

スペクトル不変量とその応用について 数学入門講座テキスト

石川 卓

1 イントロダクション

1.1 高さによる分解

図形を理解するために、「高さ」で切ってその断面の移り変わりを見る、ということをしてみる。球面 $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ の高さ (z の値) で切った断面 $\{z = a\}^1$ は (図 1 参照)

$$\begin{cases} a = 1 \text{ のとき} & 1 \text{ 点} \\ -1 < a < 1 \text{ のとき} & \text{円} \\ a = -1 \text{ のとき} & 1 \text{ 点} \\ \text{その他の } a \text{ のとき} & \emptyset \text{ (空集合)} \end{cases}$$

同様に、トーラス $T^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + (\sqrt{y^2 + z^2} - 2)^2 = 1\}$ の断面 $\{z = a\}$ は (図 2 参照)

$$\begin{cases} a = 3 \text{ のとき} & 1 \text{ 点} \\ 1 < a < 3 \text{ のとき} & \text{円} \\ a = 1 \text{ のとき} & \text{円 2 つが 1 点でくっついたもの} \\ -1 < a < 1 \text{ のとき} & \text{円 2 つ} \\ a = -1 \text{ のとき} & \text{円 2 つが 1 点でくっついたもの} \\ -3 < a < -1 \text{ のとき} & \text{円} \\ a = -3 \text{ のとき} & 1 \text{ 点} \\ \text{その他の } a \text{ のとき} & \emptyset \end{cases}$$

少し変えて、今度は切り口よりも下の部分 $\{z \leq a\}$ を見てみる。球面 S^2 の場合 $\{z \leq a\}$ は

$$\begin{cases} a \geq 1 \text{ のとき} & \text{球面全体} \\ -1 < a < 1 \text{ のとき} & \text{円盤 (をたわめたもの)} \\ a = -1 \text{ のとき} & 1 \text{ 点} \\ a < -1 \text{ のとき} & \emptyset \end{cases}$$

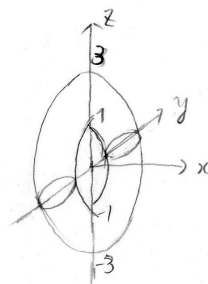
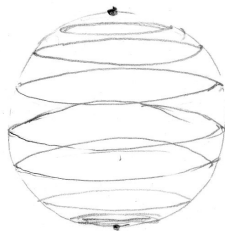
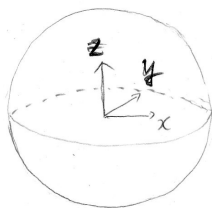


図 1: S^2

図 2: T^2

¹ $\{(x, y, z) \in S^2; z = a\}$ のことを $\{z = a\}$ 等と簡略に表すことがある。

トラス T^2 の場合も同様に $\{z \leq a\}$ を調べてみると、 $\{-1 < a < 1\}$ 等の開区間上ずっと同じ図形が現れ、 $a = \pm 1$ 等のいくつかの点を境として図形が変化していることが分かる。開区間の境目で起きている変化は次のように解釈することができる。(図 3 参照) $\{z < -3\} = \emptyset$ から $\{z \leq a\}$ ($-3 < a < -1$) へは空集合から円盤 D^2 が出現し、この円盤の対岸に長方形の橋 $[0, 1] \times [0, 1]$ を架けることで $\{z \leq a\}$ ($-1 < a < 1$) の円筒となる。この円筒 $\{z \leq a\}$ ($-1 < a < 1$) から $\{z \leq a\}$ ($1 < a < 3$) (T^2 から円盤を除いた図形) へはこの円筒の両端にある円周の間に長方形の橋 $[0, 1] \times [0, 1]$ を架けることで実現される。さらにこの $\{z \leq a\}$ ($1 < a < 3$) の境界の穴をふさぐように円盤 D^2 を張り付けることでトラス $T^2 = \{z > 3\}$ が出来上がる。

一般に、円盤二つの直積 $D^k \times D^{n-k}$ を (k 次) ハンドルと呼ぶ。ここで $D^k = \{(x_i) \in \mathbb{R}^k; \sum_{i=1}^k x_i^2 \leq 1\}$ は k 次元の円盤である。(D^0 は一点集合とする。) $D^1 = [0, 1]$ に注意すると、上の $\{z \leq a\}$ の変形はどれもハンドルを接着していく操作になっている。(円板 D^2 は $D^0 \times D^2$ または $D^2 \times D^0$ とみなす。) 一般に、ハンドル $D^k \times D^{n-k}$ を、 $\partial D^k \times D^{n-k}$ を接着面として順次接着していくことで再構成することを、ハンドル分解と呼ぶ。上の T^2 の場合には、 $D^0 \times D^2$, $D^1 \times D^1$, $D^1 \times D^1$, $D^2 \times D^0$ をこの順で適切に接着していくことで T^2 が構成されている。

ハンドル分解と似た分解に、CW 分解というものがある。これはハンドルの代わりに円板 D^k を、その境界 ∂D^k で接着していくことで構成するものである。図 4 が S^2 と T^2 の CW 分解の例である。CW 分解においては円板 D^k は (k 次元) 胞体と呼び、 e^k と表すことが多い。CW 分解の場合には境界の接着面は 1 : 1 である必要はなく、境界を同一の点に張り付けるなどしても良い。その代わりに、 k 次元の円板の境界 ∂D^k はそれよりも次元の低い円板たちでできる和集合に接着しなければならない、という制約がある。

1.2 空間の定義と不変量

今まできちんとした定義もなく「同一の図形」等と述べてきたが、幾何学の研究を行うに当たっては何をもちいて同一とみなすかをまず決めておかなければならない。例えば中学校で習う平面図形の「同一」の概念に、「合同」と「相似」がある。二つの図形が平行移動、回転、裏返しで移りあうとき「合同」と言い、「相似」ではさらに全体を同一の比で拡大縮小することを許す。図形の持つ面積などは相似では保たれないが、「三角形の内角の和は 180 度である」、「ひし形の対角線は直行する」等々の図形のもつ多くの性質は、「相似」でありさえすれば変わらない。調べるべき性質、量が保たれるのであればより緩い条件の下で同一とみなしても構わないであろう。逆に言えば、設定した「同一」の条件の下で保たれる性質を調べていくことが幾何学であるとも言える。相似よりも緩い条件として、例えば、図形を描いた紙が伸縮自在だった場合にこれを縦横斜めなどに自由に引き伸ばしたのも同じ、と考えることもできるだろう。この場合、円板も三角形も四角形もすべて同じ、とみなすことができる。一方で、環帯 (annulus) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$ はこれらとは別物である。このことは A が円板たちと異なり境界の個数が 2 つあることから分かる。境界の個数という量は、紙の引き伸ばしで変わらない量である。このような量を、不変量と呼ぶ。二つの図形の不変量が異なればそれらは別物であるということを判定できる。もちろん不変量が同じだからと言って同一とは限らない。例えば円板二つの和集合 $D \sqcup D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; (x+2)^2 + y^2 \leq 1 \text{ または } (x-2)^2 + y^2 \leq 1\}$ も境界を二つ持っているが、明らかに A とは異なる。なお、 $D \sqcup D$ は 2 つの繋がらない図形の和になっているが、この数 2 もまた不変量である。

