

## 流体力学と数理科学諸分野との関わり

大木谷 耕司 (京大数理研)

2025 年 8 月

### Abstract

粘性流体のナビエストークス方程式を軸に、流体力学と数理科学諸分野との関係を垣間見る。以下のものを含む話題を予定している。1) 簡単な厳密解による、乱流理論でのエネルギー散逸率の重要性 (流体物理), 2) 非粘性流体のオイラー方程式のハミルトン系としての定式化 (微分幾何), 3) シュレディンガー方程式と流体方程式との関連 (量子力学), 4) オンサーガー予想について最近の発展 (微分幾何)。時間が許せば、より最近の話題にも触れる。

(メモ程度のテキストであるが、近年の発展を補足として付記した。興味を持つ方のために、より進んだ参考文献も加えた。)

## Contents

|          |                                  |           |
|----------|----------------------------------|-----------|
| <b>1</b> | <b>ナビエストークス方程式</b>               | <b>3</b>  |
| 1.1      | オイラー表示とラグランジュ表示                  | 3         |
| 1.2      | ナビエストークス方程式                      | 3         |
| 1.3      | 補足: 圧力の局所表現公式                    | 4         |
| 1.4      | 補足: 時間解析性                        | 4         |
| 1.5      | 熱方程式                             | 5         |
| 1.6      | バーガース渦                           | 6         |
| 1.7      | 補足: 自己相似解                        | 7         |
| 1.8      | 補足: ナビエストークス方程式の $L^3$ 正則性判定条件   | 7         |
| <b>2</b> | <b>オイラー方程式</b>                   | <b>8</b>  |
| 2.1      | 考え方                              | 8         |
| 2.2      | 質点系の古典力学(常微分方程式)                 | 8         |
| 2.3      | 質点系の古典力学(一般化)                    | 8         |
| 2.4      | 流体力学(偏微分方程式)                     | 9         |
| 2.5      | 例                                | 16        |
| 2.6      | 線型安定性理論との関係                      | 17        |
| 2.7      | まとめ                              | 18        |
| 2.8      | 参考文献                             | 18        |
| <b>3</b> | <b>シュレディンガー方程式</b>               | <b>19</b> |
| 3.1      | バーガース方程式                         | 19        |
| 3.2      | シュレディンガー方程式                      | 19        |
| 3.3      | マデリング変換: 流体力学 $\rightarrow$ 量子力学 | 20        |
| 3.4      | マデリング変換: 量子力学 $\rightarrow$ 流体力学 | 21        |
| 3.5      | 量子流体力学の方程式                       | 21        |
| 3.6      | 正則化のしくみ                          | 23        |
| <b>4</b> | <b>オンサーガー予想</b>                  | <b>24</b> |
| 4.1      | 考え方                              | 24        |
| 4.2      | ナビエストークス方程式                      | 24        |
| 4.3      | フーリエ解析                           | 25        |
| 4.4      | エネルギーカスケード                       | 25        |
| 4.5      | オンサーガー予想                         | 27        |
| 4.6      | 近年の進展                            | 27        |
| 4.7      | 解の構成法                            | 28        |
| 4.8      | まとめ                              | 29        |
| <b>5</b> | <b>進んだ文献案内</b>                   | <b>30</b> |
| <b>6</b> | <b>ベクトル解析の公式</b>                 | <b>30</b> |

## 1 ナビエストークス方程式

### 1.1 オイラー表示とラグランジュ表示

時刻  $t$  で  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$  にある '粒子のもつ' 加速度は、 $\frac{\partial u(x, y, z, t)}{\partial t}$  ではない.

$\because$  時刻  $t$  で  $\mathbf{x}$  にいた粒子は、時間が経つと一般には同じ場所にはいなくなるから.

時刻  $t + \Delta t$  で粒子が占める場所を  $\mathbf{x} + \Delta \mathbf{x}$  と書くと、この粒子の加速度成分は

$$\begin{aligned} & \frac{u(x + u\Delta t, y + v\Delta t, z + w\Delta t, t + \Delta t) - u(x, y, z, t)}{\Delta t} \\ & \approx \frac{\partial u(x, y, z, t)}{\partial t} + u \frac{\partial u(x, y, z, t)}{\partial x} + v \frac{\partial u(x, y, z, t)}{\partial y} + w \frac{\partial u(x, y, z, t)}{\partial z} \end{aligned}$$

右辺第2項以降のため、流体方程式は2次の非線型性をもつ.

