し議論がいりますが) ϵ を一番小さな固有値より小さくとっておけば $|f|\le Ce^{-\epsilon t}$ となります.

この二つから, $|H_t^{-1}\overline{\mathcal{V}(H_t)}|^2\le Ce^{-\epsilon t}$ という評価が得られて, 解に収束することがわかります.

注意 3.3 ラプラシアンに関する固有空間分解をしたとき, 境界のないコンパクトリーマン面の場合, 定数関数もあるために $\lambda=0$ $a=\sum_{\lambda\ge 0}a_\lambda$ のように分解し, a_0 の項が存在するために上の議論は適用できませんし, 実際に一般には収束しません. “安定性” という条件が必要になります.

3.1.3 調和写像の場合

$\mathfrak{p}(2)$ への調和写像の境界値問題は, ディリクレの原理でも, 上で述べた熱方程式の方法でも証明できます.

定理 3.4 C^∞-級関数 $H_1 : \partial B(R_1) \to \mathfrak{p}(2)$ に対して, $H_{|\partial B(R_1)} = H_1$ をみたす調和写像 $H : B(R_1) \to \mathfrak{p}(2)$ が一意的に存在する.

3.2 シンプソンの主評価

正則関数 $\Theta : \mathcal{U} \to M_2(\mathbb{C})$ と関数 $H : \mathcal{U} \to \mathfrak{p}(2)$ が (8) をみたす時, Θ の性質から H についてどのようなことを言えるのか？ということが問題になります. ここでは “シンプソンの主評価” について述べます.

3.2.1 Θ の H に関するノルムの評価

$B(R)$ 上に (8) の解 (Θ, H) が与えられているとします. Θ に次の条件を課します.

条件 3.5 定数 $C \geq 0$ によって, $B(R)$ 上で $|\operatorname{tr}\Theta| + |\det(\Theta)| \leq C$ と抑えられる. ∎

Θ の H に関するノルム $|\Theta|_H$ が次のように定まります.

$$|\Theta|_H^2 = \operatorname{tr}\bigl(\Theta \cdot \Theta_H^\dagger\bigr) = \operatorname{tr}\bigl(\Theta \cdot \overline{H}^{-1}\Theta^\dagger \overline{H}\bigr)$$

このノルム $|\Theta|_H$ は Θ と H の性質を調べる上で, 基本的な重要性を持つ量です. これについて次の定理が成り立ちます.

定理 3.6 $0 < R_1 < R$ を固定します. R, R_1, C のみに依存する定数 C_1 が存在して, $|\Theta|_H \leq C_1$ が $B(R_1)$ 上で成り立つ.

§3.4 で特別な場合に証明のアイディアを説明します. $\operatorname{tr}(\Theta)$ や $\det(\Theta)$ は正則関数で, かなり扱いやすいものです. これらの大きさを抑えておくと, $|\Theta|_H$ の大きさも抑えられるということはヒッチン方程式の研究をする上では重要です.

3.2.2 Θ の固有空間分解

簡単のために, $\operatorname{tr}(\Theta) = 0$ の場合について述べます. (本質的な仮定ではありません.) 条件 3.5 に加えて次の条件を仮定します.

条件 3.7 ある定数 $T > 0$ によって, $|\det(\Theta)| > T$. ∎

このとき, $B(R)$ 上の正則関数 α を $\alpha^2 = -\det(\Theta)$ のようにとることができます. 条件から α は零点をもちません. そして, 正則関数 $G : B(R) \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ を適切にとると, 次のように対角化できます.

$$G^{-1}\Theta G = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & -\alpha \end{pmatrix}$$

この時, $G^*(H) : \mathcal{U} \to \mathfrak{p}(2)$ が次のように定まります.

$$G^*(H) = {}^t G \cdot H \cdot \overline{G} = \begin{pmatrix} (G^*(H))_{11} & (G^*(H))_{12} \\ (G^*(H))_{21} & (G^*(H))_{22} \end{pmatrix}.$$

$(G^*(H))_{11} > 0$, $(G^*(H))_{22} > 0$ に注意します.

定理 3.8 R_1, R, C, T のみに依存する定数 $C_2, C_3 > 0$ が存在して, $B(R_1)$ 上で

$$|(G^*(H))_{1,2}| = |(G^*(H))_{2,1}| < C_2 \exp\bigl(-C_3 T^{1/2}\bigr) \cdot |(G^*(H))_{1,1}|^{1/2} |(G^*(H))_{2,2}|^{1/2}$$

が成り立つ.

この定理は T が十分に大きいと $G^*(H)$ が対角型に近いということを意味します. さらに, $(G^{-1})^*\Theta = G^{-1}\Theta G$ と $\bigl((G^{-1})^*\Theta\bigr)^\dagger_{G^*H}$ の交換子 $\bigl[(G^{-1})^*\Theta,\ \bigl((G^{-1})^*\Theta\bigr)^\dagger_{G^*H}\bigr]$ が 0 に近付きます. これは, ヒッチン方程式の解を制御する上でとても有用です.

3.3 存在定理の例

$P(z), Q(z)$ を定数でない多項式とします. 正則関数 $\Theta : \mathbb{C} \to M_2(\mathbb{C})$ を次のように定めます.

$$\Theta = \begin{pmatrix} 0 & P \\ Q & 0 \end{pmatrix}$$

これまでに述べた定理の応用例として, 次の定理を証明の概略を述べます.

定理 3.9 ガウス平面全体上の (8) の解 (Θ, H) で

$$H = \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & \gamma^{-1} \end{pmatrix} \tag{24}$$

という形をしているものが一意的に存在する.

(証明の概略) 各 $R > 0$ について, $\Theta_R = \Theta_{|B(R)}$ とおきます. 定理3.1を用いると, $H_R : B(R) \to \mathfrak{p}(2)$ を, 次の条件をみたすようにとれることがわかります.

- $H_{R|\partial B(R)} = I_2$.
- (Θ_R, H_R) は $B(R)$ 上の (8) の解.

次の補題を示します.

補題 3.10 H_R は対角行列.