さて、数学において、空間とは、点の集合に何らかの構造をいれたもの、として定義されることがほとんどである。例えば最も単純な「位相空間」とは集合に、写像の連続性を定義するのに必要な「近さ」の概念を与えたものである。(今回はこれは詳しく定義しない。) 今回扱うものはこの中でも比較的扱いやすい「距離空間」のみなので、これについて説明する。集合 X に距離関数 $d: X \times X \rightarrow [0, \infty)$ を与えたものが距離空間である。(三角不等式など、距離関数にはいくつか条件が課される。) 例えば、上の S^2 や T^2 には \mathbb{R}^2 の部分空間として距離 $d((x, y, z), (x', y', z')) = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}$ が入る。

Definition 1.1. 距離空間 (X, d_X) から (Y, d_Y) への写像 $\varphi: X \rightarrow Y$ が連続とは、任意の $x \in X$ と $\epsilon > 0$ に対してある $\delta > 0$ があって $d_X(x, x') < \delta$ ならば $d_Y(\varphi(x), \varphi(x')) < \epsilon$ が成立することである。写像 $\varphi: X \rightarrow Y$ が連続かつ全単射で逆 $\varphi^{-1}: Y \rightarrow X$ も連続なとき、 φ を同相写像と呼び、 (X, d_X) と (Y, d_Y) は同相 (位相同相) であるという。

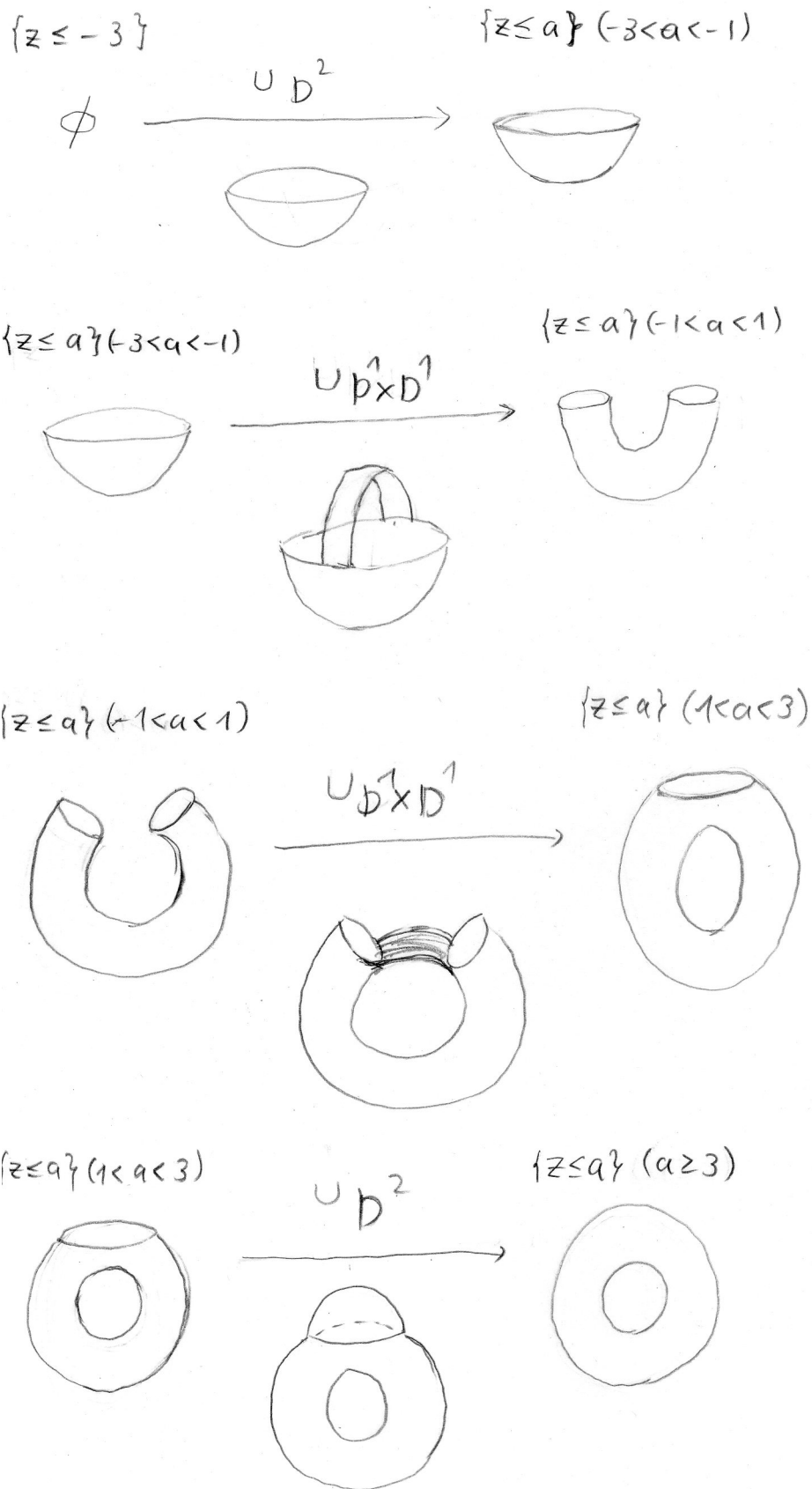


図 3: T^2 の高さ函数によるハンドル分解

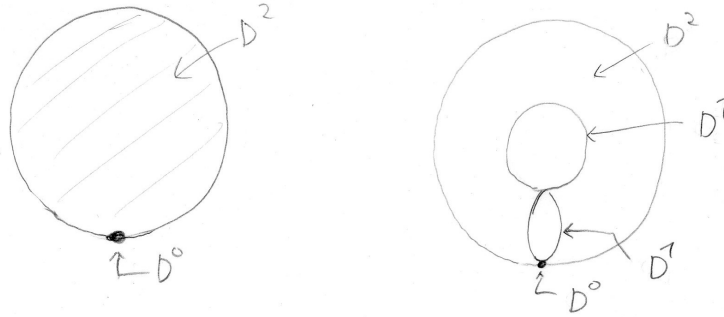


図 4: S^2 と T^2 の CW 分解

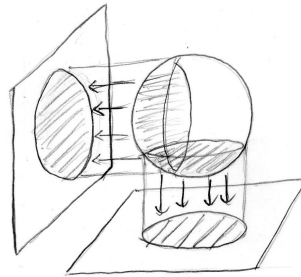


図 5: S^2 の座標

例えば上の紙の引き延ばしで得られる図形はすべて同相である。位相空間の定義は行わないが、「同相」が位相空間として「同じ」ということの定義である。

S^2 や T^2 などとはただの距離空間ではなく、局所的に平面と同じように扱える「多様体」とよばれるものになっている。例えば地球 (S^2) は数枚の地図 (\mathbb{R}^2 中の長方形など) を用いてすべてをカバーすることができ、標高 $f: S^2 \rightarrow \mathbb{R}$ などの関数を地図上の関数と思って縦、横方向等に微分することで勾配を考えることもできる。このように関数の微分を考えることができる対象が、次で定義される可微分多様体である。

