

数え上げ幾何学と導来代数幾何学

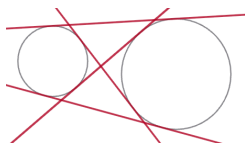
金城翼

まず最初に次の問題を考えてみましょう。

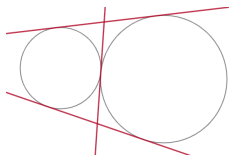
問題. 平面に二つの円 Γ_1 と Γ_2 が与えられている。このとき、二つの円の両方に接する直線はいくつあるか？

このように、幾何学的な対象の数え上げを調べる数学分野を**数え上げ幾何学**といいます。上の問題の答えは以下のように6種類の場合わけで与えられることがわかります。

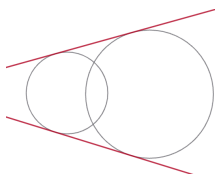
(1) 円 Γ_1 と Γ_2 が共有点を持たず、内部を共有しないとき: 4 本.



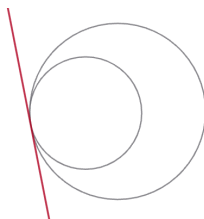
(2) 円 Γ_1 と Γ_2 が外部で接するとき: 3 本.



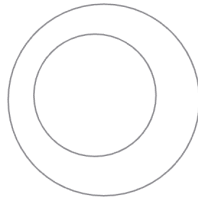
(3) 円 Γ_1 と Γ_2 が二点で交わる時: 2 本.



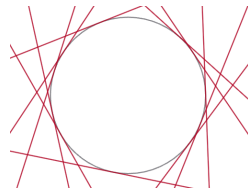
(4) 片方の円がもう一方に含まれ、一点を共有するとき: 1 本.



(5) 片方の円がもう一方に含まれ、点を共有しないとき: 0 本.



(6) 円が Γ_1 と Γ_2 が一致するとき: 無限本.



数学では、文脈にもよりますが、答えの場合わけが少ない方が良い問題の定式化・枠組みであると考えられることが多いです。この問題でも場合わけの数を減らすような定式化を考えることができるでしょうか？

まず、この問題を実数平面 $\mathbb{R}^2$ から複素数平面 $\mathbb{C}^2$ まで拡張することを考えます。円の方程式は二次式で与えられるので、 Γ_1, Γ_2 は $\mathbb{C}^2$ の二次曲線^{*1} $\tilde{\Gamma}_1, \tilde{\Gamma}_2$ に拡張されることがわかります。すると、ケース (3), (5) における円は複素座標で二つの交点を持ち、また $\tilde{\Gamma}_1$ と $\tilde{\Gamma}_2$ に接する直線が 4 本存在することがわかります。ケース (2) については、複素座標に拡張しても共通接線の本数は増えませんが、(2) の状況が (1) における円が近づく極限であると考え、真ん中の直線は二重の重複度を持っているものとして考えられることがわかります。ケース (4) については、複素座標に拡張すると共通接線が 2 本増え、また図示されている実平面内の直線は二重の重複度を持っていることがわかります。

以上の議論をまとめると、(1) — (5) については、「複素座標への拡張」および「重複度の導入」により、いずれも共通接線の本数が 4 本になることがわかりました。最終日の講演で詳細を説明しますが、重複度の導入は幾何学的にはスキーム構造を考えることに対応します。スキームとはグロタンディークが 1960 年代に導入した空間概念で、代数幾何学の歴史をスキーム論以前と以後に二分するほどに重要なものです。スキームについては最終日 (§5) に簡単に解説します。

ではケース (6) についても何らかの方法で 4 本という解を与えることはできるでしょうか？実はスキーム論をさらに拡張した**導来代数幾何学**を用いるとそのような定式化が可能になるのです！導来代数幾何学は従来の代数幾何学を、柔らかい幾何学と呼ばれるホモトピー論を用いて強化した理論です。以上の議論を以下の表にまとめます：

^{*1} 複素座標での曲線は、実数の世界では二次元であることに注意してください。

	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
ナイーブな数え上げ	4	3	2	1	0	∞
複素座標に拡張	4	3	4	3	4	∞
複素座標に拡張 + 重複度	4	4	4	4	4	∞
複素座標に拡張 + 導来幾何構造	4	4	4	4	4	4

表 1: 共通接線の数

以下に共通接線の問題の導来代数幾何的な定式化を述べます。本講座の一つの目標は以下の命題の主張の内容を説明することです。

命題. 複素射影平面 $\mathbb{P}^2$ 内に二つの滑らかな二次曲線 C_1, C_2 が与えられている。このとき, C_1 と C_2 の両方に接する直線の導来モジュライ空間を M_{C_1, C_2} とするとき, 等式

$$\deg [M_{C_1, C_2}]_{\text{vir}} = 4$$

が成立する。

$[M_{C_1, C_2}]_{\text{vir}}$ は**仮想基本類**と呼ばれる量で、最終日の講義 (§5) で解説します。

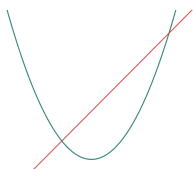
1 ベズーの定理

高校数学で見覚えのある方も多いと思いますが、以下の問題について考えてみましょう。

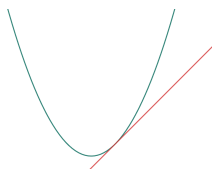
問題 1.1. 放物線 $y = x^2$ と直線 $ax + by + c = 0$ は何点で交わるか？

まず $b = 0$ が否かで場合わけをします。 $b \neq 0$ の場合を考えましょう。 $ax + by + c = 0$ という式は $y = -\frac{a}{b} \cdot x - \frac{c}{b}$ と変形できます。従って直線と放物線との交点の x 座標は $x^2 + \frac{a}{b} \cdot x + \frac{c}{b} = 0$ で与えられることがわかります。従って判別式を計算することで以下の結果を得ます：

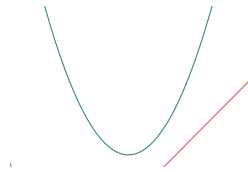
(1) $b \neq 0$ かつ $a^2 > 4bc$ のとき: 2 点.



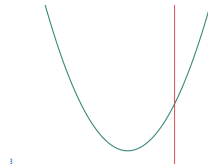
(2) $b \neq 0$ かつ $a^2 = 4bc$ のとき: 1 点.



(3) $b \neq 0$ かつ $a^2 < 4bc$ のとき: 0 点.



(4) $b = 0$ のとき: 1 点.



この問題についても場合わけが少なくなるような定式化を考えてみましょう。ケース (2) については重複度込みで数えると二点になることがわかります。ケース (3) については複素座標まで拡張して考えると二点で交わるということがわかります。ケース (4) についてはどうでしょうか? この場合は複素座標で考えても重複度を考えても一点のままです。一方で、この場合は放物線と直線が y 軸方向の無限遠点で交わっていると解釈することができ、そうすると二点で交わっていると考えることができます。

無限遠の概念を数学的に厳密に説明するために射影空間を導入します。ここでは後の便利のために、一般次元で導入します。正の整数 n に対して、 $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ に同値関係

$$(a_0, \dots, a_n) \sim (b_0, \dots, b_n) \Leftrightarrow \exists \lambda, a_i = \lambda b_i (\forall i)$$

を定義します。例えば

$$(1, 2, 3) \sim (2, 4, 6) \not\sim (3, 6, 8)$$

です。 n 次元射影空間 $\mathbb{P}^n$ を

$$\mathbb{P}^n := (\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}) / \sim$$

により定義します。 $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ の同値類を $[a_0 : \dots : a_n] \in \mathbb{P}^n$ で表すことにします。

いま、 $[a : b : 1]$ として表される点全体は $\mathbb{C}^2$ と自然に同一視されます。つまり埋め込み

$$\mathbb{C}^2 \hookrightarrow \mathbb{P}^2$$

が存在します。この補集合は $[a : b : 0]$ と表される点全体です。 $[a : b : \epsilon] = [(1/\epsilon) \cdot a : (1/\epsilon) \cdot b : 1]$ であることを考えると、点 $[a : b : 0]$ は点 (Ra, Rb) を R を無限大に飛ばした極限点として記述することができます。つまり射影平面 $\mathbb{P}^2$ は $\mathbb{C}^2$ に、各方向ベクトルの無限遠の極限点を付け加えた空間であることがわかります。