(証明の概略) まず, $(-\Theta_R, H_R)$ も (8) の解であることに注意します. そして,

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

とすると, $J^{-1}\Theta_R J = -\Theta_R$ であり, $J^* H_R = J \cdot H_R \cdot J$ であり, $(-\Theta_R, J \cdot H_R J)$ も (8) の解です. さらに, $\partial B(R)$ では $J \cdot H_R \cdot J = I_2 = H_R$ なので, 定理3.1における一意性に注意すると, $J \cdot H_R \cdot J = H_R$ が $B(R)$ 全体で成り立ちます. したがって, H_R が対角行列であることがわかります. ∎

$\gamma_R : B(R) \to \mathbb{R}_{>0}$ が

$$H_R = \begin{pmatrix} \gamma_R & 0 \\ 0 & \gamma_R^{-1} \end{pmatrix}$$

のように定まります. γ_R を用いると,

$$|\Theta_R|^2_{H_R} = \gamma_R^2 |P|^2 + \gamma_R^{-2} |Q|^2$$

のようにあらわされます.

R_0 を十分に大きくとると, $\mathbb{C}\setminus B(R_0)$ 上では $P(z), Q(z)\neq 0$ でないようにできます.

1 以上の整数 i について, $R_i = R_0 + i$ とおきます. 定理 3.6 より, 各 i について, $C_i^{(0)} > 0$ を大きくとると, $B(R_i)$ 上では

$$|\Theta_{R_j}|^2_{H_j} \leq C_i^{(0)}$$

が, 全ての $j \geq i+1$ について成り立ちます. $C_i^{(1)}$ を十分大きくとると, $B(R_i)\setminus B(R_0)$ 上で

$$\gamma_{R_j} + \gamma_{R_j}^{-1} \leq C_i^{(1)}$$

が全ての $j \geq i+1$ について成り立ちます. したがって, $C_i^{(2)}$ を十分大きくとると, $B(R_i)\setminus B(R_0)$ 上で

$$\gamma_{R_j}/\gamma_{R_{i+1}} + (\gamma_{R_j}/\gamma_{R_{i+1}})^{-1} \leq C_i^{(2)}$$

が全ての $j \geq i+1$ について成り立ちます. ここで, ヒッチン方程式の解に関する一般論 ((25) を参照) より, $\gamma_{R_j}/\gamma_{R_{i+1}} + (\gamma_{R_j}/\gamma_{R_{i+1}})^{-1}$ が劣調和関数であることがわかり, 特に最大値の原理が成り立つので, $B(R_i)$ 上で

$$\gamma_{R_j}/\gamma_{R_{i+1}} + (\gamma_{R_j}/\gamma_{R_{i+1}})^{-1} \leq C_i^{(2)}$$

が全ての $j \geq i+1$ について成り立つ.

これより, H_{R_j} $(j \geq i+1)$ は $B(R_i)$ 上では有界な範囲にとどまっていることがわかります. さらに, $\partial_{\overline{z}}(\overline{H}_{R_j}^{-1}\partial_z \overline{H}_{R_j})$ も有界にとどまることがわかるので, ソボレフ空間論についての一般論を援用することで, 収束部分列の存在がわかります. その極限として, (24) の形をしている解 H が得られます.

一意性について議論します.

$$\widetilde{H} = \begin{pmatrix} \widetilde{\gamma} & 0 \\ 0 & \widetilde{\gamma}^{-1} \end{pmatrix}$$

も解とします. 局所的に,

$$G = \begin{pmatrix} \sqrt{P} & -\sqrt{P} \\ \sqrt{Q} & \sqrt{Q} \end{pmatrix}$$

とおくと,

$$G^{-1}\Theta G = \begin{pmatrix} \sqrt{PQ} & 0 \\ 0 & -\sqrt{PQ} \end{pmatrix}, \quad {}^t G \begin{pmatrix} \widetilde{\gamma} & 0 \\ 0 & \widetilde{\gamma} \end{pmatrix} \overline{G} = \begin{pmatrix} \widetilde{\gamma}|P| + \widetilde{\gamma}^{-1}|Q| & -\widetilde{\gamma}|P| + \widetilde{\gamma}^{-1}|Q| \\ -\widetilde{\gamma}|P| + \widetilde{\gamma}^{-1}|Q| & \widetilde{\gamma}|P| + \widetilde{\gamma}^{-1}|Q| \end{pmatrix}$$

定理 3.8 を用いると, $\mathbb{C}\setminus B(R_0)$ 上で

$$\left|\widetilde{\gamma}^2 - |QP^{-1}|\right| \leq C\exp(-\epsilon|PQ|^{1/2})\left|\widetilde{\gamma}^2 + |QP^{-1}|\right|$$

がわかります. これより, $\mathbb{C}\setminus B(R_0)$ 上で,

$$\frac{\widetilde{\gamma}}{|QP^{-1}|^{1/2}} + \frac{|QP^{-1}|^{1/2}}{\widetilde{\gamma}}$$

が有界であることがわかります. したがって, ガウス平面上で $\gamma/\widetilde{\gamma}$ は上にも下にも有界であることがわかります. ヒッチン方程式についての一般論 ((26) を参照) を援用すると, $\log(\gamma/\widetilde{\gamma})$ の劣調和性がわかります. ガウス平面上の有界な劣調和関数は定数しかないので, $\log(\gamma/\widetilde{\gamma})$ は定数であることがわかります. ヒッチン方程式の一般論を用いると ((25) を参照) $H\cdot\widetilde{H}^{-1}$ が Θ と可換であることがわかり, $H\cdot\widetilde{H}^{-1} = aI_2$ $(a>0)$ という形をしていることがわかります. $\det(H\cdot\widetilde{H}^{-1}) = 1$ より, $a=1$ がわかり, $H = H^{(1)}$ が得られます. ∎

3.3.1 付録

(Θ, H_1), (Θ, H_2) が領域 $\mathcal{U}$ 上の方程式 (8) の解とします. $S : \mathcal{U} \to M_2(\mathbb{C})$ を

$$S = (\overline{H}_2)^{-1} \cdot \overline{H}_1$$

によって定めます. すると, $S^{-1/2}$ が標準的に定まり,

$$-\partial_z \partial_{\overline{z}} \operatorname{Tr}(S) = -\left|\partial_{\overline{z}}(S) S^{-1/2}\right|^2_{H_2} - \left|[\Theta, S] S^{-1/2}\right|^2_{H_2} \tag{25}$$

$$-\partial_z \partial_{\overline{z}} \log \operatorname{Tr}(S) \leq 0 \tag{26}$$

が成り立ちます.