Definition 1.2. 距離空間 X が (n 次元) 位相多様体であるとは、任意の点に対してそれを含む開集合 $U \subset X$ と写像 $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ があってこれが開集合 $\varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$ への同相になっていることをいう。この組 (U, φ) を座標と呼ぶ。さらに、任意の二つの座標 $(U, \varphi), (V, \psi)$ に対して $U \cap V \neq \emptyset$ のとき座標変換 $\psi \circ \varphi^{-1}: \varphi(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V)$ が何度でも微分できるとき X を可微分多様体という。ここでは多様体と言えば可微分多様体のことをいうものとする。

球面 $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ やトーラス $T^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + (\sqrt{y^2 + z^2} - 2)^2 = 1\}$ は可微分多様体である。実際、 xy -平面、 yz -平面、 zx -平面等への射影を考えれば局所的には \mathbb{R}^2 の開集合への 1:1 の写像が構成でき、それらが座標になる。(図 5 参照) また、座標変換も可微分である。

1.3 ホモロジー

位相空間の不変量であるホモロジーの説明をする。(距離空間等の) 位相空間 X と各整数 $k = 0, 1, \dots$ に対してベクトル空間 $H_k(X; \mathbb{R})$ を対応させることができ、これを (\mathbb{R} -係数) k -次ホモロジーという。これは位相空間 X の不変量であるのみならず、関手性を持つ。つまり、位相空間の間の連続写像 $\varphi: X \rightarrow Y$ に対して線形写像 $\varphi_*: H_k(X; \mathbb{R}) \rightarrow H_k(Y; \mathbb{R})$ が対応し、写像の合成 $\varphi \circ \psi$ には線形写像の合成 $\varphi_* \circ \psi_*$ が対応、そして同相の場合同型であって逆写像には逆の線形写像が対応する。

位相空間 X が 1.1 節で述べた CW 分割を持つ場合にはホモロジーを次のように定義することができる。各

$k = 0, 1, \dots$ に対して

$$C_k(X; \mathbb{R}) = \bigoplus_{e_i^k: X \text{ の } k\text{-次胞体}} \mathbb{R}e_i^k : X \text{ を構成する } k\text{-次胞体と同じ数の次数を持つベクトル空間}$$

として、各胞体がどのように接着されているのか、の情報からベクトル空間の間の線形写像²

$$\partial_k : C_k(X; \mathbb{R}) \rightarrow C_{k-1}(X; \mathbb{R})$$

が定められる。この ∂ たちは $\partial_k \circ \partial_{k+1} = 0$ という性質を持つ。(特に $\text{Im } \partial_{k+1} \subset \text{Ker } \partial_k$ が成立する。³) このとき、 $H_k(X; \mathbb{R}) = \text{Ker } \partial_k / \text{Im } \partial_{k+1}$ により定まるのが k -次ホモロジーである。 $C_k(X; \mathbb{R})$ 等は X の CW 分割の仕方に依存するが、最終的なホモトピー $H_k(X; \mathbb{R})$ は CW 分割の仕方に依らないことが知られている。なお、上の CW 分割を利用した定義以外のホモロジーの定義も複数あることを補足しておく。

Example 1.3. 図 4 の CW 分割で S^2 のホモロジーを計算すると、 $C_0 = \mathbb{R}e^0$, $C_1 = 0$, $C_2 = \mathbb{R}e^2$ であり、自動的に $\partial_k = 0$ が分かる。従って、

$$H_k(S^2; \mathbb{R}) \cong \begin{cases} \mathbb{R} & (k = 0, 2) \\ 0 & (k \neq 0, 2) \end{cases}$$

が S^2 のホモロジーである。

Example 1.4. 図 4 の CW 分割で T^2 のホモロジーを計算すると、 $C_0 = \mathbb{R}e^0$, $C_1 = \mathbb{R}e_1^1 \oplus \mathbb{R}e_2^1$, $C_2 = \mathbb{R}e^2$ であり、この場合も実はすべて $\partial_k = 0$ となっている。従って、

$$H_k(T^2; \mathbb{R}) \cong \begin{cases} \mathbb{R} & (k = 0, 2) \\ \mathbb{R}^2 & (k = 1) \\ 0 & (k \neq 0, 1, 2) \end{cases}$$

が T^2 のホモロジーである。

Remark 1.5. ホモロジーは位相同相よりも弱い、ホモトピー同値という条件を満たしていれば等しくなる。ハンドル分解が与えられたとき、各 k 次ハンドルを適切な方法で k 次胞体に置き換えて得られる空間は、元の空間とホモトピー同値になる。図 4 で与えられた CW 分割はちょうど図 3 のハンドルを胞体に置き換えてできる CW 分割になっている。

2 Morse 理論

2.1 Morse 関数と臨界点

1.1 節での S^2 や T^2 の高さ函数の話の思い出すと、 $\{z \leq a\}$ の形の変わる瞬間の値があった。 T^2 の場合 $a = -3, -1, 1, 3$ である。この値に関係するのが Morse 関数の臨界点、臨界値である。

Definition 2.1. 多様体 M 上の函数 $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ に対し、点 $p \in M$ が f の臨界点であるとは、 f の p での微分が 0 であることをいう。つまり、 p を含む座標 $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ を取るとき、 $f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \rightarrow \mathbb{R}$ の一階微分の点 $\varphi(p)$ での値がすべて 0 であることをいう。これは座標の取り方に寄らない。また、このとき $f(p) \in \mathbb{R}$ を f の臨界値という。

例えば S^2 の高さ函数 $f : S^2 \rightarrow \mathbb{R}$ の場合、北極 $(0, 0, 1)$ と南極 $(0, 0, -1)$ が臨界点、 $\pm 1 \in \mathbb{R}$ が臨界値である。実際、北極の周りの座標として xy -平面への射影を取り、これの下で $f = z$ を表すと $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