いま、問題 1.1 を再度考えることにします。放物線 $y = x^2$ は $\mathbb{C}^2$ 内で定義されますが、閉包をとることで射影平面 $\mathbb{P}^2$ の閉集合を定めることがわかります。別の方法として、 $yz = x^2$ という方程式を考えると、 $\mathbb{C}^3$ における解空間は同値関係 $\sim$ で閉じていることがわかり、 $\mathbb{P}^2$ の部分集合を定めることがわかります。この集合は元の $\mathbb{C}^2$ 内の放物線 $y = x^2$ に無限円点 $[0 : 1 : 0]$ を付け加えたものと一致することがわかります。同様に直線 $ax + by + c = 0$ も $\mathbb{P}^2$ における方程式 $ax + by + cz = 0$ の解空間にコンパクト化されます。これは無限円点 $[-b : a : 0]$ を元の直線に加えたものと一致します。いま、 $\mathbb{C}^2$ における放物線と直線の交点の問題を、 $\mathbb{P}^2$ に拡張して考えてみましょう。すると、(1) — (3) の場合には交点の数が増えないことがわかります。一方で、(4) の場合には無限遠点 $[0 : 1 : 0]$ が新たに交点になり、交点の数が二つになりました。

以上の議論を表にまとめましょう。

	(1)	(2)	(3)	(4)
ナイーブな数え上げ	2	1	0	1
複素座標に拡張	2	1	2	1
複素座標に拡張 + 重複度	2	2	2	1
複素座標に拡張 + 重複度 + 射影平面 $\mathbb{P}^2$ で考える	2	2	2	2

表 2: 放物線と直線の交点の数

以上の議論を定理の形でまとめます。

定理 1.2. 射影平面 $\mathbb{P}^2$ において、曲線 $y^2 = xz$ と直線 $ax + by + cz = 0$ は重複度込みで二点で交わる。

これまでは放物線と直線の交点の数について議論してきました。より一般に、 $\mathbb{P}^2$ 内の代数方程式で定義される二つの曲線はいくつの交点を持つでしょうか? 実はこの問題には非常に一般的な解答があることが知られています。

このことを説明するために、 d 次曲線の概念を導入します;

定義 1.3. 正の整数 d に対し、三変数の d 次斉次多項式とは 0 ではない多項式であって、 $f(x, y, z) = \sum_{\substack{0 \leq i, j, k \\ i+j+k=d}} a_{ijk} x^i y^j z^k$ とかけるもののことを指す。このような多項式 $f(x, y, z)$ に対し、 f の零点集合を

$$Z(f) := \{[a : b : c] \mid f(a, b, c) = 0\}$$

で定める。 $Z(f)$ のことを f の定める d 次曲線という。

いま C_1 を d_1 次曲線、 C_2 を d_2 次曲線とします。 C_1 と C_2 の交点の数が有限であるとき、各交点 $p \in C_1 \cap C_2$ に対し、重複度 $m_p \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ を定義することができます*2。ここでは定義は述べませんが、例えば C_1 が放物線、 C_2 が直線で C_1 と C_2 が p で接するときは $m_p = 2$ です。定理 1.2 は以下のように一般化されます:

定理 1.4 (ベズーの定理). C_1 を d_1 次曲線、 C_2 を d_2 次曲線とする。いま、 $C_1 \cap C_2$ が有限集合であるとする。このとき、重複度を込めた交点の数は $d_1 \cdot d_2$ である。言い換えると、次の等式が成立する:

$$\sum_{p \in C_1 \cap C_2} m_p = d_1 \cdot d_2.$$

この定理の厳密な証明はここでは省略します。証明の一つの方法として以下のようなものがあります:

1. まず交点の数が C_1 および C_2 の定義方程式の係数を摂動しても変化しないことを示す。帰結として、ある d_1 次曲線 C_1 と d_2 次曲線 C_2 に対して主張を示せば良いことがわかる。
2. C_1 が d_1 本の直線、 C_2 が d_2 本の直線の和集合になっている場合を考える。このとき、交点の数は明らかに $d_1 \cdot d_2$ である。

実はベズーの定理はさらに高次元の空間に一般化されることが知られています。射影空間 $\mathbb{P}^n$ の d 次超曲面とは、 d 次斉次多項式の零点集合として表される $\mathbb{P}^n$ の部分集合のことを指します。 $H_1, \dots, H_n \subset \mathbb{P}^n$ をそれ

*2 重複度の概念は一般には曲線自身ではなく、そのスキーム構造にも依存することに注意しておきます。例えば $C_1 = Z(x^2)$ 、 $C_2 = Z(y^2)$ のとき、交点 $[0 : 0 : 1]$ における重複度は 4 です。重複度は C_1 と C_2 のスキーム論的交差 $C_1 \cap C_2$ の点 p での構造層の茎の次元と一致します。詳細は最終日 (5) に説明します

それぞれ d_i 次超曲面とし、いま $H_1 \cap \cdots \cap H_n$ が有限集合であると仮定します。このとき、交点 $p \in H_1 \cap \cdots \cap H_n$ に対し、重複度 $m_p \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ が定義されます。高次元版のベズーの定理の主張は以下になります：

定理 1.5 (高次元ベズーの定理). $H_1, \dots, H_n$ の重複度を込めた交点の数は $d_1 d_2 \cdots d_n$ である。言い換えると、次の等式が成立する：

$$\sum_{p \in H_1 \cap \cdots \cap H_n} m_p = d_1 d_2 \cdots d_n.$$

ベズーの定理およびその高次元版では、交点集合が有限であるという仮定がついています。実は、導来代数幾何を用いると交点集合に仮定をおかないベズーの定理の一般化を定式化することができます。このことについては最終日の講義で詳細を説明しようと思います。

2 ベクトル束とオイラー数

初日の講義ではベズーの定理およびその高次元一般化を紹介しました。今日の講義ではベクトル束とオイラー数の概念を用いて、この定理をさらに一般化します。

まず射影代数多様体および代数多様体の概念を導入します。

定義 2.1. 射影体数多様体とは $\mathbb{P}^n$ の部分集合であって、有限個の超曲面の交叉 $H_1 \cap \cdots \cap H_d$ で表されるものをいう。代数多様体とは、射影代数多様体の差集合として表される図形のことを指す。

$\mathbb{P}^n$ には含まれる射影代数多様体全体を閉集合系とするような位相が入り、これをザリスキ位相といいます。任意の代数多様体にはザリスキ位相の誘導位相が定まり、これもザリスキ位相と呼ばれます。代数多様体の間の写像が (代数多様体の) 射であるとは、局所的に多項式を用いて表されることを指します。

代数多様体上の正則ベクトル束の概念を導入します。ベクトル束とはベクトル空間を束ねて構成される空間のことで、例えば代数多様体 X と有現次元ベクトル空間 V に対し $X \times V$ はベクトル束の例です。一般に代数多様体 X 上のベクトル束とは X の各点にベクトル空間を乗せて作られるような空間です。厳密な定義は以下で与えられます：

定義 2.2. 代数多様体 X 上の階数 n の正則ベクトル束とは代数多様体 E と射 $\pi: E \rightarrow X$ および射 $f: \mathbb{C}^* \times E \rightarrow E$ であって次の条件を満たすものである：

- $t \in \mathbb{C}^*$ と $v \in E$ に対し、 $\pi(f(t, v)) = \pi(v)$ である。
- 各 $x \in X$ に対し $\pi^{-1}(x)$ はベクトル空間であり、 f はベクトル空間のスカラー倍の構造を与える。
- あるザリスキ位相についての開被覆 $X = U_1 \cup \cdots \cup U_n$ および各点上のベクトル空間の構造を保つ $\phi_i: E|_{U_i} \cong U_i \times \mathbb{C}^n$ が存在し、各 i, j に対し $\phi_j|_{U_i \cap U_j} \circ \phi_i|_{U_i \cap U_j}^{-1}: (U_i \cap U_j) \times \mathbb{C}^n \rightarrow (U_i \cap U_j) \times \mathbb{C}^n$ は正則写像である。

ベクトル空間に対して定義される操作はそのままベクトル束に拡張することができます。例えばベクトル束 E の双対束 $E^\vee$ や、二つのベクトル束 E, F が与えられたとき、そのテンソル積 $E \otimes F$ を定義することができます。

ベクトル束 E に対して、 E の切断とは、代数多様体の射 $s: X \rightarrow E$ であって、射影との合成 $\pi \circ s$ が恒等写像になるもののことを指します。 E の切断全体を $\Gamma(X, E)$ とかきます。 $\Gamma(X, E)$ には自然に $\mathbb{C}$ -ベクトル空間の構造が入ることがわかります。 E の切断 $s \in \Gamma(X, E)$ に対し、 $Z(s)$ で s の零点集合を表すことにします。

以下にベクトル束の重要な例を挙げます。

例 2.3. 射影空間 $\mathbb{P}^n$ 上の自明なベクトル束 $\mathbb{P}^n \times \mathbb{C}^{n+1}$ を考える。 $\mathbb{P}^n \times \mathbb{C}^{n+1}$ の部分束 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1)$ を

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1) := \{([a_0 : \cdots : a_n], (b_0, \dots, b_n)) \in \mathbb{P}^n \times \mathbb{C}^{n+1} \mid a_i b_j = b_i a_j \forall i, j\}$$

で定める。このとき $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1)$ は階数 1 のベクトル束であることがわかる。 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1) := \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1)^\vee$, 正の整数 d に対し $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d) := \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)^{\otimes d}$ とおく。