3.4 定理 3.6 の証明のアイディア

ここでは定理 3.6 の証明のアイディア (シンプソン [8] による) を特別な場合に説明します.

(Θ, H) が (8) の解とします. 次の不等式が解析の出発点になります.

$$-\partial_z \partial_{\overline{z}} \log |\Theta|^2_H \leq -\frac{|[\Theta, \Theta^\dagger_H]|^2_H}{|\Theta|^2_H}.$$

簡単のために, $C = 0$ の場合について考えてみます. この時, Θ は $\Theta^2 = 0$ をみたすことがわかります. すると, Θ や H によらない定数 C_{10} が存在して,

$$|[\Theta, \Theta^\dagger_H]|_H \geq C_{10} |\Theta|^2_H$$

が成り立ちます. したがって,

$$-\partial_z \partial_{\overline{z}} \log |\Theta|_H \leq -C_{10} |\Theta|^2_H \tag{27}$$

が $B(R)$ 上で成り立ちます.

ここで, アールフォルスの補題を用います. $R_2 = \frac{1}{2}(R + R_1)$ として, $B(R_2)$ 上で

$$f_{R_2}(z) = \frac{1}{1 - |z/R_2|^2}$$

とおくと,

$$-\partial_z \partial_{\overline{z}} \log f_{R_2} = -\frac{1}{R_2^2} \frac{1}{(1 - |z/R_2|^2)^2} = -\frac{1}{R_2^2} f^2_{R_2}.$$

これより, $\widetilde{f}_{R_2} = R_2^{-1} C_{10}^{-1/2} f_{R_2}$ とおくと,

$$-\partial_z \partial_{\overline{z}} \log\bigl(\widetilde{f}_{R_2}\bigr) = -C_{10} \widetilde{f}^2_{R_2}.$$

したがって,

$$-\partial_z \partial_{\overline{z}} \log\bigl(|\Theta|_H / \widetilde{f}_{R_2}\bigr) \leq -C_{10}\bigl(|\Theta|^2_H - \widetilde{f}^2_{R_2}\bigr) \tag{28}$$

が $B(R_2)$ 上で成り立ちます. ここで,

$$\mathcal{Z} = \left\{ z \in B(R_2) \,\middle|\, |\Theta|_H(z) - \widetilde{f}_{R_2}(z) > 0 \right\}$$

とおきます. $\mathcal{Z} \neq \emptyset$ とすると矛盾が生じることを示します. $\mathcal{Z}$ 上では

$$-\partial_z \partial_{\overline{z}} \log\bigl(|\Theta|_H / \widetilde{f}_{R_2}\bigr) \leq 0$$

が成り立ちます. $|z| = R_2$ では $\widetilde{f}_{R_2} = \infty$ なので, $\mathcal{Z}$ が $B(R_2)$ において相対コンパクトであることがわかり, したがって, $\partial\mathcal{Z}$ 上では $\widetilde{f}_{R_2} = |\Theta|_H$ が成り立ちます. すると, 劣調和関数の最大値の原理より $\log\bigl(|\Theta|_H / \widetilde{f}_{R_2}\bigr) \leq 0$ となり, これは, $\mathcal{Z}$ 上で $|\Theta|_H \leq \widetilde{f}_{R_2}$ が成り立つことを意味して矛盾. これより, $B(R_2)$ 上で $|\Theta|_H \leq \widetilde{f}_{R_2}$ が得られ, $B(R_1)$ 上での $|\Theta|_H$ の評価が得られます. ∎

3.4.1 非存在定理

不等式 (27) を用いて次のような結果も得られます.

命題 3.11 $\Theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ のとき, (Θ, H) が (8) の解となるような $H : \mathbb{C} \to \mathfrak{p}(2)$ は存在しない.

(証明の概略) (Θ, H) が (8) の解となるような $H : \mathbb{C} \to \mathfrak{p}(2)$ は存在すると仮定して矛盾を導く. 不等式 (27) が $\mathbb{C}$ 上で成り立ちます. すると, $\log |\Theta|_H$ は劣調和なので一般論より定数関数となる. すると, $0 \leq -C_{10}|\Theta|_H^2$ なので, $|\Theta|_H^2 = 0$ を得る. しかし, $\Theta \neq 0$ なので, 矛盾が得られた. ∎

4 第四回 リーマン面上のヒッチン方程式

第二回で, 複素領域上のヒッチン方程式の "下部構造" として $M_2(\mathbb{C})$ への正則写像や局所系があらわれることを述べました. 複素領域だけではなく, リーマン面上でもヒッチン方程式は意味をなします. また, 局所系もリーマン面上でも意味をなします. $M_2(\mathbb{C})$ への正則写像は 1 形式のひねりを考慮したヒッグス束というものに一般化されます. そして, コンパクトリーマン面上では, ヒッチン方程式の解と半単純な局所系と複安定なヒッグス束の間に同値な対応が得られます. これによって, 微分幾何学的な対象であるヒッチン方程式の解を経由して, トポロジー的な対象である局所系と代数的な対象であるヒッグス束が結びつきます. この結びつきが, ヒッチン方程式の研究が豊かなものになった理由の一つです.

4.1 リーマン面

リーマン面についてかなり雑な説明をします. 正確なことはリーマン面や複素多様体の教科書をご覧ください.

4.1.1 領域の複素座標と複素構造

これまで $\mathbb{C}$ 内の領域 $\mathcal{U}$ について考えてきました. $\mathcal{U}$ を $\mathbb{C}$ に埋め込むことで, 複素座標 z をとっているとみることもできます. 別の埋め込みをとると, 別の複素座標 w が得られます. w を z の関数とみると,

$$\frac{\partial f(z)}{\partial \overline{z}} = \frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial \overline{z}} + \frac{\partial f}{\partial \overline{w}}\frac{\partial \overline{w}}{\partial \overline{z}}$$

という関係式が成り立ちますので, $\partial_{\overline{w}} f = 0$ ならば $\partial_{\overline{z}} f = \partial_w(f) \cdot \partial_{\overline{z}} w$ となるのですが, 一般にはそれ以上のことは言えません. w が z に関して正則ならば, つまり, $\partial_{\overline{z}} w = 0$ ならば, f が z に関して正則であることと, w に関して正則であることは同値になります. このとき, ある関数が正則という条件はどちらの座標で考えても変わらないことになります. こういう時, $\mathcal{U}$ が "複素構造" をもっていて, この φ や ψ はその一つの表示を与えている, というようにみなします.