²線形写像とはベクトル空間の間の写像 $f : V \rightarrow W$ であって $f(su + tv) = sf(u) + tf(v) (\forall u, \forall v \in V, \forall s, \forall t \in \mathbb{R})$ を満たすものをいう。つまり行列の積で表せる写像のことである。

³ $\text{Im } \partial_{k+1} \subset C_k(X; \mathbb{R})$ は ∂_{k+1} の像のなす部分空間、 $\text{Ker } \partial_k \subset C_k(X; \mathbb{R})$ は $v \in C_k(X; \mathbb{R})$ のうち $\partial_k v = 0$ を満たすものなす部分空間を表す。

となるので、

$$\begin{aligned}\partial_x f(x, y) &= -\frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \\ \partial_y f(x, y) &= -\frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\end{aligned}$$

は $(x, y) = (0, 0)$ でともに 0 となる。南極も同様である。

T^2 の高さ函数の場合にも、点 $q^0 = (0, 0, -3)$, $q_1^1 = (0, 0, -1)$, $q_2^1 = (0, 0, 1)$, $q^2 = (0, 0, 3)$ が臨界点であり、臨界値はそれぞれ $-3, -1, 1, 3$ である。この値はちょうど $\{z \leq a\}$ の形の変わる瞬間の値と一致しているが、このことは後に定義する Morse 函数と呼ばれるものに対して一般に成立することである。

高さ函数 $f: T^2 \rightarrow \mathbb{R}$ の臨界点での 2 階微分を計算してみる。臨界点 $q^0 = (0, 0, -3)$ の近傍で

$$f(x, y) = -\sqrt{(2 + \sqrt{1-x^2})^2 - y^2}$$

となるので

$$D^2 f(0, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

同様に計算して、点 $q_1^1 = (0, 0, -1)$ では

$$D^2 f(0, 0) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

点 $q_2^1 = (0, 0, 1)$ で

$$D^2 f(0, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

点 $q^2 = (0, 0, 3)$ で

$$D^2 f(0, 0) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

各臨界点での近傍での f の様子は 2 階微分で分かり、例えば q^0 では $D^2 f(0, 0)$ の形から f が極小値を取っていることが分かる。⁴ 同様に q^2 は $D^2 f(0, 0)$ の形から f が極大値と分かる。一方で q_1^1 や q_2^1 では f の増加する方向と減少する方向が 1 次元ずつあることが分かり、いわゆる鞍型になっている。また、ハンドル分解におけるハンドル $D^k \times D^{2-k}$ について、ちょうど各臨界点での 2 階微分の減少する方向が一つ目の D^k に、増加する方向が二つ目の D^{2-k} と一致していることにも注意する。

一般に函数 $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ の臨界点 p において 2 階微分を考えると、

$$D^2(f \circ \varphi^{-1}) = (\partial_{x_i} \partial_{x_j} (f \circ \varphi^{-1}))_{1 \leq i, j \leq n} = \begin{pmatrix} \partial_{x_1} \partial_{x_1} (f \circ \varphi^{-1}) & \partial_{x_1} \partial_{x_2} (f \circ \varphi^{-1}) & \cdots \\ \partial_{x_2} \partial_{x_1} (f \circ \varphi^{-1}) & \partial_{x_2} \partial_{x_2} (f \circ \varphi^{-1}) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

は対称行列である。対称行列 A に対して直行列 T を取って

$$TA^t T = \begin{pmatrix} a_1 & & & 0 \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_n \end{pmatrix} \quad a_i \in \mathbb{R} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

と対角化でき、このときの $a_i \in \mathbb{R}$ たちを A の固有値と呼ぶ。臨界点 p における 2 階微分の固有値のうち、0-固有値、負の固有値、正の固有値の数は座標の取り方に寄らない。

Definition 2.2. 多様体上の函数 $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ の臨界点 $p \in M$ において 2 階微分が固有値 0 を持たないとき p は非退化臨界点であるという。このとき、2 階微分の負の固有値の数を指数という。函数 f のすべての臨界点が非退化なとき、 f を Morse 函数と呼ぶ。

どのような関数も少し摂動することで Morse 函数にできることが知られている。

⁴実際は最小値である。

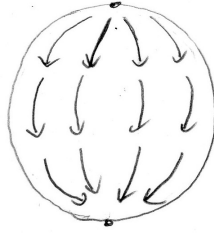


図 6: S^2 上の、下へ動くベクトル場

2.2 ベクトル場と flow

T^2 の高さ関数について成立したことの多くが一般のコンパクト多様体⁵上の Morse 関数でも成立する。まず、臨界値を含まない開区間上では $M^a = \{p \in M; f(p) \leq a\}$ は変化しないことが次から分かる。

Proposition 2.3. コンパクト多様体 M 上の関数 $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ について、閉区間 $[a, b] \subset \mathbb{R}$ の中に f の臨界値が含まれなければ、 $M^a \cong M^b$ (微分同相) である。

これは f の勾配 (gradient) あるいはそれに類するベクトル場の生成する flow を用いて証明される。まずはベクトル場や flow について説明する。 S^2 に対して図 6 の方向に動く連続変形 $\varphi_t: S^2 \rightarrow S^2$ ($t \in \mathbb{R}$) (但し $\varphi_0 = \text{id}$ は恒等写像)⁶ を考えると、 φ_t は高さ関数 $f = z$ の臨界点の北極と南極を固定し、それ以外の点では $\varphi_t(p)$ での f の値が t が大きくなるにつれて減少していくことが分かる。 φ_t の定義のために図の矢印を用いたように、可微分な変形の族 $\varphi_t: S^2 \rightarrow S^2$ は各時刻での微分 $X_t(p) = \frac{d}{dt}\varphi_t(p)$ たちと 1: 1 に対応する。この X_t のような、多様体上のすべての点にベクトルを対応させるものを、ベクトル場と呼ぶ。(通常はベクトル場と言えば時間に依存しないものを指すことが多い。) また、対応する φ_t ($t \in \mathbb{R}$) をベクトル場 $(X_t)_{t \in \mathbb{R}}$ の生成する flow と呼ぶ。(時間に依存しない) ベクトル場 X に対して、関数 $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ の X 方向への微分 $X(f): M \rightarrow \mathbb{R}$ が、各点でベクトル場の方向に微分することで定まる。(つまり、関数 $X(f)$ の点 p での値 $X(f)(p)$ は、関数 f の点 p における $X(p)$ 方向への微分で与えられる。) 例えば、ベクトル場 X の生成する flow φ_t と M 上の関数 f について、 $f(\varphi_t(p))$ がすべての点 p に対して t について (広義) 単調減少であることと、 $X(f) \leq 0$ が成立することが同値になっている。