命題 2.4. $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)$ の切断のなす空間と $n+1$ 変数の d 次斉次多項式のなすベクトル空間に自然な同型が存在する。 $s_f \in \Gamma(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d))$ を斉次式 f に対応する切断とすると $Z(s_f) = H_f$ が成立する。ここで H_f は $f=0$ の定める $\mathbb{P}^n$ の超曲面を表す。

Proof. 代数多様体の射 $p: \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1) \rightarrow \mathbb{C}^{n+1}$ を

$$([a_0 : \cdots : a_n], (b_0, \dots, b_n)) \mapsto (b_0, \dots, b_n)$$

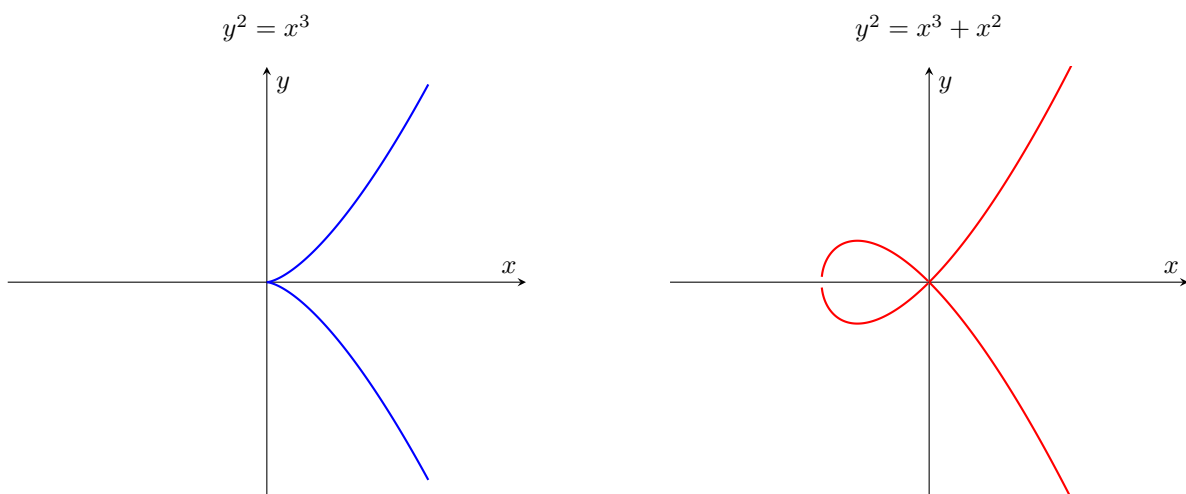
で定める。 $0 \neq v \in \mathbb{C}^{n+1}$ に対し $p^{-1}(v)$ は一点であり、 $p^{-1}(0)$ は射影空間 $\mathbb{P}^n$ と一致する。

いま s を $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)$ の切断とする。関数 $f_s: \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1) \rightarrow \mathbb{C}$ を

$$f_s: t \mapsto t^{\otimes d} \cdot s$$

により定める。作り方から、 $f_s|_{p^{-1}(0)} = 0$ である。したがって、射 $\bar{f}_s: \mathbb{C}^{n+1} \rightarrow \mathbb{C}$ が存在し、 $f_s = \bar{f}_s \circ p$ が成立する。 $\bar{f}_s$ は多項式であり、作り方から $\bar{f}_s(tv) = t^d \bar{f}_s(v)$ が成立する。従って $\bar{f}_s$ は d 次斉次式である。逆に d 次斉次式が与えられたとき、上の構成の逆を考えると $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)$ の切断が定義されることがわかり、主張を得る。零点集合についての主張は構成から明らかである。 $\square$

いま X を射影代数多様体とします。また、 X は滑らか、すなわち特異点を持たないものとします。特異点の厳密な定義はここでは述べませんが、以下の図における原点のように、尖っていたり分岐があったりするような点のことを指します：



次の事実が知られています：

定理 2.5. X の次元を n とし、 E を X 上の階数 n のベクトル束とする。このときオイラー数と呼ばれる整数 $e(E) \in \mathbb{Z}$ が存在し、次の事実が成立する：

- $s \in \Gamma(X, E)$ を切断として、 $Z(s)$ が有限集合であるとする。このとき $Z(s)$ の重複度込みでの数え上げは $e(E)$ と一致する。

古典的な数え上げ幾何学の多くの問題はベクトル束の切断の零点の数え上げの問題に帰着されるため、この定理は数え上げ幾何学において非常に重要な役割を果たします。すぐ後に説明するように、ベズーの定理 1.4 もベクトル束の切断の零点の数え上げの問題として定式化し直すことができます。オイラー数の具体的な計算例として次の事実が知られています：

例 2.6. $e(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d_1) \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d_n)) = d_1 \cdots d_n$. この等式はのちに系 3.5 でチャーン類を用いて証明を与える。

定理 2.5 がベズーの定理 1.4 の一般化になっていることを説明します。いま、 s_1 と s_2 をそれぞれ $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(d_1)$ と $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(d_2)$ の切断とします。このとき、命題 2.4 により、 s_1 は d_1 次斉次式 f_1 に、 s_2 は d_2 次斉次式 f_2 に対応します。 C_1, C_2 をそれぞれ $f_1 = 0, f_2 = 0$ の定める曲線とすると、零点集合には $Z(s_1) = C_1, Z(s_2) = C_2$ という関係が成立するのです。従って、等式

$$Z((s_1, s_2)) = C_1 \cap C_2$$

が成立します。ここで (s_1, s_2) は $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d_1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d_2)$ の切断を表します。いま、 $C_1 \cap C_2$ が有限集合であるとき、定理 2.5 と例 2.6 から、 $C_1 \cap C_2$ の重複度込みの数え上げは $d_1 \cdot d_2$ になることがわかり、ベズーの定理 1.4 が復元されることがわかります。高次元ベズーの定理 1.5 も同様に復元されることがわかります。

補足 2.7. オイラー数の名前の由来について説明します。滑らかな多様体 X が与えられたとき、その接束 T_X を定義することができます。接束は各点の上で接空間を束ねて作られるベクトル束です。 T_X のオイラー数 $e(T_X)$ のことを X のオイラー数といいます。 T_X の切断は X のベクトル場に対応するので、 $e(T_X)$ は X 上のベクトル場の退化している点の重複度付きでの数え上げに一致します。

一方で、全く異なる方法で多様体のオイラー数を定義することができます。詳細は省略しますが、多様体の三角形分割を考えて、

$$X \text{ のオイラー数} = \text{頂点の数} - \text{辺の数} + \text{二次元面の数} - \text{三次元面の数} + \cdots$$

として定義されます。この値は三角形分割の取り方によらないことがわかります。有名なオイラーの多面体定理は、二次元球面 S^2 のオイラー数が 2 であるという主張として解釈することができます。ポアンカレホップの定理と呼ばれる定理によってこの二つのオイラー数の定義が同値であることが知られています。

3 チャウ環とチャーン類

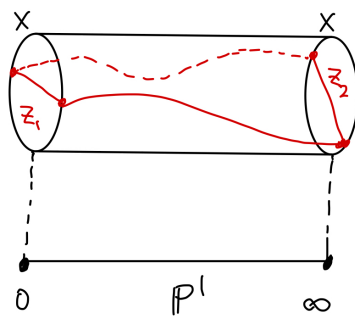
前の節でベズーの定理はオイラー数の計算に帰着されることを説明しました。また、次の節で説明するように古典的な数え上げ幾何学の問題は多くの場合オイラー数の計算に帰着されます。ここではベクトル束のオイラー数の計算方法について説明します。計算する上で、オイラー数の一般化であるチャーン類を導入しておくので、これについても解説します。

まず最初に代数多様体のチャウ群について説明します。詳細については [2, §1] を参照してください。代数多様体 X に対し、チャウ群

$$\mathrm{CH}_*(X) = \mathrm{CH}_0(X) \oplus \mathrm{CH}_1(X) \oplus \cdots \oplus \mathrm{CH}_n(X)$$

は次数付きアーベル群であり、次のような性質を満たすものです:

1. X の i 次元閉部分代数多様体 Y に対し、対応する元 $[Y] \in \mathrm{CH}_i(X)$ が存在する。特に $[X] \in \mathrm{CH}_{\dim X}(X)$ が存在する。これらの元は $\mathrm{CH}_*(X)$ の基底をなす。
2. $Z_1 \subset X$ と $Z_2 \subset X$ が図のように $\mathbb{P}^1$ 上の変形を通してうつりあうとき、 $[Z_1] = [Z_2]$ が成立する。このような関係にある Z_1 と Z_2 を**有理同値**という。



チャウ群の元のことを**(代数的) サイクル**といいます。有理同値の定義は一見わかりにくいかもしれませんが。ここでは最も基本的な有理同値の例について説明します:

例 3.1. 超平面 $H_i \subset \mathbb{P}^n$ を

$$H_i := \{[a_0 : \cdots : a_n] \mid a_i = 0\}$$

によって定める。このとき、異なる i と j に対して H_i と H_j は有理同値である。実際、 $[s : t] \in \mathbb{P}^1$ に対し、 $H_{i,j}^{[s:t]}$ を

$$H_{i,j}^{[s:t]} := \{[a_0 : \cdots : a_n] \mid a_i t + a_j s = 0\}$$

によって定めると、 $H_{i,j}^{[1:0]} = H_i$, $H_{i,j}^{[0:1]} = H_j$ が成立し、これらの超平面が $\mathbb{P}^1$ 上の変形でうつりあうことがわかる。

$\mathrm{CH}_0(X)$ は X の点によって生成される $\mathbb{Z}$ -加群になっています。**次数写像**を

$$\deg: \mathrm{CH}_0(X) \rightarrow \mathbb{Z}, \quad a_1[p_1] + \cdots + a_n[p_n] \mapsto \sum a_i$$

によって定めます。これはサイクルに含まれる点の数を返す写像です。

次に滑らかな射影代数多様体 X の**チャウ環**を導入します。チャウ環は射影代数多様体の部分多様体の交わり方を記述する可換環で、数え上げ幾何学において非常に重要な役割を果たします。 $\mathrm{CH}^i(X) = \mathrm{CH}_{\dim X - i}(X)$ により定めます。このとき直和

$$\mathrm{CH}^*(X) = \mathrm{CH}^0(X) \oplus \mathrm{CH}^1(X) \oplus \cdots \oplus \mathrm{CH}^n(X)$$

は次数付き可換環 (すなわち、積 $\mathrm{CH}^i(X) \times \mathrm{CH}^j(X) \rightarrow \mathrm{CH}^{i+j}(X)$ が存在し可換環の構造を定めるものが存在) であり、積は次の性質を満たします:

1. $Y_1 \subset X$ と $Y_2 \subset X$ が与えられており、 $\dim(Y_1 \cap Y_2) = \dim Y_1 + \dim Y_2 - \dim X$ が成立しているとする。このとき

$$[Y_1] \cdot [Y_2] = \sum_{Z \subset Y_1 \cap Y_2} m_{Y_1, Y_2}^Z [Z]$$

が成立する。ここで Z は $Y_1 \cap Y_2$ の既約成分全体を動くものとし、 m_{Y_1, Y_2}^Z は交差の重複度を表す(ここでは重複度の定義は省略する)。

命題 3.2. $H_0 \subset \mathbb{P}^n$ を超平面とする。このとき、等式 $\deg[H_0]^n = 1$ が成立する。

Proof. $H_i \subset \mathbb{P}^n$ を例 3.1 のように定める。 $H_0, \dots, H_n$ は同じ代数的サイクルを定めるので、等式

$$[H_0]^n = [H_0] \cdots [H_{n-1}]$$

が成立する。チャウ環の積は重複度付きの交叉で定まり、 $H_0, \dots, H_{n-1}$ は互いに重複度 1 で交わっていることがわかるので、等式

$$[H_0] \cdots [H_{n-1}] = [H_0 \cap \cdots \cap H_{n-1}] = [p]$$

が成り立つ。ここで p は $H_0, \dots, H_{n-1}$ に含まれる唯一の点である。このことから主張を得る。 $\square$

射影空間のチャウ環は環として $[H_0]$ によって生成されることがわかります：

定理 3.3. $\mathrm{CH}^*(\mathbb{P}^n) \cong \mathbb{Z}[[H_0]]/[H_0]^{n+1}$ が成立する。

証明の概略。各 $\mathrm{CH}^i(\mathbb{P}^n)$ が $\mathbb{Z}$ と同型であり、 $[H_0]^i$ によって生成されることを示せば良い。 $i = 0$ のときは明らかである。 $i = 1$ の時に証明する。 $[Z] \in \mathrm{CH}^1(\mathbb{P}^n)$ をとる。 $[Z]$ は超曲面であるので、ある斉次式が存在し $Z = H_f$ の形で書くことができる。いま、 $[s:t] \in \mathbb{P}^1$ に対し、 $H^{[s:t]}$ を $s \cdot X_0^n + t \cdot f$ の定めるサイクルとする。構成より、 $[H^{[1:0]}] = n[H_0]$ 、 $[H^{[0:1]}] = [Z]$ が成立することがわかる。したがって $n[H_0] = [Z]$ がわかり、主張を得る。

いま $i > 1$ とする。このとき、任意のサイクルは H_0 のサイクルと有理同値であることがわかる^{*3}。従って n に関する帰納法を用いて主張を得る。詳細については [2, Theorem 2.1] を参照せよ。 $\square$

次にベクトル束の**チャーヌ類**を導入します。 X を滑らかな射影代数多様体とし、 E を X 上の階数 r のベクトル束としたとき、各 $i = 0, \dots, r$ に対して i 番目のチャーヌ類

$$c_i(E) \in \mathrm{CH}^i(X)$$

が定まり、次の性質を満たします：

1. $c_0(E) = r \cdot [X]$.
2. $r = \dim X$ のとき、 $\deg c_r(E) = e(E)$.
3. $s \in \Gamma(X, E)$ を切断とし、 $\dim Z(s) = \dim X - r$ が満たされているとする。 $Z_1, \dots, Z_m \subset Z(s)$ を既約分解とし、 m_i を Z_i における $s(X)$ と $0(X)$ の交差の重複度としたとき、等式

$$c_r(E) = \sum_i m_i [Z_i]$$

が成立する。

^{*3} 以下のような議論で証明される。チャウ群の一般論により、完全列 $\mathrm{CH}_i(H_0) \rightarrow \mathrm{CH}_i(\mathbb{P}^n) \rightarrow \mathrm{CH}_i(\mathbb{P}^n \setminus H_0) \rightarrow 0$ が存在する。 $\mathrm{CH}_i(\mathbb{A}^n)$ が $i = 0$ を除いて消滅することが知られているので、主張を得る。

4. (ホイットニー和公式) $c(E) = \sum_i c_i(E)$ とする。いま、ベクトル束の完全列 $0 \rightarrow E_1 \rightarrow E_2 \rightarrow E_3 \rightarrow 0$ が与えられたとき、等式

$$c(E_2) = c(E_1) \cdot c(E_3)$$

が成立する。

5. $\mathcal{L}$ と $\mathcal{M}$ を階数 1 のベクトル束とする。このとき、等式

$$c_1(\mathcal{L} \otimes \mathcal{M}) = c_1(\mathcal{L}) + c_1(\mathcal{M})$$

が成立する。

二つ目の性質より、チャーン類はオイラー数の一般化になっていることがわかります。三つ目の性質は定理 2.5 の一般化になっています。チャーン類には様々な構成が知られていますが、どの構成もあまり簡単ではないので、ここでは省略することとします。詳細が気になる方は [2, Chapter 5] を参照してください。

いま、チャーン類の基本的な計算例について説明します。

命題 3.4. $c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)) = d \cdot [H_0]$.

Proof. チャーン類の 5 つ目の性質により、 $d = 1$ の場合について証明すれば良いことがわかる。いま、命題 2.4 を用いると、 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$ の切断 s で $Z(s) = [H_0]$ になるものが存在することがわかる。したがってチャーン類の 3 つ目の性質により主張を得る。 $\square$

系 3.5. $e(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d_1) \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d_n)) = d_1 \cdots d_n$.

Proof. ホイットニーの和公式と直前の命題により、等式

$$c_n(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d_1) \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d_n)) = c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d_1)) \cdots c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d_n)) = d_1 \cdots d_n [H_0]^n$$

が成立する。いま、両辺の次数を取ることを考える。左辺はチャーン類の二つ目の性質により $e(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d_1) \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d_n))$ に一致する。右辺は命題 3.2 により $d_1 \cdots d_n$ になることがわかり、主張を得る。 $\square$

4 数え上げ幾何学への応用

ここではオイラー数およびチャーン類の理論の数え上げ幾何学への応用について説明します。

4.1 共通接線の数え上げ

まず最初に、初日の講義で考えた共通接線の問題について再び考えてみましょう。

問題 4.1. $\mathbb{P}^2$ に滑らかな相異なる 2 次曲線 C_1 と C_2 が与えられている。このときこの二つの曲線両方に接する直線はいくつ存在するか？

この問題のベズーの定理を用いた解法について説明します。まず $C \subset \mathbb{P}^2$ を滑らかな二次曲線とします。いま C に接する直線全体のなす集合に代数多様体の構造が定まることを示します。 $C^\vee \subset \mathbb{P}^2$ を以下で定義します：

$$C^\vee := \{[a : b : c] \mid aX + bY + cZ = 0 \text{ の定める直線と } C \text{ は接する} \}$$

命題 4.2. $C^\vee \subset \mathbb{P}^2$ は 2 次曲線である。

証明の概略. C の定義方程式を $f = 0$ とする. C と $aX + bY + cZ = 0$ の定める直線が接するという条件は, f に $aX + bY + cZ = 0$ を代入して得られる二次方程式の解が重解になるということ、すなわち判別式が消えるということである。判別式は簡単な計算により a, b, c についての斉次二次式で表されることがわかり主張を得る。□