4.1.2 リーマン面

もっと一般の曲面 X 上で "複素構造" を考えます.

全体を $\mathbb{C}$ に埋め込むことは, 一般にはできないのですが, 部分的には $\mathbb{C}$ に埋め込んで複素座標を考えることができます. つまり, このような開集合 $\mathcal{U} \subset X$ (開集合とは境界を含まない部分集合) と $\mathbb{C}$ への埋め込み $\varphi : \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ の組をとると, $\varphi(\mathcal{U})$ 上の複素座標 z が得られます. このような組 $(\mathcal{U}, \varphi)$ を複素座標近傍といいます.

定義 4.1 次の条件をみたす X の複素座標近傍のあつまり $\boldsymbol{\mathcal{U}} = \{(\mathcal{U}_i, \varphi_i)\}_{i\in\Lambda}$ を, X の複素座標近傍系といいます.

- $\bigcup_{i\in\Lambda}\mathcal{U}_i = X$.
- $\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j \neq \emptyset$ ならば, $\varphi_i(\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j) \overset{\varphi_j\circ\varphi_i^{-1}}{\longrightarrow} \varphi_j(\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j)$ は正則.

連結な X に複素座標近傍系が与えられているとき, X をリーマン面といいます. ∎

4.1.3 例

S^2 の複素構造 例えば, 2 次元球面 S^2 の場合を考えてみます. S^2 を $\mathbb{C}$ には埋め込むことはできないので, S^2 全体で使える複素座標をとることはできません. S^2 から一点をとりのぞくと, $\mathbb{C}$ と同相です. そして, S^2 は二枚の $\mathbb{C}$ を, $zw = 1$ という関係ではりあわせたものとみなせることがわかります. こうみると, S^2 に一つの複素構造を与えたことになります.

トーラスの複素構造 2 次元トーラスは, 正方形の対辺を同一視したものとみなせます. $\mathbb{C}$ 内の z と $z + (m_1 + \sqrt{-1}m_2)$ $(m_1, m_2 \in \mathbb{Z})$ を同一視することで得られるものとみなせます. すると, 複素構造が自然に定めます.

$\mathbb{Z} + \sqrt{-1}\mathbb{Z}$ ではない格子をとることで, 本質的に異なる複素構造が得られます.

4.2 リーマン面上の微分形式

4.2.1 複素領域上の微分形式

複素変数 z に対して, dz と $d\overline{z}$ という記号を導入します. また, 外積を形式的に

$$dz \wedge dz = d\overline{z} \wedge d\overline{z} = 0, \quad dz \wedge d\overline{z} = -d\overline{z} \wedge dz$$

によって定めます. (きちんとした定義は多様体の教科書をご覧ください.)

複素領域 $\mathcal{U}$ 上の何回でも微分できる関数全体を $\mathcal{A}^{0,0}(\mathcal{U})$ であらわします. $F \in \mathcal{A}^{0,0}(\mathcal{U})$ に dz をかけたものを $(1,0)$-形式, $d\overline{z}$ をかけたものを $(0,1)$-形式といいます. また, F に $dz \wedge d\overline{z}$ をかけたものを $(1,1)$-形式といいます. $\mathcal{U}$ 上の (p,q)-形式全体を $\mathcal{A}^{p,q}(\mathcal{U})$ であらわします. この時, $\overline{\partial} : \mathcal{A}^{0,0}(\mathcal{U}) \to \mathcal{A}^{0,1}(\mathcal{U})$, $\overline{\partial} : \mathcal{A}^{1,0}(\mathcal{U}) \to \mathcal{A}^{1,1}(\mathcal{U})$, を

$$\overline{\partial}(f) = \partial_{\overline{z}}(f)\, d\overline{z}, \qquad \overline{\partial}(f\, dz) = \partial_{\overline{z}}(f)\, d\overline{z} \wedge dz = -\partial_{\overline{z}}(f)\, dz \wedge d\overline{z}$$

によって定めます. また, $\partial : \mathcal{A}^{0,0}(\mathcal{U}) \to \mathcal{A}^{1,0}(\mathcal{U})$, $\partial : \mathcal{A}^{0,1}(\mathcal{U}) \to \mathcal{A}^{1,1}(\mathcal{U})$, を

$$\partial(f) = \partial_z(f)\, dz, \qquad \partial(f\, d\overline{z}) = \partial_z(f)\, dz \wedge d\overline{z}$$

によって定めます. $d = \overline{\partial} + \partial$ とまとめたものを外微分といいます.

関数 f_1 と f_2 の積 f_1f_2 が $(f_1f_2)(z) = f_1(z)f_2(z)$ によって定まります. dz や $d\overline{z}$ の外積もあわせることで,

$$\mathcal{A}^{p_1,q_1}(\mathcal{U}) \times \mathcal{A}^{p_2,q_2}(\mathcal{U}) \longrightarrow \mathcal{A}^{p_1+p_2,q_1+q_2}(\mathcal{U})$$

が定まります. 例えば,

- f_1dz と $f_2d\overline{z}$ の積: $(f_1\, dz) \wedge (f_2d\overline{z}) = (f_1f_2)dz \wedge d\overline{z}$.
- $f_2d\overline{z}$ と f_1dz の積: $(f_2d\overline{z}) \wedge (f_1\, dz) = (f_2f_1)d\overline{z} \wedge dz = -(f_1f_2)dz \wedge d\overline{z} = -(f_1\, dz) \wedge (f_2d\overline{z})$.
- f_1dz と f_2dz の積: $(f_1\, dz) \wedge (f_2\, dz) = (f_1f_2)dz \wedge dz = 0$. $(dz \wedge dz = 0$ でした.)