流体の密度  $\rho$  とすれば、運動方程式

$$\rho \times (\text{加速度}) = \text{力}$$

において、非粘性流体の場合には働く力は圧力勾配  $-\nabla p$  である。さらに、粘性効果（流体のまさつ）を考慮し、速度

$$\mathbf{u} = (u(x, y, z, t), v(x, y, z, t), w(x, y, z, t))$$

に対する非圧縮粘性流体方程式は、次のようになる.

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right), \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right), \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right), \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0. \end{aligned}$$

### 1.2 ナビエストークス方程式

ナビエストークス方程式をベクトル記号を用いると、以下の様に簡明になる。

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \nu \Delta \mathbf{u},$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0.$$

ここで、圧力  $p$  は速度と独立な変数ではない。実際、上の式の  $\nabla \cdot$  をとれば

$$\Delta p = -\frac{\partial^2 u_i u_j}{\partial x_i \partial x_j}$$

が得られる。例えば、全空間の場合、

$$p(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{|\mathbf{y} - \mathbf{x}|} \frac{\partial^2 u_i(\mathbf{y}) u_j(\mathbf{y})}{\partial y_i \partial y_j} d\mathbf{y}$$

となる。 $\mathbf{x}$  での圧力を決めるには、その時刻の  $\mathbf{x}$  の速度のみならず速度場全体の情報が要る。この意味で、非圧縮流体の方程式は非局所的な性質を持つという。

### 1.3 補足: 圧力の局所表現公式

各点での圧力場の球面平均からの偏差は、局所的に表せる。

一般に

$$p(\mathbf{x}) + \frac{|\mathbf{u}(\mathbf{x})|^2}{3} = \frac{1}{4\pi} \text{PV} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\sigma_{ij}(\widehat{\mathbf{x}-\mathbf{y}})}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^3} u_i(\mathbf{y}) u_j(\mathbf{y}) d\mathbf{y}$$

$$\sigma_{ij}(\widehat{\mathbf{x}-\mathbf{y}}) \equiv -\delta_{ij} + \frac{3(x_i - y_i)(x_j - y_j)}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2}$$

これを、次のように書く

$$p(\mathbf{x}) + \frac{|\mathbf{u}(\mathbf{x})|^2}{3} = \frac{1}{4\pi} \text{PV} \int_{B(\mathbf{x}, r)} \frac{\sigma_{ij}(\widehat{\mathbf{x}-\mathbf{y}})}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^3} u_i(\mathbf{y}) u_j(\mathbf{y}) d\mathbf{y} + b(\mathbf{x}, r)$$

その時、 $b(\mathbf{x}, r)$  は?

解:

$$b(\mathbf{x}, r) = \bar{p}(\mathbf{x}, r) + \oint_{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|=r} |\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{u}(\mathbf{y})|^2 dS(\mathbf{y}), \quad \boldsymbol{\xi} = \frac{\mathbf{y} - \mathbf{x}}{|\mathbf{y} - \mathbf{x}|}$$

Constantin, P. (2014). “Local formulae for the hydrodynamic pressure and applications.”  
Russian Math. Surveys, 69(3), 395.

ナビエ-ストークス方程式も使うと、体積積分のみで書ける。(T. Drivas)

$$p(\mathbf{x}) - \oint_{B(\mathbf{x}, r)} p(\mathbf{y}) d\mathbf{y} + \frac{1}{3} \left( |\mathbf{u}(\mathbf{x})|^2 - \oint_{B(\mathbf{x}, r)} |\mathbf{u}(\mathbf{y})|^2 d\mathbf{y} \right)$$

$$= \frac{1}{4\pi} \text{PV} \int_{B(\mathbf{x}, r)} \frac{\sigma_{ij}(\widehat{\mathbf{x}-\mathbf{y}})}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^3} u_i(\mathbf{y}) u_j(\mathbf{y}) d\mathbf{y}$$