問題 4.1 は $C_1^\vee$ と $C_2^\vee$ の交点を数える問題として解釈することができます。ベズーの定理 1.4 と命題 4.2 を組み合わせることで、重複度込みで数えた交点の数が 4 点であることが従います。

補足 4.3. 問題 4.1 は高次元版を考えることができます： $H_1, \dots, H_n \subset \mathbb{P}^n$ を滑らかな相異なる二次超曲面としたとき、これら全てと接する超平面はいくつ存在するでしょうか？高次元の場合は $H_1, \dots, H_n$ が一般の位置にあるという仮定をつける必要があります。というのも、全てに接する超平面が無数にある場合があるからです(例えば三次元で H_i が $(i, 0, 0)$ を中心とする半径 1 の球面の場合などにこのようなことが起こります)。いま $H_i^\vee \subset \mathbb{P}^n$ を二次元の場合と同様に定めます。このとき、 $H_i^\vee$ が二次の超曲面であることがわかります。したがって、高次元ベズーの定理 1.5 により $H_1, \dots, H_n$ の全てに接する超平面は重複度込みで 2^n 個あることがわかります。

補足 4.4. 問題 4.1 のセッティングで、 C_1 の次数が d_1 、 C_2 の次数が d_2 である場合を考えてみましょう。このとき、代数幾何におけるリーマンフルヴィッツの定理を用いた考察により、 $C_i^\vee$ の次数が $d_i(d_i - 1)$ であることがわかります [2, Proposition 2.9]。したがって、(C_1 と C_2 が一般の位置にあるとき) 両方に接する直線の数 は重複度込みで $d_1 d_2 (d_1 - 1)(d_2 - 1)$ になることがわかります。

4.2 3 次曲面に含まれる直線の数

ここでは「27 本の直線」と呼ばれる、数え上げ幾何学における最も有名な定理の一つを紹介します。いま $S \subset \mathbb{P}^3$ を滑らかな 3 次曲面とします。次の問題を考えます：

問題 4.5. S に含まれる直線はいくつ存在するか？

いま、具体的な 3 次曲面に含まれる直線の数数を数えてみましょう。 S_{Fermat} を $X^3 + Y^3 + Z^3 + W^3 = 0$ によって定義される 3 次曲面とし、この曲面に含まれる直線 L の数を考えます。まず最初に、無限円平面 $W = 0$ と S_{Fermat} の交差に直線が含まれないことが簡単にわかります。ですので、 $\mathbb{C}^3$ において、 $X^3 + Y^3 + Z^3 + 1 = 0$ に含まれる直線の数数を数えれば良いことがわかります。次の二つの場合に分けて考えます：(1) 直線 L が XY 平面と平行な平面に含まれる場合 (2) それ以外の場合。

まず最初に (1) の場合を考えます。ある複素数 $c \in \mathbb{C}$ に対し、 $Z = c$ に直線 L が含まれる場合を考えます。 $Z = c$ が定める平面と S_{Fermat} の交差は $X^3 + Y^3 = -1 - c^3$ となり、この曲線は $c^3 + 1 = 0$ の場合三本の直線になり、そうでない場合は滑らかな 3 次曲線になることがわかります。したがってこのケースの直線の数 は 9 本であるとわかります。

次に (2) の場合を考えましょう。仮定から、 L は XY 平面と一点で交わることがわかります。その交点を $(x_0, y_0, 0)$ とします。すると L は

$$L = \{(x_0, y_0, 0) + t(x_1, y_1, 1) \mid t \in \mathbb{C}\}$$

という形で媒介変数表示されることがわかります。この直線が S に含まれることと、次の条件が満たされることは等価です：

$$\begin{cases} x_1^3 + y_1^3 + 1 = 0 \\ 3x_0x_1^2 + 3y_0y_1^2 = 0 \\ 3x_0^2x_1 + 3y_0^2y_1 = 0 \\ x_0^3 + y_0^3 + 1 = 0. \end{cases}$$

この連立方程式を解いていきましょう。まず $x_0 = 0$ の場合を考えます。このとき、四つ目の式から $y_0^3 = -1$ がわかります。すると三つ目の式から $y_1 = 0$ であることが従います。最後に一つ目の式から $x_1^3 = 1$ であることが従います。逆にこの条件がみたされているとき、連立方程式の解になっていることがわかります。このとき、解は $3 \times 3 = 9$ 個あることがわかります。同様に $y_0 = 0$ のときも解が 9 個あることがわかります。次に $x_0 \neq 0, y_0 \neq 0$ とします。このとき、 $x_1 \neq 0, y_1 \neq 0$ もわかります。二つ目の式と三つ目の式を比べることで、 $x_1/x_0 = y_1/y_0$ が成立することがわかります。この値を c とします。すると $x_1 = cx_0, y_1 = cy_0$ が成立します。三つ目の式に代入すると $x_0^3 + y_0^3 = 0$ となり、四つ目の式に反します。

従って、以上の議論より S_{Fermat} に含まれる直線の本数は $9 + 9 + 9 = 27$ 本であることが従います。

次に、一般の滑らかな三次曲面に含まれる直線の本数を調べましょう。以下のようなアイデアに基づいて計算します：

1. $\mathbb{P}^3$ 内に含まれる直線全体の集合 $\text{Gr}(2, 4)$ を定義する。 $\text{Gr}(2, 4)$ は自然に代数多様体の構造を持つ。
2. $\text{Gr}(2, 4)$ の点 $[L]$ に対し、 $L \subset S$ という条件を、 $\text{Gr}(2, 4)$ 上のあるベクトル束の切断の零点になるという条件で特徴づける。
3. 上で与えられたオイラー数を計算して切断の零点の数を計算する。

まず最初にグラスマン多様体 $\text{Gr}(2, 4)$ を導入します。 $\text{Gr}(2, 4)$ は点集合としては

$$\text{Gr}(2, 4) = \{L \mid \mathbb{P}^3 \text{ 内の直線}\}$$

によって与えられます。 $\mathbb{P}^3$ は $\mathbb{C}^4 \setminus 0$ を $\mathbb{C}^*$ で割った空間になっているため、この集合は自然に

$$\{W \subset \mathbb{C}^4 \mid \dim W = 2\}$$

と同一視することができます。いまこの同一視の下、写像

$$\text{Gr}(2, 4) \rightarrow \mathbb{P}^5, \quad [W \subset \mathbb{C}^4] \mapsto (\wedge^2 W \subset \wedge^2 \mathbb{C}^4 \cong \mathbb{C}^6)$$

を考えます。この写像が単射になることは簡単にわかります。実はこの写像の像は滑らかな射影代数多様体になります。実際、

$$\wedge^2 \mathbb{C}^4 \rightarrow \wedge^4 \mathbb{C}^4 \cong \mathbb{C}, \quad \sum v_i \wedge w_i \mapsto \left(\sum v_i \wedge w_i \right) \wedge \left(\sum v_i \wedge w_i \right)$$

により定めると、この関数は $\mathbb{C}^6$ 上の二次斉次式であり、 $\mathbb{P}^5$ における零点集合が $\text{Gr}(2, 4)$ からの像に一致することがわかります。特に $\text{Gr}(2, 4)$ は滑らかな射影代数多様体を定めることがわかります。

いま、 $\text{Gr}(2, 4)$ の**普遍束**と呼ばれるベクトル束 $\mathcal{E}$ を導入します。このベクトル束は射影空間上の $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1)$ と同じような役割をします。自明なベクトル束 $\text{Gr}(2, 4) \times \mathbb{C}^4$ の部分束 $\mathcal{E}$ を

$$\mathcal{E} = \{([W], w) \in \text{Gr}(2, 4) \times \mathbb{C}^4 \mid w \in W\}$$

により定めます。このとき $\mathcal{E}$ は $\text{Gr}(2, 4)$ 上の階数 2 のベクトル束になることがわかります。

f を滑らかな代数曲面 $S \subset \mathbb{P}^3$ を定める斉次三次式とします。 $\mathcal{E}$ 上の関数 $f_{\mathcal{E}}$ を合成

$$f_{\mathcal{E}}: \mathcal{E} \hookrightarrow \mathrm{Gr}(2, 4) \times \mathbb{C}^4 \xrightarrow{\text{射影}} \mathbb{C}^4 \xrightarrow{f} \mathbb{C}$$

の合成により定義します。このとき、 $[L \subset S]$ になることと、 $f_{\mathcal{E}}|_{\mathcal{E}|_{[L]}} = 0$ が成立することは等価です。ここで $\mathcal{E}|_{[L]}$ は $\mathcal{E} \rightarrow \mathrm{Gr}(2, 4)$ での点 $[L]$ の引き戻しを表します。