ベクトル空間に値をとる場合　V を有限次元複素ベクトル空間として, 複素領域 $\mathcal{U}$ 上の V に値をもつ何回でも微分できる関数全体を $\mathcal{A}^{0,0}(\mathcal{U},V)$ であらわすことにします. そして, 形式的に,

$$\mathcal{A}^{1,0}(\mathcal{U},V)=\left\{F\,dz\,\middle|\,F\in\mathcal{A}^{0,0}(\mathcal{U},V)\right\},$$

$$\mathcal{A}^{0,1}(\mathcal{U},V)=\left\{F\,d\overline{z}\,\middle|\,F\in\mathcal{A}^{0,0}(\mathcal{U},V)\right\},$$
$$\mathcal{A}^{1,1}(\mathcal{U},V)=\left\{F\,dz\wedge d\overline{z}\,\middle|\,F\in\mathcal{A}^{0,0}(\mathcal{U},V)\right\}.$$

とおきます. また, $\overline{\partial}:\mathcal{A}^{p,q}(\mathcal{U},V)\to\mathcal{A}^{p,q+1}(\mathcal{U},V)$, $\partial:\mathcal{A}^{p,q}(\mathcal{U},V)\to\mathcal{A}^{p+1,q}(\mathcal{U},V)$ を $V=\mathbb{C}$ のときと同様に定義します.

　また, $f\in\mathcal{A}^{0,0}(\mathcal{U})$ と $s\in\mathcal{A}^{0,0}(\mathcal{U},V)$ について, $f\cdot s\in\mathcal{A}^{0,0}(\mathcal{U},V)$ が自然に定まります. dz や $d\overline{z}$ についての積とあわせることで,

$$\mathcal{A}^{p_1,q_1}(\mathcal{U})\times\mathcal{A}^{p_2,q_2}(\mathcal{U},V)\longrightarrow\mathcal{A}^{p_1+p_2,q_1+q_2}(\mathcal{U},V)$$

が定まります.

4.2.2　微分形式の正則写像による引き戻し

$\mathcal{U}_1,\mathcal{U}_2$ を複素領域とします. 複素変数 z を $\mathcal{U}_1$ 上の変数とみなすときは z_1 であらわし, $\mathcal{U}_2$ 上の変数とみなすときは z_2 であらわすことにします. $\mathcal{U}_1$ 上の $(1,0)$-形式は $f\,dz_1$ $(f\in\mathcal{A}^{0,0}(\mathcal{U}_1))$ のようにあらわされますし, $\mathcal{U}_2$ 上の $(0,1)$-形式は $g\,d\overline{z}_2$ $(g\in\mathcal{A}^{0,0}(\mathcal{U}_2))$ のようにあらわされます.

　$\varphi:\mathcal{U}_1\to\mathcal{U}_2$ を正則な写像とします. このとき $f\in\mathcal{A}^{0,0}(\mathcal{U}_2)$ に対して $\varphi^*(f)\in\mathcal{A}^{0,0}(\mathcal{U}_1)$ が写像 f と φ の合成

$$\varphi^*(f)=f\circ\varphi$$

として定まります. これを関数 f の φ による引き戻しといいます. $(0,1)$-形式 $f\,d\overline{z}_2\in\mathcal{A}^{0,1}(\mathcal{U}_2)$ の引き戻し $\varphi^*(f\,d\overline{z}_2)$, $(1,0)$-形式 $f\,d\overline{z}_2\in\mathcal{A}^{0,1}(\mathcal{U}_2)$ の引き戻し $\varphi^*(f\,dz_2)$, $(1,1)$-形式 $f\,dz_2\wedge d\overline{z}_2\in\mathcal{A}^{0,1}(\mathcal{U}_2)$ の引き戻し $\varphi^*(f\,dz_2\,d\overline{z}_2)$ をそれぞれ次のように定めます.

$$\varphi^*(f\,d\overline{z}_2)=\varphi^*(f)\cdot\overline{\partial_{z_1}(\varphi)}\cdot d\overline{z}_1,$$

$$\varphi^*(f\,dz_2)=\varphi^*(f)\cdot\partial_{z_1}(\varphi)\cdot dz_1,$$
$$\varphi^*(f\,dz_2\wedge d\overline{z}_2)=\varphi^*(f)\cdot|\partial_{z_1}(\varphi)|^2\cdot dz_1\wedge d\overline{z}_1.$$

　正則写像に関する引き戻しは ∂ や $\overline{\partial}$ という微分作用素と両立します.

補題 4.2 $\tau\in\mathcal{A}^{p,q}(\mathcal{U}_2)$ について, $\varphi^*(\partial\tau)=\partial\varphi^*(\tau)$ と $\varphi^*(\overline{\partial}\tau)=\overline{\partial}\varphi^*(\tau)$ が成り立つ.

(証明の概略)　例えば, $f\,dz_2\in\mathcal{A}^{1,0}(\mathcal{U}_2)$ について,

$$\varphi^*(\overline{\partial}(f\,dz_2))=\varphi^*\big(-\partial_{\overline{z}_2}(f)\,dz_2\wedge d\overline{z}_2\big)=-\varphi^*(\partial_{\overline{z}_2}(f))\,|\partial_{z_1}\varphi|^2\,dz_1\wedge d\overline{z}_1$$

であり, 一方,

$$\overline{\partial}\big(\varphi^*(f\,dz_2)\big)=\overline{\partial}\Big(\varphi^*(f)\,\partial_{z_1}(\varphi)\,dz_1\Big)=-\partial_{\overline{z}_1}(\varphi^*(f))\cdot\partial_{z_1}(\varphi)\,dz_1\wedge d\overline{z}_1$$

通常の微分の鎖律を用いると $\partial_{\overline{z}_1}(\varphi^*(f))=\overline{(\partial_{z_1}\varphi)}\cdot\varphi^*(\partial_{\overline{z}_2}(f))$ が成り立つことを確認できるので, $\varphi^*(\overline{\partial}(f\,dz_2))=\overline{\partial}(\varphi^*(f\,dz_2))$ が得られます. 他も同様です. ∎

4.2.3 リーマン面上の微分形式

X をリーマン面とし, $\{(\mathcal{U}_i, \varphi_i)\}_{i\in\Lambda}$ を複素座標近傍系とします. V を複素ベクトル空間とします.

定義 4.3 X 上の V に値をもつ (p,q)-形式 $\tau = (\tau_i)_{i\in\Lambda}$ とは, 複素領域 $\varphi_i(\mathcal{U}_i)$ 上の V に値をもつ (p,q)-形式 τ_i $(i \in \Lambda)$ の組で, $\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j \neq \emptyset$ ならば,

$$(\varphi_i \circ \varphi_j^{-1})^* \tau_{i|\varphi_i(\mathcal{U}_i\cap\mathcal{U}_j)} = \tau_{j|\varphi_j(\mathcal{U}_i\cap\mathcal{U}_j)}$$

が $\varphi_j(\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_i)$ 上で成り立つものとします. $V = \mathbb{C}$ の時は単に X 上の (p,q)-形式といいます. ∎

X 上の V に値をもつ (p,q)-形式 $\tau = (\tau_i)_{i\in\Lambda}$ 全体を $\mathcal{A}^{p,q}(X,V)$ であらわします. $V = \mathbb{C}$ の時は単に $\mathcal{A}^{p,q}(X)$ であらわします.