さて、Proposition 2.3 の証明は次のように行われる。関数 f に対して、 M 上のベクトル場 X であって、 $X(f) \leq 0$ かつ等号成立は f の臨界点のみ、となるものが存在する。⁷ 仮定より $f^{-1}([a, b]) \subset M$ には臨界点が含まれていないのでこの上では $X(f) < 0$ である。 $\chi: M \rightarrow [0, 1]$ を、 $f^{-1}([a, b])$ 上で 1 をとり、その十分近い近傍の外で 0 をとるような可微分関数として、新しいベクトル場を $Y = \chi \frac{1}{|X(f)|} X$ で定めると、 $f^{-1}([a, b])$ 上で $Y(f) = -1$ を満たす。 Y の生成する flow $\varphi_t: M \rightarrow M$ を取れば、 $\varphi_{b-a}: M^b \rightarrow M^a$ が微分同相を与えることは容易にわかる。これで Proposition 2.3 が示された。

Morse 関数 f の臨界点の前後で M^a がどのように変化するのは、その臨界点の指数のみで決定される。このことは次からわかる。

Proposition 2.4 (Morse の補題). $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ の臨界点 $p \in M$ が非退化なとき、 p の近傍の座標 $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ を取って $\varphi(p) = (0, \dots, 0)$ かつ

$$f \circ \varphi^{-1}(x_1, \dots, x_n) = f(p) - x_1^2 - \dots - x_k^2 + x_{k+1}^2 + \dots + x_n^2$$

とできる。ここで $0 \leq k \leq n$ は点 p での指数である。

この命題から、臨界値前後での差が、指数と同じ次数のハンドルの接着に一致することを示すことができる。

⁵ 「コンパクト」の定義はしないが、ここではユークリッド空間 \mathbb{R}^N の有界閉集合として実現できる多様体と思ってもらえれば良い。

⁶ 例えば $\varphi_t: S^2 \rightarrow S^2$ ($t \in \mathbb{R}$) として

$$\varphi_t(a \sin 2\theta_0, b \sin 2\theta_0, \cos 2\theta_0) = (a \sin 2\theta_t, b \sin 2\theta_t, \cos 2\theta_t), \quad \tan \theta_t = e^t \tan \theta_0 \quad (a^2 + b^2 = 1, 0 \leq \theta_t \leq \frac{\pi}{2})$$

で定まるものがとれる。これはベクトル場 $-\text{grad } z$ の生成する flow である。

⁷ 例えば $-\text{grad } f$ は条件を満たす。

2.3 Morse 関数とベクトル場を用いたホモロジーの定義

前節で、コンパクト多様体 M 上のベクトル場 X であって、 $X(f) \leq 0$ かつ等号成立は f の臨界点のみ、となるようなものを用いた。このようなベクトル場を用いて M のホモロジーが定義できることをここでは説明する。Morse 関数 f の臨界点と接着するハンドルは $1:1$ に対応していたので、

$$C_k(M; \mathbb{R}) = \bigoplus_{p: \text{指数 } k \text{ の臨界点}} \mathbb{R}\langle p \rangle$$

は f の臨界点の生成するベクトル空間とみなすことができる。この場合の $\partial_k : C_k(M; \mathbb{R}) \rightarrow C_{k-1}(M; \mathbb{R})$ の定義を、上のベクトル場 X を用いて定義することができる。曲線 $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$ が微分方程式 $\frac{d\gamma}{dt}(t) = X(\gamma(t))$ を満たすとき γ を X の積分曲線と呼ぶが、その極限 $\gamma(\pm\infty) = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \gamma(t)$ はともに X の零点すなわち f の臨界点である。 X が Morse-Smale 条件と呼ばれる条件を満たしているときには、指数 k の臨界点 p から指数 $k-1$ の臨界点 q への積分曲線の数是有有限個になっている。(但しパラメータをずらしただけの曲線は同一のものとして数える。) この積分曲線の数、適切な方法で正負の符号をつけて数えるとき、

$$\partial_k \langle p \rangle = \sum_{q: \text{指数 } k-1 \text{ の臨界点}} (p \text{ から } q \text{ への積分曲線の数}) \cdot \langle q \rangle$$

がちょうど $\partial_k : C_k(M; \mathbb{R}) \rightarrow C_{k-1}(M; \mathbb{R})$ の定義に一致することが知られている。

また、各 $a \in \mathbb{R}$ に対して

$$C_k^a = \bigoplus_{\substack{p: \text{指数 } k \text{ の臨界点} \\ f(p) \leq a}} \mathbb{R}\langle p \rangle \subset C_k(M; \mathbb{R})$$

と定めれば $\partial_k(C_k^a) \subset C_{k-1}^a$ が成立するため

$$\frac{\text{Ker}(\partial_k|_{C_k^a} : C_k^a \rightarrow C_{k-1}^a)}{\text{Im}(\partial_{k+1}|_{C_{k+1}^a} : C_{k+1}^a \rightarrow C_k^a)}$$

が定義されるが、これはちょうど $M^a \subset M$ のホモロジー $H_k(M^a; \mathbb{R})$ に一致する。

2.4 スペクトル不変量

$a \leq b$ に対して包含写像 $M^a \hookrightarrow M^b$ から線形写像 $H_k(M^a; \mathbb{R}) \rightarrow H_k(M^b; \mathbb{R})$ が定まる。前節の記号では、これは包含写像 $C_k^a \hookrightarrow C_k^b$ から誘導される写像になっている。 $\alpha \neq 0 \in H_k(M; \mathbb{R})$ に対して

$$c_\alpha(f) = c(\alpha, f) := \inf\{a \in \mathbb{R}; \alpha \in \text{Im}(H_k(M^a; \mathbb{R}) \rightarrow H_k(M; \mathbb{R}))\}$$

をスペクトル不変量と呼ぶ。言い換えれば、 $\alpha \in H_k(M; \mathbb{R})$ の代表元として C_k^a 内に含まれるものがあるかを探し、含むような $a \in \mathbb{R}$ の最小値を $c_\alpha(f)$ と定めているのである。 $H_k(M; \mathbb{R})$ は Morse 関数 f に依存しないが $M^a = \{p \in M; f(p) \leq a\}$ や C_k^a 等のチェーンそのものは f に依存しており、 c_α は Morse 関数に対して実数を対応させる関数になっている。

Example 2.5. S^2 のホモロジーは

$$H_k(S^2; \mathbb{R}) = \begin{cases} \mathbb{R} & (k = 0, 2) \\ 0 & (k \neq 0, 2) \end{cases}$$