いま、点 $[L] \in \mathrm{Gr}(2, 4)$ の上で $f_{\mathcal{E}}$ は $\mathcal{E}|_{[L]}$ 上の三次斉次式を定めています。この斉次式に対応して $\mathrm{Sym}^3(\mathcal{E}|_{[L]}^{\vee})$ の点が定まります。つまり次の主張が成立します：

命題 4.6. $\mathrm{Sym}^3(\mathcal{E}^{\vee})$ の切断 s_f が存在し、 $L \subset S$ であることと $[L] \in Z(s_f)$ であることが等価である。

この命題によって S に含まれる直線を数え上げる問題が、ベクトル束の切断の零点を数え上げる問題に帰着されました。さらに次の主張が知られています：

命題 4.7. s_f の零点集合は有限であり、零点の重複度は1である。

証明の概略。証明には変形理論が必要になるので概略を述べるに留めます。命題の主張は $Z(s_f)$ がスキームとして0次元であり、さらに滑らかであることと同値です。したがって $Z(s_f)$ の接空間が消滅することを示せば良いです。いま $Z(s_f)$ が S に含まれる直線のなす空間になっていることに注意すると、直線が S の中で変形できないことを示せば良いです。 $L \subset S$ を直線とします。このとき L の S 内での変形空間は $L \subset S$ の法束の切断の空間と一致します。法束は簡単な計算により $\mathcal{O}_L(-1)$ と同型になることがわかるので、切断は零切断に限ることがわかります。詳細については [2, Corollary 6.14] を参照してください。□

命題 4.6 と 4.7、およびオイラー数の性質 (定理 2.5) により、 $\mathrm{Sym}^3(\mathcal{E}^{\vee})$ のオイラー数の計算に帰着されました。この計算にはグラスマン多様体 $\mathrm{Gr}(2, 4)$ のチャウ環の構造を理解する必要があります。これについて説明します。

まずグラスマン多様体のチャウ環の生成元を決定します。 $\mathbb{P}^3$ 内の点 p , 直線 Λ , 超平面 H を $p \subset \Lambda \subset H$ とするように固定します。このとき次の $\mathrm{Gr}(2, 4)$ の部分多様体を考えます：

$$\begin{aligned}\Sigma_{0,0} &= \mathrm{Gr}(2, 4) \\ \Sigma_{1,0} &= \{[L] \mid L \cap \Lambda \neq \emptyset\} \\ \Sigma_{2,0} &= \{[L] \mid p \in L\} \\ \Sigma_{1,1} &= \{[L] \mid L \subset H\} \\ \Sigma_{2,1} &= \{[L] \mid p \subset L \subset H\} \\ \Sigma_{2,2} &= \{[L] \mid L = \Lambda\}.\end{aligned}$$

ここで、 $\Sigma_{i,j}$ は $(2-i)$ -次元平面とは点で交わり、 $(3-j)$ 次元平面には含まれるような点全体を表しています。 $\sigma_{i,j} = [\Sigma_{i,j}]$ とすると、 $\sigma_{i,j} \in \mathrm{CH}^{i+j}(\mathrm{Gr}(2, 4))$ であることがわかります。 p, Λ, H を他の点, 直線, 超平面に取り替えたとき、これらは線形変換で写りあうため対応する部分多様体がある同値であることがわかり、特に定めるサイクルがこれらの点, 直線, 超平面の取り方に依存しないことがわかります。

実は上で挙げた部分多様体がチャウ環を生成することが知られています：

命題 4.8. $\sigma_{i,j}$ は $(\mathbb{Z}$ 加群として) $\mathrm{CH}^*(\mathrm{Gr}(2, 4))$ を生成する。

証明の概略。 $\Sigma_{i,j}$ から次元の低い $\Sigma_{i',j'}$ を全て除くとアフィン空間になることがわかります。このことおよびアフィン空間 $\mathbb{A}^n$ のチャウ群がサイクル $[\mathbb{A}^n]$ によって生成されていることを用いると、 $\Sigma_{i,j}$ に含まれるサイ

クルは $[\Sigma_{i,j}]$ の定数倍になっているかより次元の低い $\Sigma_{i',j'}$ からくるようなサイクルの線形和になっていることがわかるので主張を得ます。詳細については [2, §3.3.1] を参照してください。 $\square$

チャウ環の環構造も完全に決定することができます：

命題 4.9. 次の等式が成立する：

$$\begin{aligned}\sigma_{1,0}^2 &= \sigma_{2,0} + \sigma_{1,1}, \\ \sigma_{1,0} \cdot \sigma_{2,0} &= \sigma_{2,1}, \quad \sigma_{1,0} \cdot \sigma_{1,1} = \sigma_{2,1} \\ \sigma_{1,0} \cdot \sigma_{2,1} &= \sigma_{2,2} \\ \sigma_{2,0}^2 &= \sigma_{2,2}, \quad \sigma_{1,1}^2 = \sigma_{2,2}, \quad \sigma_{1,1} \cdot \sigma_{2,0} = 0.\end{aligned}$$

Proof. まず $\sigma_{2,0}^2 = \sigma_{2,2}$ を示します。 p' を p とは異なる点とし、 $\Sigma'_{2,0}$ を p' を含む直線全体とします。 $L(p, p')$ を p, p' を結ぶ直線とすると、等式

$$\sigma_{2,0}^2 = [\Sigma_{2,0}] \cdot [\Sigma'_{2,0}] = [\Sigma_{2,0} \cap \Sigma'_{2,0}] = [L(p, p')] = \sigma_{2,2}$$

がわかり主張を得ます。 $\sigma_{1,0}^2 = \sigma_{2,0} + \sigma_{1,1}$ 以外の等式は全く同様に証明をすることができるのでここでは省略します。

$\sigma_{1,0}^2$ に関する等式を示します。 $\sigma_{1,0}^2 = \alpha\sigma_{2,0} + \beta\sigma_{1,1}$ とおきます。

$$\sigma_{1,0}^2\sigma_{2,0} = \sigma_{1,0}\sigma_{2,1} = \sigma_{2,2}, \quad \sigma_{1,0}^2\sigma_{2,0} = (\alpha\sigma_{2,0} + \beta\sigma_{1,1}) \cdot \sigma_{2,0} = \alpha$$

より $\alpha = 1$ が従います。全く同様に $\beta = 1$ もわかり主張を得ます。 $\square$

補足 4.10. 上の等式により $\sigma_{1,0}^4 = 2 \cdot \sigma_{2,2}$ であることがわかります。幾何学的には次の主張に対応します：

$\mathbb{P}^3$ 内に四本の直線が一般の位置に与えられたとき、これら全てと交わる直線の本数は 2 本である。

$\text{Gr}(2, 4)$ のチャウ環の構造を用いて $\text{Sym}^3(\mathcal{E}^\vee)$ を計算しましょう。この計算を行う上で次の分裂原理が重要な役割を果たします：

定理 4.11. 階数 1 のベクトル束の直和について成立するチャーヌ類の関係式は一般のベクトル束について成立する。

証明の概略. X を代数多様体とし $\mathcal{E}$ をベクトル束とします。このとき代数多様体 Y と射影的な射 $f: Y \rightarrow X$ であって次の条件を満たすものが存在します：

1. $f^*\mathcal{E}$ は階数 1 のベクトル束の直和である。
2. サイクルの引き戻し写像 $f^*: \text{CH}_*(X) \rightarrow \text{CH}_*(Y)$ は単射である。

このことから直ちに主張が従います。詳細については [2, Theorem 5.11] を参照してください。 $\square$

系 4.12. 次の等式が成立する：

1. ベクトル束 $\mathcal{E}$ に対し、 $c_1(\mathcal{E}) = c_1(\det(\mathcal{E}))$ 。
2. 階数 2 のベクトル束 $\mathcal{E}$ に対し、 $c_4(\text{Sym}^3(\mathcal{E})) = 9c_2(\mathcal{E})(2c_1(\mathcal{E})^2 + c_2(\mathcal{E}))$ 。

Proof. まず一つ目について、 $\mathcal{E} = \mathcal{L}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{L}_r$ とする。このとき $\det(\mathcal{E}) = \mathcal{L}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{L}_r$ である。ホイットニーの和公式より $c(\mathcal{E}) = \prod c(\mathcal{L}_i)$ であり、特に $c_1(\mathcal{E}) = \sum c_1(\mathcal{L}_i)$ が成立する。一方で $c_1(\mathcal{L}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{L}_r) = \sum c_1(\mathcal{L}_i)$ であり、主張を得る。

次に二つ目の主張を示す。いま $\mathcal{E} = \mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{L}_2$ であるとし、 $\alpha = c_1(\mathcal{L}_1)$, $\beta = c_1(\mathcal{L}_2)$ とする。ホイトニーの和公式より $\alpha + \beta = c_1(\mathcal{E})$, $\alpha\beta = c_2(\mathcal{E})$ である。いま

$$\mathrm{Sym}^3(\mathcal{E}) = \mathcal{L}_1^{\otimes 3} \oplus (\mathcal{L}_1^{\otimes 2} \otimes \mathcal{L}_2) \oplus (\mathcal{L}_1 \otimes \mathcal{L}_2^{\otimes 2}) \oplus \mathcal{L}_2^{\otimes 3}$$