補題 4.4 $\tau \in \mathcal{A}^{p,q}(X,V)$ について,

$$\overline{\partial}\tau = (\overline{\partial}\tau_i)_{i\in\Lambda} \in \mathcal{A}^{p,q+1}(X,V), \qquad \partial\tau = (\partial\tau_i)_{i\in\Lambda} \in \mathcal{A}^{p+1,q}(X,V)$$

が定まる. 外微分 $d\tau = \partial\tau + \overline{\partial}\tau$ も得られる.

(証明の概略) ∂ や $\overline{\partial}$ が座標変換と両立することからわかります. ∎

積 $\mathcal{A}^{p_1,q_1}(X) \times \mathcal{A}^{p_2,q_2}(X,V) \to \mathcal{A}^{p_1+p_2,q_1+q_2}(X,V)$ も自然に定まります.

4.3 複素領域上のヒッチン方程式と正則写像による引き戻し

ヒッチン方程式 (1) を, 複素領域 $\mathcal{U}$ 上の関数 (A,Θ) の組についての方程式とみるよりも,

$$(A\,d\overline{z}, \Theta\,dz) \in \mathcal{A}^{0,1}(\mathcal{U}, M_2(\mathbb{C})) \times \mathcal{A}^{1,0}(\mathcal{U}, M_2(\mathbb{C}))$$

についての次の方程式としてみる方が良いです.

$$\begin{cases} \overline{\partial}(\Theta\,dz) + [A\,d\overline{z}, \Theta\,dz] = 0 \\ \partial(A\,d\overline{z}) - \overline{\partial}(A^\dagger\,dz) - [A\,d\overline{z}, A^\dagger\,dz] + [\Theta\,dz, \Theta^\dagger\,d\overline{z}] = 0. \end{cases} \tag{29}$$

ここで, $[A\,d\overline{z}, \Theta\,dz]$ は

$$[A\,d\overline{z}, \Theta\,dz] = [A,\Theta]\,d\overline{z} \wedge dz$$

を意味します. $[A\,d\overline{z}, A^\dagger\,dz]$ や $[\Theta\,dz, \Theta^\dagger\,d\overline{z}]$ も同様です.

次の補題は簡単に確かめられます.

補題 4.5 (A,Θ) が (1) をみたすことと, $(A\,d\overline{z}, \Theta\,dz)$ が (29) をみたすことは同値である. ∎

命題 4.6 $\varphi : \mathcal{U}_1 \to \mathcal{U}_2$ を正則写像とする. $(A\,d\overline{z}_2, \Theta\,dz_2) \in \mathcal{A}^{0,1}(\mathcal{U}_2, M_2(\mathbb{C})) \times \mathcal{A}^{1,0}(\mathcal{U}_2, M_2(\mathbb{C}))$ について, 次の等式が成り立つ.

$$\overline{\partial}\big(\varphi^*(\Theta\,dz_2)\big) + \big[\varphi^*(A\,d\overline{z}_2), \varphi^*(\Theta\,dz_2)\big] = \varphi^*\Big(\overline{\partial}(\Theta\,dz_2) + \big[A\,d\overline{z}_2,\,\Theta\,dz_2\big]\Big), \tag{30}$$

$$\begin{aligned} &\partial\big(\varphi^*(A\,d\overline{z}_2)\big) - \overline{\partial}\big(\varphi^*(A^\dagger\,dz_2)\big) - \big[\varphi^*(A\,d\overline{z}_2), \varphi^*(A^\dagger\,dz_2)\big] + \big[\varphi^*(\Theta\,dz_2),\,\varphi^*(\Theta^\dagger\,d\overline{z}_2)\big] \\ &\qquad = \varphi^*\Big(\partial(A\,d\overline{z}_2) - \overline{\partial}(A^\dagger\,dz_2) - \big[A\,d\overline{z}, A^\dagger dz_2\big] + \big[\Theta\,dz_2,\,\Theta^\dagger\,d\overline{z}_2\big]\Big). \end{aligned} \tag{31}$$

特に, $(A\,d\overline{z}_2, \Theta\,dz_2)$ が $\mathcal{U}_2$ 上のヒッチン方程式 (29) の解ならば, $(\varphi^*(A\,d\overline{z}_2),\,\varphi^*(\Theta\,dz_2))$ は $\mathcal{U}_1$ 上のヒッチン方程式 (29) の解である.

(証明の概略) 正則写像による引き戻しと $\overline{\partial}$ が両立することより, $\overline{\partial}\big(\varphi^*(\Theta\,dz_2)\big) = \varphi^*\big(\overline{\partial}(\Theta\,dz_2)\big)$. また, 正則写像による引き戻しと積が両立することより, $\big[\varphi^*(A\,d\overline{z}_2), \varphi^*(\Theta\,dz_2)\big] = \varphi^*\big(\big[A\,d\overline{z}_2,\,\Theta\,dz_2\big]\big)$ がわかるので, (30) がわかります. (31) も同様です. ∎

4.4 リーマン面上のヒッチン方程式

X をリーマン面とし, $\{(\mathcal{U}_i, \varphi_i)\}_{i\in\Lambda}$ を複素座標近傍系とします. $a = (A_i\, d\overline{z}_i)_{i\in\Lambda} \in \mathcal{A}^{0,1}(X, M_2(\mathbb{C}))$ と $\theta = (\Theta_i\, dz_i)_{i\in\Lambda} \in \mathcal{A}^{1,0}(X, M_2(\mathbb{C}))$ について,

$$a^\dagger = (A_i^\dagger\, dz_i)_{i\in\Lambda} \in \mathcal{A}^{1,0}(X, M_2(\mathbb{C})), \quad \theta^\dagger = (\Theta_i^\dagger\, d\overline{z}_i)_{i\in\Lambda} \in \mathcal{A}^{0,1}(X, M_2(\mathbb{C}))$$

とおきます. (a, θ) に関する次の方程式をヒッチン方程式といいます.

$$\begin{cases} \overline{\partial}\theta + [a, \theta] = 0, \\ \partial a - \overline{\partial} a^\dagger - [a, a^\dagger] + [\theta, \theta^\dagger] = 0. \end{cases} \tag{32}$$

§4.3 でみたように, ヒッチン方程式が正則写像による引き戻しで保たれることから, この方程式は X 上で意味をなします.