であったが、 H_0, H_2 の生成元はそれぞれ臨界点 $q^0 = (0, 0, -1)$, $q^2 = (0, 0, 1)$ であった。(あるいは胞体 e^0, e^2 であった。) 従って、高さ関数 $f = z$ に対して $c_{q^0}(f) = -1$, $c_{q^2}(f) = 1$ であることが容易にわかる。

Example 2.6. T^2 のホモロジーは

$$H_k(T^2; \mathbb{R}) = \begin{cases} \mathbb{R} & (k = 0, 2) \\ \mathbb{R}^2 & (k = 1) \\ 0 & (k \neq 0, 1, 2) \end{cases}$$

そしてその生成元は q^0, q_1^1, q_2^1, q^2 であった。従って高さ函数 $f = z$ に対して $c_{q^0}(f) = -3, c_{q_1^1}(f) = -1, c_{q_2^1}(f) = 1, c_{q^2}(f) = 3$ である。

Proposition 2.7. スペクトル不変量 c_α は次を満たす。

- $c_\alpha(f) \in \{f \text{ の臨界値} \}$
- $a \geq 0, b \in \mathbb{R}$ に対して $c_\alpha(af + b) = ac_\alpha(f) + b$
- $\min_M(f - g) \leq c_\alpha(f) - c_\alpha(g) \leq \max_M(f - g)$ 特に $f \leq g$ ならば $c_\alpha(f) \leq c_\alpha(g)$

最後の条件と、任意の函数が Morse 函数で近似できることから、任意の連続函数 $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ に対して $c_\alpha(f) \in \mathbb{R}$ を定義できる。特に定数函数 $a \in \mathbb{R}$ に対しては $c_\alpha(a) = a$ である。

3 Symplectic 幾何の場合

3.1 Hamilton ベクトル場

\mathbb{R}^{2n} の点を $(x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_n, y_n) \in \mathbb{R}^{2n}$ のように書く。これは $(x_1 + \sqrt{-1}y_1, x_2 + \sqrt{-1}y_2, \dots, x_n + \sqrt{-1}y_n) \in \mathbb{C}^n$ との対応を意識した表示である。函数 $H : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ に対して Hamilton ベクトル場 X_H が

$$X_H = \sum_i \left(\frac{\partial H}{\partial y_i} \frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{\partial H}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial y_i} \right)$$

で定まる。ここで、 $\frac{\partial}{\partial x_i}$ は x_i 軸方向への正の単位ベクトルである。⁸ $\frac{\partial}{\partial y_i}$ も同様である。

Example 3.1. \mathbb{R}^2 の場合を考える。 $H(x, y) = y$ のとき $X_H = \frac{\partial}{\partial x}$ のためその flow $\varphi_t(x, y) = (x + t, y)$ は x -軸方向への平行移動である。 $H(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ のとき $X_H(x, y) = y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y}$ のためその flow $\varphi_t(x + \sqrt{-1}y) = e^{\sqrt{-1}t}(x + \sqrt{-1}y)$ は原点を中心とした回転である。

Remark 3.2. X_H による H の微分は 0 である。従って X_H の軌道上 H は一定値である。

一般に、多様体に symplectic 構造というものが与えられると、函数に対して Hamilton ベクトル場を定義することができる。例えば T^2 には $T^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ として \mathbb{R}^{2n} から誘導される symplectic 構造が入る。詳しく述べると、 T^2 は四角形 $[0, 1] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2$ の対辺を同一視することでできるため T^2 の点は $(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]$ により表せるが、さらに x や y の小数点以下が同じなら同じ点を表す、と決めることで $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ により T^2 の点を表すことができる。 T^2 上の函数 $H : T^2 \rightarrow \mathbb{R}$ は、整数部分を除くことで \mathbb{R}^2 上の函数 $\tilde{H} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ を定める。これは $\tilde{H}(x + k, y + l) = \tilde{H}(x, y) \ (\forall k, l \in \mathbb{Z})$ を満たす関数である。この函数 \tilde{H} の Hamilton ベクトル場 $X_{\tilde{H}} = \sum_i (\frac{\partial \tilde{H}}{\partial y_i} \frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{\partial \tilde{H}}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial y_i})$ は、 (x, y) の少数部分にしか依存しないので、 T^2 のベクトル場を定めている。これが H の Hamilton ベクトル場 X_H である。

Example 3.3. T^2 上の函数 $H(x, y) = \sin(2\pi y)$ の Hamilton ベクトル場 $X_H = 2\pi \cos(2\pi y) \frac{\partial}{\partial x}$ の flow は、二つの円 $\{y = 1/4\}, \{y = 3/4\}$ 上で動かず、それら二つの円で区切られた二つの領域で逆向きに回転している。

Remark 3.4. T^2 のようなコンパクトな symplectic 多様体上の Hamilton ベクトル場の flow は固定点を持つ。これは flow の固定点と元の函数の臨界点が一致することと、コンパクト多様体上では函数は必ず最大値最小値を持ちこれらが臨界点になるからである。実はさらに一般に、時間に依存する Hamilton ベクトル場 X_t (各 X_t が函数 H_t の Hamilton ベクトル場) の flow であっても必ず固定点を持つことが知られている。これらの一般的な証明に用いられるのが次に説明する Floer ホモロジーである。

⁸このベクトル方向への函数の微分作用素が $\frac{\partial}{\partial x_i}$ となるためこのような記号を用いる。

3.2 Floer ホモロジー

$\Omega_0 T^2$ を、 T^2 の閉曲線 $\gamma : S^1 (= \mathbb{R}/\mathbb{Z}) \rightarrow T^2$ であって可縮なもの全体のなす空間とする。なお、閉曲線 $\gamma : S^1 \rightarrow T^2$ が可縮であるとは、この場合には、 $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ の形で連続な関数 $x, y : S^1 \rightarrow \mathbb{R}$ を用いて表示できることと同値である。(時間に依存する) 関数 $H_t : T^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ($t \in [0, 1]$) と可縮な閉曲線 $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ に対して

$$\mathcal{A}_H(\gamma) = - \int_{S^1} x(t) \frac{dy}{dt}(t) dt + \int_0^1 H_t(\gamma(t)) dt$$

により $\mathcal{A}_H : \Omega_0 T^2 \rightarrow \mathbb{R}$ が定まる。 $\Omega_0 T^2$ は無限次元の空間であるが、適切な方法で微分を考えることができ、 \mathcal{A}_H の臨界点がちょうど $\frac{dy}{dt}(t) = X_{H_t}(\gamma(t))$ を満たす閉曲線に一致している。 H の Hamilton ベクトル場の flow を φ_t^H とするならば、これはちょうど $\varphi_1^H : T^2 \rightarrow T^2$ の固定点に対応する。(なお、何らかの時間に依存する関数 H により φ_1^H と表せる同相のことを Hamilton 同相と呼ぶ。)