が成立する。再びホイトニーの和公式より。

$$c_4(\mathrm{Sym}^3(\mathcal{E})) = 3\alpha \cdot (2\alpha + \beta) \cdot (\alpha + 2\beta) \cdot 3\beta$$

が成立する。右辺を対称式によって書き直す：

$$3\alpha \cdot (2\alpha + \beta) \cdot (\alpha + 2\beta) \cdot 3\beta = 9\alpha\beta(2\alpha^2 + 5\alpha\beta + \beta^2) = 9\alpha\beta(2(\alpha + \beta)^2 + \alpha\beta)$$

$\alpha + \beta = c_1(\mathcal{E})$, $\alpha\beta = c_2(\mathcal{E})$ であったので、主張を得る。 $\square$

いま、 $\mathrm{Gr}(2, 4)$ 上のベクトル束 $\mathrm{Sym}^3(\mathcal{E}^\vee)$ のオイラー数を求めたいのでした。上の公式の二つ目を用いることで、 $\mathcal{E}^\vee$ のチャーン類を決定する問題に帰着されます。

命題 4.13. $\mathcal{E}$ を $\mathrm{Gr}(2, 4)$ とするとき、 $c_1(\mathcal{E}^\vee) = \sigma_{1,0}$, $c_2(\mathcal{E}^\vee) = \sigma_{1,1}$ が成立する。

Proof. まず最初に $c_2(\mathcal{E}^\vee)$ から計算します。 $f: \mathbb{C}^4 \rightarrow \mathbb{C}$ を一次斉次多項式とします。このとき、命題 4.6 と同様の議論で、 $\mathcal{E}^\vee$ の切断が s_f 存在し、 s_f の零点が $f|_L = 0$ なる $[L]$ と対応することがわかります。 $f|_L = 0$ は L が f によって定義される超平面に含まれるという条件と等価なので、主張を得ます。

次に $c_1(\mathcal{E}^\vee)$ を計算します。系 4.12 により、 $c_1(\det(\mathcal{E}^\vee))$ を計算すれば良いです。 f_1 と f_2 を互いに定数倍でないような $\mathbb{C}^4$ 上の一次式とし、 H_1, H_2 をこれらの定める超平面とします。いま $s_{f_1} \wedge s_{f_2}$ の零点を計算すれば良いです。この零点集合に入ることは $f_1|_L$ が $f_2|_L$ の定数倍になること（もしくはその逆が成立すること）と等価です。この条件は $L \cap H_1 = L \cap H_2$ と等価であり、さらにこの条件は $L \cap (H_1 \cap H_2) \neq \emptyset$ であることと等価です。したがって主張を得ます。 $\square$

これまでの議論を組み合わせて問題 4.5 に解答を与えます：

定理 4.14. $S \subset \mathbb{P}^3$ を滑らかな三次曲面とする。このとき S に含まれる直線の本数は 27 本である。

Proof. 命題 4.6 と 4.7 より、オイラー数 $e(\mathrm{Sym}^3(\mathcal{E}^\vee)) = \deg c_4(\mathrm{Sym}^3(\mathcal{E}^\vee))$ を計算すれば良い。いま、系 4.12 と命題 4.13 より、等式

$$c_4(\mathrm{Sym}^3(\mathcal{E}^\vee)) = 9c_2(\mathcal{E}^\vee)(2c_1(\mathcal{E}^\vee)^2 + c_2(\mathcal{E}^\vee)) = 9\sigma_{1,1}(2\sigma_{1,0}^2 + \sigma_{1,1})$$

が成立する。いま、命題 4.9 より、等式

$$9\sigma_{1,1}(2\sigma_{1,0}^2 + \sigma_{1,1}) = 9\sigma_{1,1}(3\sigma_{1,1} + \sigma_{2,0}) = 27\sigma_{2,2}$$

がわかり、主張を得る。 $\square$

5 スキーム論と導来代数幾何学

これまでの講義では重複度についてはブラックボックスにしてきました。この節ではグロタンディークによって 1960 年台に導入されたスキーム論を用いて重複度を導入します。また、2000 年ごろに導入されたスキームの一般化である導来スキームについて論じ、導来スキームの理論がベズーの定理などの一般化を与えることを見ます。

5.1 スキーム

スキームとは非常に大雑把には以下のデータで与えられます:

$$\text{スキーム} = \text{空間} + \text{空間上の関数の情報}$$

ここで重要なポイントは、スキームを決定するには空間だけではなく、その上の関数の情報も指定する必要があるという点です。この関数の情報に重複度の情報も含まれています。以下の例が示すように、空間が同じでもスキームとしては異なることがあります:

例 5.1. $X_1 \subset \mathbb{C}^2$ を $x = 0$ と $y = 0$ の交差、 $X_2 \subset \mathbb{C}^2$ を $y = x^2$ と $y = 0$ の交差とする。このとき、 X_1 と X_2 には自然にスキームの構造が入るが、これらは互いに同型でない。この違いは、前者が重複度 1 であり、後者は重複度が 2 であることにより説明される。

空間上の関数の情報は層と呼ばれる数学概念によって記述されます:

定義 5.2. X を位相空間とする。 X 上の ($\mathbb{C}$ -ベクトル空間に値を持つ) **前層**とは、次のデータで定まる:

1. 各開集合 U に対し定まるベクトル空間 $\mathcal{F}(U)$ 。 $\mathcal{F}(U)$ の元のことを U 上の**切断**という。
2. 開集合の包含 $V \subset U$ に対して定まる線形写像 $\rho_{U,V}: \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(V)$ 。これは制限写像と呼ばれる。 $s \in \mathcal{F}(U)$ に対し $\rho_{U,V}(s)$ のことを $s|_V$ とも書くことがある。制限写像は結合律 $\rho_{V,W} \circ \rho_{U,V} = \rho_{U,W}$ を満たすものとする。

前層 $\mathcal{F}$ が**層**であるとは、次の条件を満たすこととする:

1. 開集合 $U \subset X$ と U の開被覆 $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ が与えられたとする。切断 $s \in \mathcal{F}(U)$ に対し、 $s|_{U_i} = 0$ であるとする。このとき $s = 0$ である。
2. 開集合 $U \subset X$ と U の開被覆 $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ が与えられたとする。さらに $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$ で $s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j}$ が成立しているとする。このとき $s \in \mathcal{F}(U)$ であって $s|_{U_i} = s_i$ となるものがただ一つ存在する。

層化と呼ばれる、前層から層を作る操作があることが知られています。層化は、大まかには層の条件の一つ目を満たすように余分な切断を減らしたあとに、二つ目の条件を満たすように切断を増やすことで定義されます。ここでは厳密な層化の構成は省略します。

ベクトル空間に値を持つ層と全く同様に可換環のなす層を定義することもできます。可換環のなす層は以下のデータで表されます:

1. 各開集合 U に対して定まる可換環 $\mathcal{F}(U)$ 。
2. 開集合の包含 $V \subset U$ に対して定まる環準同型 $\rho_{U,V}: \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(V)$ 。

位相空間 X と X 上の環の層の組 $(X, \mathcal{O}_X)$ の組のことを**環付き空間**といいます。

例 5.3. ここでは $\mathbb{C}^n$ に環付き空間の構造を入れます。 n 変数の多項式 $f_1, \dots, f_r$ に対し、 $Z(f_1, \dots, f_r)$ で $f_1(p) = \dots = f_r(p) = 0$ を満たすような点 p 全体の集合とします。このような形でかける部分集合全体を閉集合系とするような位相が定まり、**ザリスキ位相**といいます。ここでは $\mathbb{C}^n$ にザリスキ位相を入れます。いま

$\mathbb{C}^n$ のザリスキ開集合 U に対し、

$$\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}(U) = \{f/g \mid f, g \text{ は } n \text{ 変数多項式であり、} f/g \text{ が } U \text{ 上の関数として well-defined}\}$$

として定めます。すると $(\mathbb{C}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n})$ は環付き空間であることがわかります。

例 5.4. n 変数の多項式 $f_1, \dots, f_r$ に対し, $Z = Z(f_1, \dots, f_r)$ に環付き空間の構造を入れる方法を説明します。まず Z には $\mathbb{C}^n$ のザリスキ位相から誘導される位相を入れます。 $U \subset Z$ を開集合とし、 $\bar{\mathcal{O}}_Z(U)$ を

$$\bar{\mathcal{O}}_Z(U) := \lim_{\substack{\tilde{U} \subset \mathbb{C}^n \\ \tilde{U} \cap Z = U}} \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}(\tilde{U})/(f_1, \dots, f_r)$$