### 1.4 補足: 時間解析性

非圧縮オイラー方程式を考える (2次元, ないし 3次元)。

(a) ラグランジュ座標では、オイラー方程式は、固定された収束半径をもつ関数クラスにおいて、局所的に適切であることを証明できる。

(b) オイラー座標では、これは正しくない。

Faa di Bruno の公式

滑らかな関数に対して  $f, g, h = g \circ f$  とする。

$$h^{(n)}(x) = \sum_{k=1}^n g^{(k)}(f(x)) \sum_{(k)} \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_n!} \left( \frac{f^{(j)}(x)}{j!} \right)^{k_j},$$

ここで、和  $\sum_{(k)}$  は、

$$\sum_{j=1}^n j k_j = n, \quad \sum_{j=1}^n k_j = k.$$

を満たす全ての  $k_j \geq 0$  に渡る。[Arbogast(1800), Faà di Bruno(1855)]  
c.f. 微積分の教科書 Goursat(1902) or 高木貞治 (1938).

## 文献

Constantin, P., Vicol, V., & Wu, J. (2015). “Analyticity of Lagrangian trajectories for well posed inviscid incompressible fluid models.” *Advances in Mathematics*, 285, 352-393.

Constantin, P., Kukavica, I., & Vicol, V. (2016). “Contrast between Lagrangian and Eulerian analytic regularity properties of Euler equations.” In *Annales de l’IHP Analyse non linéaire* (Vol. 33, No. 6, pp. 1569-1588).

Frisch, U., & Zheligovsky, V. (2014). “A very smooth ride in a rough sea.” *Commun. Math. Phys.*, 326, 499-505.

## 1.5 熱方程式

1次元の熱拡散方程式は次の形をとる。

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

この方程式の発見的な解法を1つ述べる。記号的に解を

$$u = \exp\left(\sqrt{\nu t} \frac{\partial}{\partial x}\right)^2 u_0(x)$$

と書こう。さて Gauss の積分から、任意の実数のパラメータ  $l$  について

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2+2ul} du = \sqrt{\pi} e^{l^2}$$

が成り立つ。ここで形式的に  $l = \sqrt{\nu t} \frac{\partial}{\partial x}$  という置き換えを施せば

$$u = e^{\nu t \frac{\partial^2}{\partial x^2}} u_0(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2+2u\sqrt{\nu t} \frac{\partial}{\partial x}} u_0(x) du$$

つまり

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} u_0(x + 2u\sqrt{\nu t}) du = \frac{1}{\sqrt{2\pi\nu t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4\nu t}} u_0(y) dy.$$

が得られる。

同様の議論は、直積を用いて多次元の場合に拡張できる。たとえば、3次元の場合

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \Delta u.$$

と考えると

$$\begin{aligned} u &= e^{\nu t \Delta} u_0(\mathbf{x}) = e^{\nu t (\partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2)} u_0(\mathbf{x}) \\ &= \frac{1}{(2\pi\nu t)^{3/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2}{4\nu t}\right) u_0(\mathbf{y}) d\mathbf{y}. \end{aligned}$$

を得る。

## 1.6 バーガース渦

バーガース渦管とは、時間に依存しない、引き伸ばしに対応する外力項をもつ ナビエ-ストークス 方程式の厳密解である。この外力項があるため、この解の全エネルギーは有限ではないが、局所的には遠くにある渦の影響を模擬しているという点が興味深い。現在 バーガース渦として知られているこの解は Rott(1958) によっても独立に発見された。その論文では、圧力分布などの解のより詳しい構造も吟味されている。

元来、バーガースの解は ナビエ-ストークス は定常解として与えられた。これが可能な理由は、非線型項(対流項)が0となり、実質的には上でみた(線型の)熱拡散方程式の問題に帰着するからである。

いわゆるバーガース渦は、非定常解の長時間後の漸近形として実現される。このことを、以下でみよう。定数の引伸ばし  $\alpha(>0)$  を伴う流れを考える。その速度、および渦度は

$$\mathbf{u} = (-\alpha x + u_1(x, y, t), -\alpha y + u_2(x, y, t), 2\alpha z)$$

および

$$\boldsymbol{\omega} = (0, 0, \omega), \quad \omega = \partial_x u_2 - \partial_y u_1.$$