\mathcal{A}_H を $\Omega_0 T^2$ 上の Morse 関数とみなして Morse 理論と同様にホモロジーを定義したものが Floer ホモロジー⁹である。なお、二階微分の正負の固有空間がともに無限次元となり通常の Morse 理論のように指数を定めたりハンドル分解したりはできないが、 $CF_*(T^2, H) = \bigoplus_{\gamma} \mathbb{R}\langle \gamma \rangle$ を \mathcal{A}_H の臨界点を基底とするベクトル空間として、 $\partial : CF_*(T^2, H) \rightarrow CF_{*-1}(T^2, H)$ を臨界点から臨界点への適切な方程式を満たす曲線の数により定めることでホモロジー $HF_*(T^2, H) = \text{Ker } \partial / \text{Im } \partial$ を定義することができる。

Proposition 3.5. $HF_*(T^2, H)$ は H_t によらずすべて同型であり、 $HF_*(T^2, H) \cong H_*(T^2; \mathbb{R})$ が成立する。¹⁰

Example 3.6. T^2 上の関数 $F : T^2 \rightarrow \mathbb{R}$ として $F(x, y) = \frac{1}{2\pi} \sin(2\pi y)$ を考えると、その Hamilton ベクトル場は $X_H(x, y) = \cos(2\pi y) \frac{\partial}{\partial x}$ である。同様に、 $G(x, y) = \frac{1}{2\pi} \sin(2\pi x)$ の Hamilton ベクトル場は $X_G = -\cos(2\pi x) \frac{\partial}{\partial y}$ である。(H, G の定める flow は Floer ホモロジーの定義に必要な非退化性を満たさない。¹¹) 関数 $H_t(x, y) : [0, 1] \times T^2 \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$H_t(x, y) = \begin{cases} \chi(t)F(x, y) & (t \in [0, \frac{1}{2}]) \\ \chi(t - \frac{1}{2})G(x, y) & (t \in [\frac{1}{2}, 1]) \end{cases}$$

で定める。但し $\chi : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ は $[0, \frac{1}{2}]$ の外で 0 をとり、 $[\frac{1}{100}, \frac{1}{2} - \frac{1}{100}]$ 上で 1 をとるような可微分関数とする。このとき Hamilton ベクトル場

$$X_{H_t} = \begin{cases} \chi(t) \cos(2\pi y) \frac{\partial}{\partial x} & (t \in [0, \frac{1}{2}]) \\ -\chi(t - \frac{1}{2}) \cos(2\pi x) \frac{\partial}{\partial y} & (t \in [\frac{1}{2}, 1]) \end{cases}$$

の flow φ_t^H について $\varphi_1^H : T^2 \rightarrow T^2$ の固定点は $\gamma^0 = (\frac{3}{4}, \frac{3}{4})$, $\gamma_1^1 = (\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$, $\gamma_2^1 = (\frac{3}{4}, \frac{1}{4})$, $\gamma^2 = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ の 4 点である。この場合は $\gamma^0, \gamma_1^1, \gamma_2^1, \gamma^2$ たちがすべて flow φ_t^H の固定点でもあるので対応する閉曲線も定値の閉曲線になっている。そして $C = \int_{\mathbb{R}} \chi dt$ とするとき閉曲線 $\gamma^0, \gamma_1^1, \gamma_2^1, \gamma^2$ での \mathcal{A}_H の値はそれぞれ $-\frac{C}{\pi}, 0, 0, \frac{C}{\pi}$ である。実は今回は $\partial : CF_*(T^2, H) \rightarrow CF_*(T^2, H)$ がすべて 0 なので、 $HF_*(T^2, H) = \mathbb{R}\gamma^0 \oplus \mathbb{R}\gamma_1^1 \oplus \mathbb{R}\gamma_2^1 \oplus \mathbb{R}\gamma^2$ となる。

Remark 3.7. より一般に、コンパクト symplectic 多様体 M 上の (時間に依存する) 関数 H_t に対して M の可縮な閉曲線の空間 $\Omega_0 M$ 上に関数 \mathcal{A}_H を定義し、これに対する Morse 理論として同様に Floer ホモロジーを定義することが可能である。但し、一般にはこのホモロジーの定義のためには係数を \mathbb{R} よりも大きな環にする必要があり、その環係数のもとで Proposition 3.5 のように Floer ホモロジーは通常のホモロジーと同型となる。さらに詳しく述べると、 M の適切な係数環上のホモロジーに対して特殊な積を定義することで環構造を入れたものが量子 (コ) ホモロジーであり、これを $QH(M)$ で表すと、Floer ホモロジー $HF(M, H)$ にも積を定義することができてこれらは環として同型となる。

⁹これは Hamiltonian に対する Floer ホモロジーなので Hamiltonian Floer homology とよばれる。

¹⁰ $CF_*(T^2, H)$ の次数を定義しないが、適切に定義すれば次数を含めて同型である。但し、通常は次数が $(\dim T^2)/2$ だけずれるような定義を採用することが多い。

¹¹但し、臨界点集合が多様体となっている場合の Bott Morse 理論を適用することは可能である。

3.3 Floer ホモロジーのスペクトル不変量

Morse 理論の時と同様に、 $\partial : \text{CF}(T^2, H) \rightarrow \text{CF}(T^2, H)$ は \mathcal{A}_H を減少させるので、

$$\text{CF}^a(T^2, H) = \text{span}\{\gamma; \mathcal{A}_H(\gamma) \leq a\} \subset \text{CF}(T^2, H)$$

は $\partial(\text{CF}^a(T^2, H)) \subset \text{CF}^a(T^2, H)$ を満たす。従って

$$\text{HF}^a(T^2, H) = \frac{\text{Ker } \partial|_{\text{CF}^a(T^2, H)}}{\text{Im } \partial|_{\text{CF}^a(T^2, H)}}$$

が定まる。よって各 $\alpha \neq 0 \in \text{CF}(T^2, H) \cong \text{QH}(T^2, H)$ に対してスペクトル不変量 $c_\alpha(H) = c(\alpha, H) \in \mathbb{R}$ が

$$c(\alpha, H) = \inf\{a \in \mathbb{R}; a \in \text{Im}(\text{HF}^a(T^2, H) \rightarrow \text{HF}(T^2, H))\}$$

により定まる。一般に、コンパクト symplectic 多様体 M 上の関数 H に対してもスペクトル不変量 $c_\alpha(H)$ を同様に定義することができる。