4.4.1 ヒッグス束と計量に関する方程式

$a \in \mathcal{A}^{0,1}(X, M_2(\mathbb{C}))$ と $\theta \in \mathcal{A}^{1,0}(X, M_2(\mathbb{C}))$ が

$$\overline{\partial}\theta + [a, \theta] = 0$$

をみたすとき, ここでは (a, θ) をヒッグス束ということにします.

注意 4.7 $(X \times \mathbb{C}^2, \overline{\partial} + a, \theta)$ をヒッグス束という方が良いです. ∎

(a, θ) がヒッチン方程式の解ならば (a, θ) はヒッグス束です. ヒッグス束からヒッチン方程式の解を構成することを考えます.

$H : X \to \mathfrak{p}(2)$ をとると,

$$\theta_H^\dagger = \big((\Theta_i)_H^\dagger\, d\overline{z}_i\big)_{i\in\Lambda} \in \mathcal{A}^{0,1}(X, M_2(\mathbb{C})), \qquad a_H^\dagger = \big((A_i)_H^\dagger\, dz_i\big)_{i\in\Lambda} \in \mathcal{A}^{1,0}(X, M_2(\mathbb{C}))$$

が定まります. H について次の方程式を考えます.

$$\partial a - \overline{\partial} a_H^\dagger - [a, a_H^\dagger] + [\theta, \theta_H^\dagger] = 0. \tag{33}$$

(もしも (a, θ) がヒッチン方程式 (32) の解ならば, $H = I_2$ が (33) をみたします.)

H が方程式 (33) の解とします. $G : X \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ を ${}^t G \cdot \overline{G} = H$ をみたすようにとることができます. 次のようにおきます.

$$(G^{-1})^* a = G \cdot a \cdot G^{-1} - \overline{\partial}(G) \cdot G^{-1}, \qquad (G^{-1})^*\theta = G \cdot \theta \cdot G^{-1}$$

次の命題は形式的な計算で確かめられます. (§2.1.3 を参照.)

命題 4.8 $((G^{-1})^* a, (G^{-1})^*\theta)$ はヒッチン方程式 (32) の解である. ∎

4.4.2 局所系によってひねられた調和写像

各$\mathcal{U}_i$が単連結と仮定します. §2.2.2 と同様に次の条件をみたす関数 $K_{i,j} : \mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ の組 $\boldsymbol{K} = (K_{i,j})_{i,j\in\Lambda}$ を X 上の階数 2 の $\mathbb{C}$-局所系といいます.

- $K_{i,j}$ は局所定数. すなわち, $\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j$ の各連結成分上で定数.
- $K_{i,i} = I_2$, $K_{i,j} = K_{j,i}^{-1}$.
- (1 コサイクル条件) $\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j \cap \mathcal{U}_k$ 上で $K_{i,j} \cdot K_{j,k} = K_{i,k}$.

§2.2.2 と同様に, 局所系 $\boldsymbol{K}$ でひねられた X から $\mathfrak{p}(2)$ への写像とは, 写像 $H_i : \mathcal{U}_i \to \mathfrak{p}(2)$ $(i \in \Lambda)$ の組 $\boldsymbol{H} = (H_i)_{i\in\Lambda}$ で

$$H_j = {}^tK_{i,j} \cdot H_i \cdot \overline{K_{i,j}}$$

という条件をみたすものとします. H_i より, $H_i \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(\mathcal{U}_i) \to \mathfrak{p}(2)$ が得られます. 各 $H_i \circ \varphi_i^{-1}$ が方程式 (17) をみたすとき, $\boldsymbol{H}$ は局所系 $\boldsymbol{K}$ でひねられた$\mathcal{U}$から $\mathfrak{p}(2)$ への調和写像といいます.

命題 2.17 と同様にヒッチン方程式の解 (a, θ) から X 上の $\mathbb{C}$-局所系 $\boldsymbol{K}$ と, $\boldsymbol{K}$ によってひねられた調和写像が得られます. 逆に, $\mathbb{C}$-局所系 $\boldsymbol{K}$ によってひねられた調和写像が与えられると, 素朴なリーマン・ヒルベルト対応によって, $\boldsymbol{K}$ に対応する平坦接続と $H : X \to \mathfrak{p}(2)$ が得られ, さらに $H = I$ となるようにゲージ変換すると, ヒッチン方程式の解 (a, θ) が得られます.

4.5 ヒッチン・シンプソンの定理

4.5.1 安定なヒッグス束と複安定なヒッグス束

安定なヒッグス束 リーマン面 X がコンパクトの時, X 上のヒッグス束 (a, θ) の安定性という条件について説明します. まず, 次の条件をみたす $G_i : \mathcal{U}_i \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ $(i \in \Lambda)$ の組 $\boldsymbol{G}$ を考えます.

$$(\mathcal{U}_i \text{ 上で}) \quad \overline{\partial} G_i + A_i G_i \, d\overline{z}_i = 0, \quad G_i^{-1}\theta_i G_i = \begin{pmatrix} \alpha_i & \beta_i \\ 0 & \gamma_i \end{pmatrix} dz_i, \tag{34}$$

$$(\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j \text{ 上で}) \quad G_i^{-1} G_j = \begin{pmatrix} p_{i,j} & q_{i,j} \\ 0 & r_{i,j} \end{pmatrix}. \tag{35}$$

ここで, $p_{i,j}, q_{i,j}, r_{i,j}$ は$\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j$ 上の正則関数になります. さらに, $p_{i,j}$ と $r_{i,j}$ は零点をもちません. 特に, $\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j$ 上の正則な $(1, 0)$-形式

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \frac{dp_{i,j}}{p_{i,j}}$$

が得られます. 開被覆 $\{\mathcal{U}_i\}$ に従属する "1 の分割" を用いることで$\mathcal{U}_i$ 上の $(1, 0)$-形式 s_i $(i \in \Lambda)$ を

$$(\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j \text{ 上で}) \quad s_i - s_j = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \frac{dp_{i,j}}{p_{i,j}}$$

をみたすように作ることできます. すると, $\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j$ 上で $\overline{\partial}(s_i) = \overline{\partial}(s_j)$ なので, X 上の $(1, 1)$-形式 τ で$\mathcal{U}_i$ 上では $\tau = \overline{\partial}(s_i)$ をみたすものが定まります. そこで, (34) と (35) をみたす $\boldsymbol{G}$ に対して,

$$\deg(\boldsymbol{G}) = \int_X \tau$$

とおきます. (X はリーマン面なので自然な向きを持ち, コンパクトなので $(1, 1)$ 形式の積分が定まることに注意します.)