によって与えられるとする。このとき、渦度方程式は

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + u_1 \frac{\partial \omega}{\partial x} + u_2 \frac{\partial \omega}{\partial y} = \alpha x \frac{\partial \omega}{\partial x} + \alpha y \frac{\partial \omega}{\partial y} + 2\alpha \omega + \nu \Delta_2 \omega,$$

ここで  $\Delta_2 \equiv \partial_x^2 + \partial_y^2$  である。流れが軸対称性を持つ場合は

$$u_1 \frac{\partial \omega}{\partial x} + u_2 \frac{\partial \omega}{\partial y} = \frac{\partial(\omega, \psi)}{\partial(x, y)} = 0,$$

となつて、対流項はゼロである(ここで  $\psi$  は流れ関数)。

ここで、変数変換  $\Omega = \omega e^{-2\alpha t}$  および  $X = x e^{\alpha t}$ ,  $Y = y e^{\alpha t}$ ,  $T = (e^{2\alpha t} - 1)/(2\alpha)$ , を導入すると、渦度方程式は以下の熱拡散方程式

$$\frac{\partial \Omega}{\partial T} = \nu \left( \frac{\partial^2 \Omega}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial Y^2} \right)$$

になる。これは、上で学んだ方法により解くことができ、解は

$$\Omega(X, Y, T) = \frac{1}{4\pi\nu T} \int \omega(X', Y', 0) \exp\left(-\frac{(X - X')^2 + (Y - Y')^2}{4\nu T}\right) dX' dY'$$

となる。元の変数に戻せば

$$\omega(r, t) = \frac{\alpha}{2\pi\nu} \frac{e^{2\alpha t}}{e^{2\alpha t} - 1} \int \omega(X', Y', 0) \exp\left(-\frac{\alpha}{2\nu} \frac{(e^{\alpha t}x - X')^2 + (e^{\alpha t}y - Y')^2}{e^{2\alpha t} - 1}\right) dX' dY'$$

となる。ここで、長時間極限 ( $t \rightarrow \infty$ ) をとれば

$$\omega(r, t) \rightarrow \frac{\alpha\Gamma}{2\pi\nu} \exp\left(-\frac{\alpha r^2}{2\nu}\right)$$

が得られる。これが バーガース渦管である。これは外部からの伸長効果と粘性散逸効果が、バランスしてできる定常状態を表している。

(単位長さ当りの) エネルギー散逸率

$$\epsilon \equiv \nu \int_0^\infty \omega(r)^2 2\pi r dr = \frac{\alpha\Gamma^2}{4\pi}$$

$\nu$  に依らない。(確かめよ。)

## 1.7 補足: 自己相似解

動的スケール変換

$$\omega(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2at} \Omega(\boldsymbol{\xi}, \tau).$$

$$\boldsymbol{\xi} = \frac{\mathbf{x}}{\sqrt{2at}}, \quad \tau = \frac{1}{2a} \log t$$

を考えると、

2次元渦度方程式は、以下のように変換される:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \tau} + \mathbf{U} \cdot \nabla \Omega = \nu \Delta \Omega + a \nabla \cdot (\boldsymbol{\xi} \Omega).$$

これは、バーガース渦を定義する方程式と同じ形を持つ。

その定常解は、

$$\Omega(\boldsymbol{\xi}) = \frac{a\Gamma}{2\pi\nu} \exp\left(-\frac{a|\boldsymbol{\xi}|^2}{2\nu}\right), \quad \boldsymbol{\xi} = \frac{\mathbf{x}}{\sqrt{2at}},$$

ここで、 $\Gamma$  は循環。元の変数では、 $\omega = \frac{1}{2at} \Omega(\boldsymbol{\xi}) = \frac{\Gamma}{4\pi\nu t} \exp\left(-\frac{|\mathbf{x}|^2}{4\nu t}\right)$ 。

## 1.8 補足: ナビエストークス方程式の $L^3$ 正則性判定条件

爆発するなら、

$$\|\mathbf{u}\|_{L^p} \geq C \frac{\left(\frac{p-3}{2p}\right)^{\frac{p-3}{2p}} \nu^{\frac{p+3}{2p}}}{(t_* - t)^{\frac{p-3}{2p}}}, \quad (p > 3)$$