Proposition 3.8. スペクトル不変量 $c_\alpha(H)$ は次を満たす。

- $c_\alpha(H) \in \mathbb{R}$ は \mathcal{A}_H の臨界値集合に含まれる。(\mathcal{A}_H が非退化な場合)
- 関数 $a : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ に対して $(H + a)_t(p) = H_t(p) + a(t)$ のスペクトル不変量は

$$c_\alpha(H + a) = c_\alpha(H) + \int_0^1 a(t) dt$$

- Hamiltonian F, G に対して

$$\int_0^1 \min_M (F_t - G_t) dt \leq c_\alpha(F) - c_\alpha(G) \leq \int_0^1 \max_M (F_t - G_t) dt$$

特に $F_t \leq G_t$ ならば $c_\alpha(F) \leq c_\alpha(G)$

- $\alpha, \beta \in \text{QH}(M)$ の積 $\alpha\beta$ が 0 でないとき、

$$c(\alpha\beta, F\#G) \leq c(\alpha, F) + c(\beta, G)$$

ここで $(F\#G)_t = F_t + G_t \circ (\varphi_t^H)^{-1}$ は $\varphi_t^H \circ \varphi_t^G$ に対応する Hamiltonian である。

- $c_\alpha(H)$ は H の生成する flow φ_t^H の両端を固定したホモトピー類と H の積分値で決まる。つまり、 $\varphi_1^H = \varphi_1^G$ かつ φ_t^H と φ_t^G が $t = 0, 1$ を固定して Hamiltonian の flow で連続につながられる場合、さらに $\int_0^1 \int_M H_t \omega^n = \int_0^1 \int_M G_t \omega^n$ ならば $c_\alpha(F) = c_\alpha(G)$

$\alpha \neq 0 \in \text{QH}(M)$ が冪等元の場合 (つまり $\alpha^2 = \alpha$ の場合) にはさらに、時間に依存しない関数 $H : M \rightarrow \mathbb{R}$ に対して $\zeta_\alpha(H) = \zeta(\alpha, H) \in \mathbb{R}$ を

$$\zeta(\alpha, H) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} c(\alpha, kH)$$

で定めることができる。なお、基本類と呼ばれる元 $[M] \in \text{QH}(M)$ が存在して環 $\text{QH}(M)$ の単位元となっているので、この $\alpha = [M]$ に対して $\zeta_{[M]}$ を定義できる。

$X \subset M$ が Hamilton 同相 $\varphi : M \rightarrow M$ があって $\varphi(X) \cap X = \emptyset$ とできるとき X は displaceable であるという。 ζ_α とこの displace できるかどうかとは関係がある。

上のスペクトル不変量の性質から次が従う。

Proposition 3.9. $\zeta_\alpha(H) = \zeta(\alpha, H) \in \mathbb{R}$ は次を満たす。

- 定数 $a \in \mathbb{R}$ に対して $\zeta_\alpha(a) = a$, $\zeta_\alpha(H + a) = \zeta_\alpha(H) + a$
- $a \geq 0$ に対して $\zeta_\alpha(aH) = a\zeta_\alpha(H)$

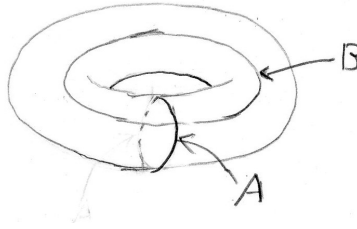


図 7: T^2 の heavy 集合 A と B

- $\text{supp } H = \overline{H} \neq 0 \subset M$ が *displace* できるとき $\zeta_\alpha(H) = 0$
- 函数 F, G が定める flow φ_t^H, φ_t^G が可換なとき¹² $\zeta_\alpha(F + G) \leq \zeta_\alpha(F) + \zeta_\alpha(G)$

Definition 3.10. 閉集合 $X \subset M$ が α -heavy であるとは任意の函数 H に対して $\zeta_\alpha(\alpha, H) \geq \min_X H$ を満たすことをいう。閉集合 $X \subset M$ が α -superheavy であるとは任意の函数 H に対して $\zeta_\alpha(\alpha, H) \leq \max_X H$ を満たすことをいう。

Proposition 3.11. 次が成立する。

- α -heavy や α -superheavy という条件は Hamilton 同相で不変な性質である。
- α -superheavy な集合は α -heavy である。
- $X \subset M$ が α -superheavy、 $Y \subset M$ が α -heavy のとき $X \cap Y \neq \emptyset$
- $X \subset M$ が α -heavy のとき任意の Hamilton 同相 $\varphi : M \rightarrow M$ に対して $\varphi(X) \cap X \neq \emptyset$

上の命題の二つ目にある superheavy と heavy の非対称性は一般に $\zeta_\alpha(-H) = \zeta_\alpha(H)$ が成立しないことによる。

Example 3.12. T^2 内の図 7 の A, B はともに $[T^2]$ -heavy である。また、 $A \cup B$ は T^2 -superheavy である。従って任意の Hamilton 同相 $\varphi : T^2 \rightarrow T^2$ に対して $\varphi(A) \cap A \neq \emptyset$ かつ $\varphi(B) \cap B \neq \emptyset$ である。

Example 3.13. S^2 に標準的な symplectic 構造をいれたとき大円は $[S^2]$ -superheavy である。なお、この場合には Hamilton 同相と面積と向きを保つ同相は一致するので、このことから大円が *displace* できないことが分かる。より一般に、複素射影空間 $\mathbb{C}P^n$ に標準的な symplectic 構造をいれたとき、 $\{(z_0 : z_1 : \dots : z_n) \in \mathbb{C}P^n; |z_0| = |z_1| = \dots = |z_n|\}$ も $[\mathbb{C}P^n]$ -superheavy である。

二つのコンパクト symplectic 多様体 M, N について、 $A \subset M$ が $[M]$ -(super)heavy、 $B \subset N$ が $[N]$ -(super)heavy ならば $A \times B \subset M \times N$ も $[M \times N]$ -(super)heavy である。このことは函数 $F : M \rightarrow \mathbb{R}$, $G : N \rightarrow \mathbb{R}$ とそれらの和で定まる函数 $(F + G)(m, n) = F(m) + G(n) : M \times N \rightarrow \mathbb{R}$ のスペクトル不変量に対して $c_{[M \times N]}(F + G) = c_{[M]}(F) + c_{[N]}(G)$ が成立することを用いて証明される。この積に関する性質から、 $T^{2n} = T^2 \times T^2 \times \dots \times T^2$ 等様々なコンパクト symplectic 多様体の *displace* できない集合を見つけることができる。

参考文献

Morse 理論についてはたとえば

J. Milnor, Morse Theory, Annals of Mathematical Studies 51, Princeton University Press, 1963.

松本幸夫 Morse 理論の基礎 岩波書店 1997

symplectic 多様体のスペクトル不変量とその応用については

L. Polterovich, D. Rosen, Function theory on symplectic manifolds, American Mathematical Society, 2014.

¹²Poisson bracket を用いればこれは $\{F, G\} = 0$ を満たすことと同値