定義 4.9 次の条件をみたすヒッグス束 (a, θ) を安定なヒッグス束という.

- (34) と (35) をみたす全ての $\boldsymbol{G}$ について, $\deg(\boldsymbol{G}) < 0$ が成り立つ. ∎

分解するヒッグス束　$a_1, a_2 \in \mathcal{A}^{0,1}(X)$ とし, $\theta_1, \theta_2 \in \mathcal{A}^{1,0}(X)$ が $\overline{\partial}\theta_1 = \overline{\partial}\theta_2 = 0$ をみたすとします. このとき,

$$a = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}, \quad \theta = \begin{pmatrix} \theta_1 & 0 \\ 0 & \theta_2 \end{pmatrix}$$

は (階数 2 の) ヒッグス束となります. ここでは, このようなヒッグス束を "分解するヒッグス束" ということにします.

ヒッグス束のゲージ変換　(a, θ) をヒッグス束とします. $G : X \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ を無限回微分可能な関数とします. このとき,

$$G^*(a) = G^{-1}aG + G^{-1}\overline{\partial}G, \qquad G^*\theta = G^{-1}\theta G$$

とおくと, $(G^*(a), G^*\theta)$ もヒッグス束になります.

複安定なヒッグス束　次の条件のいずれかをみたすヒッグス束 (a, θ) を複安定なヒッグス束といいます.

- (a, θ) は安定
- $G : X \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ を適切にとると, $G^*(a, \theta)$ は分解する.

4.5.2　ヒッチン・シンプソンの定理

次の定理はヒッチンによって証明されました. より一般の場合 (階数が高い場合や次元が高い場合) にシンプソンによって証明されました.

定理 4.10 (a, θ) がヒッチン方程式 (32) の解ならば, (a, θ) はヒッグス束として複安定. 逆に, (a, θ) がヒッグス束として複安定ならば, 方程式 (33) の解 $H : X \to \mathfrak{p}(2)$ が存在.

ヒッチン方程式の解ならば, (a, θ) が複安定であることは "チャーン・ヴェイユ公式" とよばれる式を用いると比較的容易に証明できます. 一方, 逆の証明は難しいです. 熱方程式を用いて $\partial a - \overline{\partial} a^\dagger - [a, a^\dagger_{H_t}] + [\theta, \theta^\dagger_{H_t}]$ が小さくなっていく H_t をつくります. $t \to \infty$ で収束すれば良いのですが, 境界値つきの場合と違って, 一般には収束しないのですが, 収束しないとすると安定性を破壊するような $\boldsymbol{G}$ が出てくることがわかるので, 安定性の仮定のもとでは収束します. (詳しくは [4] や [7] を御参照ください.)

4.6　ドナルドソン・コレットの定理

4.6.1　半単純な局所系

$\boldsymbol{K} = (K_{i,j})_{i,j \in \Lambda}$ を階数 2 の $\mathbb{C}$-局所系とします. 次の条件をみたす局所定数関数 $G_i : \mathcal{U}_i \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ の組 $\boldsymbol{G} = (G_i)_{i \in \Lambda}$ を $\boldsymbol{K}$ の簡約といいます.

$$G_i^{-1} K_{i,j} G_j = \begin{pmatrix} \alpha_{i,j} & \beta_{i,j} \\ 0 & \gamma_{i,j} \end{pmatrix}.$$

さらに, $\boldsymbol{K}$ の簡約 $\boldsymbol{G} = (G_i)$ が次の条件をみたすとき, $\boldsymbol{G}$ を $\boldsymbol{K}$ の分解といいます.

$$G_i^{-1} K_{i,j} G_j = \begin{pmatrix} \alpha_{i,j} & 0 \\ 0 & \gamma_{i,j} \end{pmatrix}.$$

定義 4.11 簡約が存在しないような局所系を単純な局所系といいます. また, 単純であるか, または分解が存在する局所系を半単純な局所系といいます. ∎

4.6.2 ドナルドソン・コレットの定理

次の定理はドナルドソンによって証明されました．より一般の場合 (階数が高い場合や底空間の次元が高い場合) はコレットによって証明されました．

定理 4.12 ヒッチン方程式 (32) の解 (a, θ) が誘導する $\mathbb{C}$-局所系は半単純．逆に，半単純な $\mathbb{C}$-局所系 $\boldsymbol{K}$ に対して，$\boldsymbol{K}$ によってひねられた X から $\mathfrak{p}(2)$ への調和写像が存在する．

この定理の場合も，ヒッチン方程式の解から得られる局所系が半単純であることは，“チャーン・ヴェイユ公式” という公式を用いると比較的容易に証明できます．逆は難しいです．詳しくは [1] や [2] を御参照ください．

References

[1] K. Corlette, *Flat G-bundles with canonical metrics*, J. Differential Geom. **28** (1988), 361–382.

[2] S. K. Donaldson, *Twisted harmonic maps and the self-duality equations*, Proc. London Math. Soc. **55** (1987), 127–131.

[3] S. K. Donaldson, *Boundary value problems for Yang-Mills fields*, J. Geom. Phys. **8** (1992), 89–122.

[4] N. J. Hitchin, *The self-duality equations on a Riemann surface.* Proc. London Math. Soc. (3) **55** (1987), 59–126.

[5] 小林昭七, 複素幾何, 岩波書店 2005 年

[6] 小林昭七, 接続の微分幾何とゲージ理論, 裳華房, 1989 年 (新装版は 2023 年)

[7] C. Simpson, *Constructing variations of Hodge structure using Yang-Mills theory and application to uniformization*, J. Amer. Math. Soc. **1** (1988), 867–918.

[8] C. Simpson, *Harmonic bundles on non-compact curves*, J. Amer. Math. Soc. **3** (1990), 713–770.