Leray (1934)

$\|\mathbf{u}\|_{L^3}$  による判定条件 Escauriaza, L., Seregin, G. A., & Sverak, V. (2003)

背理法に依らない証明

Constantin, P. (2023). “Pressure, intermittency, singularity.” J. Math. Fluid Mech., 25(2), 36.

$$\exists \delta > 0, \forall t, \forall A, \quad |A| \leq \delta \longrightarrow \int_A |\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)|^3 d\mathbf{x} \leq \left(\frac{\nu}{2C}\right)^3$$

ここで、 $C$  は以下の不等式に現われる定数

$$\|\mathbf{u}\|_{L^6(\mathbb{R}^3)} \leq C \|\mathbf{u}\|_{H^1(\mathbb{R}^3)}$$

この時、 $\mathbf{u}$  がナビエストークス方程式の強解 ( $0 \leq t \leq T$ ) とすると

$$\|\mathbf{u}\|_{H^1(\mathbb{R}^3)} \leq \min \left\{ \begin{array}{l} \|\mathbf{u}_0\|_{H^1}^2 \exp\{t\|\mathbf{u}_0\|_{L^2}^2/(\nu\delta)\}, \\ \|\mathbf{u}_0\|_{H^1}^2 + 2\|\mathbf{u}_0\|_{L^2}^4/(\nu^2\delta). \end{array} \right.$$

$t > T$  に延長可能。

## 2 オイラー方程式

### 2.1 考え方

オイラー方程式を '無限次元 ハミルトン系' とみる。

→ 変分原理による定式化

無限次元多様体上の測地線: 解

断面曲率: 安定性の指標

### 2.2 質点系の古典力学 (常微分方程式)

ラグランジアン

$$\begin{aligned}
 L &= T - V \\
 T &= \frac{1}{2} \sum_i m_i \left| \frac{d\mathbf{x}_i}{dt} \right|^2, \quad V = V(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) \\
 \delta S &= \delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0 \\
 \delta \int \left( \frac{1}{2} \sum_i m_i \left| \frac{d\mathbf{x}_i}{dt} \right|^2 - V(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) \right) dt &= 0 \\
 \int \left( \sum_i m_i \frac{d\mathbf{x}_i}{dt} \cdot \frac{\delta d\mathbf{x}_i}{dt} - \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}_i} \cdot \delta \mathbf{x}_i \right) dt &= 0 \\
 \int \sum_i \left( -m_i \frac{d^2 \mathbf{x}_i}{dt^2} - \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}_i} \right) \cdot \delta \mathbf{x}_i dt &= 0 \\
 m_i \frac{d^2 \mathbf{x}_i}{dt^2} &= -\frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}_i}
 \end{aligned}$$

### 2.3 質点系の古典力学 (一般化)

$$H(\mathbf{p}, \mathbf{x}) = \frac{1}{2} \alpha^{ij} p_i p_j + V(\mathbf{x}) = E \quad (\text{const.}), \quad \alpha^{ij} = \alpha^{ji}$$

$$\delta \int ds = 0$$

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j, \quad g_{ij} = (E - V(\mathbf{x})) \alpha_{ij}$$

測地線方程式

$$\frac{\delta u^i}{\delta t} := \frac{d^2 x^i}{dt^2} + \Gamma_{jk}^i \frac{dx^j}{dt} \frac{dx^k}{dt} = 0$$

測地線の偏差の方程式 (cf. 潮汐力)

$$\begin{aligned}
 \frac{d^2 w^i}{dt^2} &= -R_{jkl}^i \frac{dx^j}{dt} w^k \frac{dx^l}{dt} \\
 \frac{d^2}{dt^2} \frac{w_i w^i}{2} &= \frac{dw_i}{dt} \frac{dw^i}{dt} + w_i \frac{d^2 w^i}{dt^2}
 \end{aligned}$$

$$= \frac{dw_i}{dt} \frac{dw^i}{dt} - R_{ijkl} w^j \frac{dx^j}{dt} w^l \frac{dx^k}{dt}$$