として定めると $\bar{\mathcal{O}}_Z$ は Z 上の前層を定めることがわかります。 $\mathcal{O}_Z$ を $\bar{\mathcal{O}}_Z$ の層化とすると、 $(Z, \mathcal{O}_Z)$ は環付き空間になります。この環付き空間のことを関数 $f_1, \dots, f_r$ の定める**アフィンスキーム**と呼びます。 $\mathcal{O}_Z(Z) = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]/(f_1, \dots, f_r)$ が成立することが知られています。

定義 5.5. $\mathbb{C}$ 上有限型スキームとは、環付き空間 $(X, \mathcal{O}_X)$ であって、開被覆 $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ が存在し、 $(U_i, \mathcal{O}_X|_{U_i})$ が例 5.4 で導入されたアフィンスキームになっているもののことを指す。

スキームはより一般の環付き空間のことを指しますが、本講座では $\mathbb{C}$ 上有原型スキームのみが現れるので、今後スキームといったときは $\mathbb{C}$ 上有限型スキームのことを指すものとします。

スキーム $(X, \mathcal{O}_X)$ が 0 次元であるとは、 X が有限集合であることを指します。0 次元スキーム X に対し、 X の長さ $\ell(X)$ を

$$\ell(X) := \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_X(X)$$

により定めます。

例 5.6. $\mathbb{C}^2$ 内に定まるアフィンスキーム $Z = Z(y - x^2, y)$ を考えます。 Z は集合としては $\{(0, 0)\}$ と一致します。 $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2}(\mathbb{C}^2)$ は多項式環 $\mathbb{C}[x, y]$ であるので、

$$\mathcal{O}_Z(Z) = \mathbb{C}[x, y]/(y, y - x^2) = \mathbb{C}[x]/x^2 = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C} \cdot x$$

であるので、 $\ell(Z) = 2$ であることがわかります。

代数多様体のときと同様にスキームに対してもベクトル束の概念を定義することができます。 $E \rightarrow X$ をベクトル束とし、 $s \in \Gamma(X, E)$ をその切断とします。 s の零点集合 $Z(s)$ には自然にスキームの構造が入ることがわかります。このことについて説明します。スキームの構造は局所的に定義して層化をすれば良いので、 E が自明なベクトル束 $\mathbb{C}^n \times X$ の場合に定義すれば良いです。 $\mathbb{C}^n \times X$ の切断は組 $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{O}_X(X)$ に対応することがわかります。 $f_1, \dots, f_n$ の零点集合を $Z = Z(f_1, \dots, f_n)$ と定めると、例 5.4 の場合と全く同様に Z にはスキームの構造が定まることがわかります。

以上の準備の下、切断の零点の重複度を定義します：

定義 5.7. X を n 次元の滑らかな代数多様体、 $E \rightarrow X$ を階数 n のベクトル束とする。 s を E の切断であって零点集合 $Z(s)$ が有限集合であるものとする。 $p \in Z(s)$ に対し、重複度 m_p を

$$m_p := \dim \mathcal{O}_Z(p)$$

により定める。

この定義によりベズーの定理 1.4 およびその高次元版 1.5 が厳密に定式化されました。

5.2 導来スキームと仮想基本類

次にスキームの一般化である導来スキームについて説明します。導来スキームの厳密な定義には ∞ -圏の理論などの高度な道具が必要になるため、ここでは概観にとどめます。興味のある方は Toën のサーベイ [3] をお勧めします。導来スキームは大雑把には以下のデータで与えられます：

$$\text{導来スキーム} = \text{スキーム} + \text{高次の情報}$$

スキームが環付き空間として定義されたのに対し、導来スキームは微分次数付き可換代数の (∞) -層として定義されます。ここで、**微分次数付き可換代数**とは次数付けと微分写像が与えられた代数

$$\dots \xrightarrow{d} A^{-2} \xrightarrow{d} A^{-1} \xrightarrow{d} A^0$$

であって、 $a \in A^i, b \in A^j$ に対し以下の条件を満たすもののことを指します：

$$d^2 = 0, \quad ab = (-1)^{ij}ba, \quad d(ab) = (da)b + (-1)^i a(db).$$

導来環付き空間 $(X, \mathcal{O}_X^\bullet)$ とは、位相空間 X と、 X 上の微分次数付き可換代数の層の組のことを指します*4。

微分次数付き可換代数 $(A^\bullet, d)$ が与えられたとき、その 0 次コホモロジー $H^0(A^\bullet) := A^0/\text{Im}(d)$ には可換代数の構造が定義されます。この構成は層のレベルでも定義でき、導来スキーム $(X, \mathcal{O}_X^\bullet)$ に対してスキーム $(X, H^0(\mathcal{O}_X^\bullet))$ が定義されます。これは、導来スキームがスキームとその上の高次の付加構造の組で表されることを意味しています。

例 5.8. $f_1, \dots, f_r$ を n 変数の多項式とする。これらの関数に付随する微分次数付き可換代数を

$$A_{f_1, \dots, f_r} := (\dots \rightarrow \wedge^2 \mathbb{C}^r \otimes \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n] \xrightarrow{\cdot(f_1, \dots, f_n)} \mathbb{C}^r \otimes \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n] \xrightarrow{\cdot(f_1, \dots, f_n)} \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n])$$

により定義する。このとき定義より明らかに同型

$$H^0(A_{f_1, \dots, f_r}) \cong \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]/(f_1, \dots, f_r)$$

が成立する。

この構成を層のレベルで行うことで、 $Z = Z(f_1, \dots, f_r)$ 上に微分次数付き代数の層 $\mathcal{O}_Z^{\text{der}}$ であって $\mathcal{O}_Z^{\text{der}}(Z) \cong A_{f_1, \dots, f_r}$ が成立するものを定義できることがわかります。このとき、 $H^0(\mathcal{O}_Z^{\text{der}}) \cong \mathcal{O}_Z$ が成立します。ここで $\mathcal{O}_Z$ は Z 上に自然に定まっている可換環の層を表します。

この構成は次のように一般化されます： X を滑らかな代数多様体、 E を X 上のベクトル束とし、 s を E の切断とします。このとき s の零点集合に $Z(s)$ に自然に定まるスキーム構造は導来スキーム $Z^{\text{der}}(s)$ に精密化されます。

定義 5.9. 導来スキーム $(X, \mathcal{O}_X^\bullet)$ が**擬滑**であるとは、 X の開被覆 $X = \cup_{i \in I} V_i$ が存在し、 $V_i \cong Z^{\text{der}}(s_i)$ の形でかけることをいう。ここで s_i は滑らかな代数多様体 U_i 上のベクトル束 E_i の切断である。 X が連結であるとき $\dim U_i - \text{rk } E_i$ は i によらないことがわかり、 $\text{vdim } X$ と書かれ、 X の**仮想次元**という。

今からオイラー数の広範な一般化である仮想基本類について説明します。

*4 ここでは厳密には ∞ -層を考えないといけません。 ∞ -前層は、 X の開集合のなす圏から微分次数付き可換代数のなす ∞ -圏への ∞ -関手として定義されます。 ∞ -層は ∞ -前層であってある種の貼り合わせ条件を満たすものです。

定理 5.10 ([1]). 擬順滑スキーム X に対して**仮想基本類**と呼ばれる不変量 $[X]_{\text{vir}} \in \text{CH}_{\text{vdim}}(X)$ が定まり次の性質を満たす:

1. ある滑らかな代数多様体 U 、 U 上のベクトル束 E とその切断 s に対し $X = Z^{\text{der}}(s)$ と記述されるとき、等式

$$(X \hookrightarrow U)_*[X]_{\text{vir}} = c_r(E)$$

が成立する。

2. $\text{vdim } X = \dim X = 0$ が成立するとき、等式 $\deg[X]_{\text{vir}} = \ell(X)$ が成立する。

二つ目の定理より、 $\text{vdim } X = 0$ のとき、 $\deg[X]_{\text{vir}}$ は仮想的な X の点の数え上げと見なすことができます。最後にベズーの定理の最も強い形の一般化を述べます:

定理 5.11 (一般化ベズーの定理). $H_1, \dots, H_n \subset \mathbb{P}^n$ をそれぞれ d_i 次の超曲面とする。このとき $H_1 \cap \dots \cap H_n$ は自然に擬順滑導来スキームの構造を持ち、等式

$$\deg[H_1 \cap \dots \cap H_n]_{\text{vir}} = d_1 \cdots d_n$$

が成立する。

証明の概略. 0次元擬順滑スキームの仮想基本類の次数は変形に関して不変であることが知られている。したがって H_i は d_i 個の超平面の和集合であると仮定してよく、この場合の主張は明らかである。 $\square$

参考文献

- [1] Kai Behrend and Barbara Fantechi. The intrinsic normal cone. *Inventiones mathematicae*, 128(1):45–88, 1997.
- [2] David Eisenbud and Joe Harris. *3264 and all that: A second course in algebraic geometry*. Cambridge University Press, 2016.
- [3] Bertrand Toën. Derived algebraic geometry. *EMS Surveys in Mathematical Sciences*, 1(2):153–240, 2014.