右辺第2項が正なら、 $|w|$  は指数関数的に増加

## 2.4 流体力学 (偏微分方程式)

ヤコビの方程式

$$\dot{x}(t) = u(t)$$

初期値がパラメタ  $s$  に依存  $\Rightarrow$  測地線も  $s$  に依存  $x(t, s)$

変分

$$\xi(t) = \frac{d}{ds} x(t, s)|_{s=0}$$

ベクトル場  $\zeta(t)$  の  $t$  についての共変微分

$$\begin{aligned} \frac{\delta \zeta}{\delta t} &\equiv \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\tilde{\zeta}(t+h) - \zeta(t)}{h} \\ &= \frac{D\zeta}{Dt} + \nabla \alpha \end{aligned}$$

$$\frac{\delta^2 \xi}{\delta t^2} + \Omega(u, \xi)u = 0,$$

$$\text{リーマン曲率テンソル } \Omega(\xi, \eta) = \nabla_\eta \nabla_\xi - \nabla_\xi \nabla_\eta + \nabla_{[\xi, \eta]}$$

Arnold-Khesin(2021) 4 章

ここでは、手作りでいく。

Preliminary observation

渦度はヤコビ場に似ている

$$\begin{aligned} \frac{D^2}{Dt^2} \frac{|\omega|^2}{2} &= (\omega \cdot S)(S \cdot \omega) - \omega \cdot P \cdot \omega \\ &= \left( \frac{D\omega}{Dt} \right)^2 - \omega \cdot P \cdot \omega \\ \frac{D\omega}{Dt} &= (\omega \cdot \nabla)u, \quad \frac{D^2\omega}{Dt^2} = -P \cdot \omega \end{aligned}$$

導出 1

$$\frac{D}{Dt} \Rightarrow \frac{D^2\omega}{Dt^2} = (\omega \cdot \nabla) \underbrace{\frac{Du}{Dt}}_{=-\nabla p}$$

導出 2

$$\begin{aligned} \frac{D^2 x_i}{Dt^2} &= -\frac{\partial p}{\partial x_i} \\ \frac{\partial}{\partial a_j} \Rightarrow \frac{D^2}{Dt^2} \frac{\partial x_i}{\partial a_j} &= -\frac{\partial^2 p}{\partial x_i \partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial a_j} \end{aligned}$$

$$\omega_j(0) \Rightarrow \frac{D^2}{Dt^2} \omega_i = -\frac{\partial^2 p}{\partial x_i \partial x_k} \omega_k$$

導出 3

$$\mathbf{V} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$$

$$\frac{D\mathbf{V}}{Dt} = -\mathbf{V}\mathbf{V} - \mathbf{P}, \quad \mathbf{P} = \nabla \nabla p$$

リカッチ substitution

$$\mathbf{V} = \frac{D\mathbf{W}}{Dt} \mathbf{W}^{-1}$$

$$\frac{D^2 \mathbf{W}}{Dt^2} = -\mathbf{P}\mathbf{W}$$

$$\mathbf{W} = [\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2, \boldsymbol{\omega}_3]$$

ヤコビ場の方程式 (2 階)  $\Rightarrow$  1 階の連立方程式に分離

$$\frac{D\boldsymbol{\xi}}{Dt} = (\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \mathbf{f} \quad (1)$$

$$\frac{D\mathbf{f}}{Dt} = -(\mathbf{f} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \nabla q \quad (2)$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\xi} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{f} = 0$$

(1) の導出

$$\frac{D}{Dt} \mathbf{x}(\mathbf{a}, t; s) = \mathbf{u}(\mathbf{x}(\mathbf{a}, t), t; s)$$

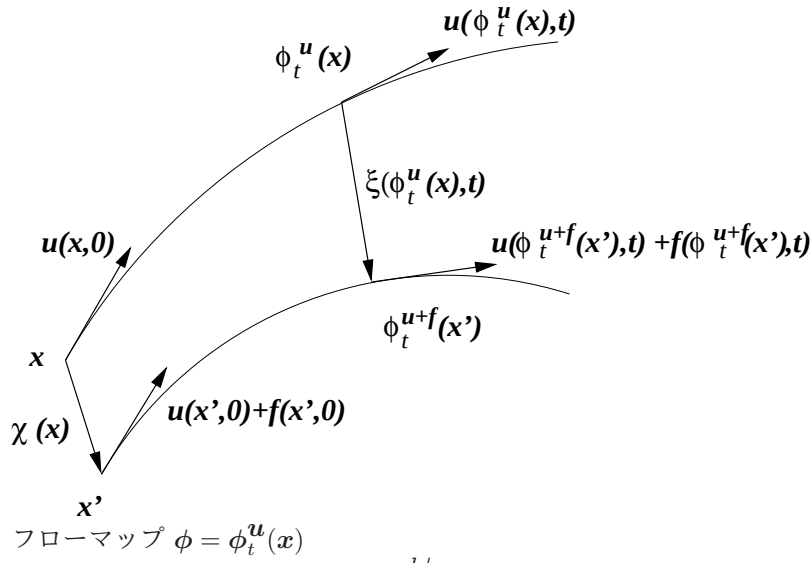
$$\frac{D}{Dt} \underbrace{\frac{\partial x_i}{\partial s}}_{=\xi_i} = \underbrace{\frac{\partial u_i}{\partial s}}_{=f_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \underbrace{\frac{\partial x_j}{\partial s}}_{=\xi_j}$$

(2) の導出

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla p,$$

$s$  で微分 or  $\delta \mathbf{u} = \mathbf{f}$ .

( $s$  は攪乱を特徴づけるパラメタ)



$$\frac{d\phi}{dt} = u(\phi, t), \quad \phi(0) = x$$

$$\frac{D\xi}{Dt} = (\xi \cdot \nabla)u + f, \quad \frac{Df}{Dt} = -(f \cdot \nabla)u - \nabla q$$

$$\frac{D^2\xi}{Dt^2} = -P \cdot \xi - \nabla q \quad (3)$$

補題

$$\left[ \frac{D}{Dt}, \xi \cdot \nabla \right] = f \cdot \nabla$$

(3) の証明

$$\begin{aligned} \frac{D^2\xi}{Dt^2} &= (\xi \cdot \nabla) \frac{Du}{Dt} + f \cdot \nabla u + \frac{Df}{Dt} \\ &= (\xi \cdot \nabla)(-\nabla p) + (f \cdot \nabla)u - (f \cdot \nabla)u - \nabla q \\ &= -P \cdot \xi - \nabla q \end{aligned}$$

共変微分

$$\frac{\delta \xi}{\delta t} = \frac{D\xi}{Dt} + \nabla \alpha \xi,$$

s.t.  $\nabla \cdot \xi = 0$ , i.e.

$$\nabla \cdot ((u \cdot \nabla)\xi) + \Delta \alpha \xi = 0.$$

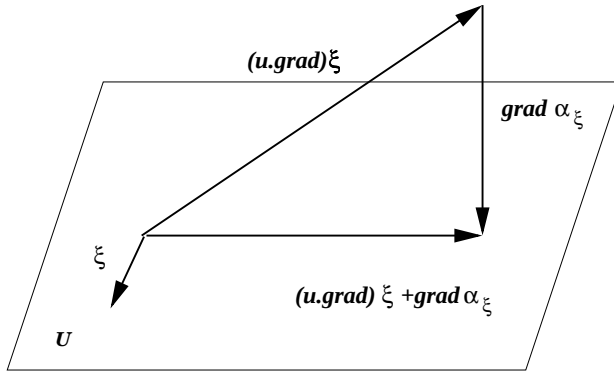
$$\frac{\delta^2 \xi}{\delta t^2} = -P \cdot \xi + (u \cdot \nabla) \nabla \alpha \xi - \nabla \gamma$$

証明

$$\begin{aligned}
 \frac{\delta^2 \xi}{\delta t^2} &= \frac{\delta}{\delta t} \frac{\delta \xi}{\delta t} \\
 &= \frac{D}{Dt} \frac{\delta \xi}{\delta t} + \nabla \beta \\
 &= \frac{D^2 \xi}{Dt^2} + \frac{D}{Dt} \nabla \alpha_\xi + \nabla \beta \\
 &= -P \cdot \xi - \nabla q + \frac{\partial}{\partial t} \nabla \alpha_\xi + (u \cdot \nabla) \nabla \alpha_\xi + \nabla \beta \\
 &= -P \cdot \xi + (u \cdot \nabla) \nabla \alpha_\xi - \nabla \gamma,
 \end{aligned}$$

ここで

$$\gamma = q - \beta - \frac{\partial}{\partial t} \nabla \alpha_\xi$$



$$\frac{\delta^2 \xi}{\delta t^2} = -P \cdot \xi + (u \cdot \nabla) \nabla \alpha_\xi - \nabla \gamma$$

$$\frac{\delta^2 \xi}{\delta t^2} + Au(\xi) = 0. \quad (4)$$

$$Au(\xi) \equiv P \cdot \xi - (u \cdot \nabla) \nabla \alpha_\xi + \nabla \gamma$$

$$\left\langle \frac{\delta \xi_1}{\delta t} \cdot \nabla \alpha_{\xi_2} \right\rangle = 0$$

より、対称性

$$\begin{aligned}
 \langle \xi_1, Au(\xi_2) \rangle &= \langle \xi_2, Au(\xi_1) \rangle \\
 &= \int \left( \xi_1 \cdot P \cdot \xi_2 - \nabla \alpha_{\xi_1} \cdot \nabla \alpha_{\xi_2} \right) dx
 \end{aligned}$$

$\alpha u = p$ ,  $\gamma = 0$  より

$$\xi = \xi^\perp + \xi^\parallel, \quad \xi^\parallel = \frac{\langle \xi, u \rangle}{\|u\|^2} u$$

$$\frac{\delta^2 \xi^\parallel}{\delta t^2} = 0,$$

$$\frac{\delta^2 \boldsymbol{\xi}^\perp}{\delta t^2} + \mathbf{A} \mathbf{u}(\boldsymbol{\xi}^\perp) = 0$$

$$U \mathbf{u}(\boldsymbol{\xi}^\perp) = \frac{1}{2} \langle \mathbf{A} \mathbf{u}(\boldsymbol{\xi}^\perp), \boldsymbol{\xi}^\perp \rangle$$

$$K(\mathbf{u}, \boldsymbol{\xi}) = \frac{2U \mathbf{u}(\boldsymbol{\xi}^\perp)}{\|\mathbf{u}\|^2 \|\boldsymbol{\xi}^\perp\|^2}$$

$$\frac{\delta^2 \boldsymbol{\xi}^\perp}{\delta t^2} = -\frac{\delta U \mathbf{u}(\boldsymbol{\xi}^\perp)}{\delta \boldsymbol{\xi}^\perp d\mathbf{x}}$$

$$\mathbf{M} \equiv \mathbf{P} - (\nabla \mathbf{u})^T \nabla \mathbf{u},$$

$$\lambda_{\min} = \mathbf{M} \text{ の最小固有値}$$

$\mathbf{M}$  は時間 $^{-2}$ の次元を持ち、粒子拡散のタイムスケールと解釈可。  
補題 Rouchon( 1992)

$$2U \mathbf{u}(\boldsymbol{\xi}^\perp) \underbrace{\geq}_{*} \int \boldsymbol{\xi}^\perp \cdot \mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\xi}^\perp d\mathbf{x} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}} \lambda_{\min}(\mathbf{x}, t) &\leq \underbrace{\min_{\|\boldsymbol{\xi}^\perp\|=1}}_{*} 2U \mathbf{u}(\boldsymbol{\xi}^\perp) \\ &\leq \underbrace{\frac{1}{3}}_{**} \min_{\mathbf{x}} \text{tr}(\mathbf{M}(\mathbf{x}, t)) \end{aligned} \quad (6)$$

$$\text{tr}(\mathbf{M}(\mathbf{x}, t)) = \Delta p - (\partial_i u_j)(\partial_i u_j) = -\mathbf{S} : \mathbf{S} \leq 0$$

$\mathbf{S} : \mathbf{S} \equiv 0$  でない限り、断面曲率は負

$$\Delta p = -(\partial_i u_j)(\partial_j u_i) = |\boldsymbol{\omega}|^2 - \frac{1}{2} \mathbf{S} : \mathbf{S},$$

$$(\partial_i u_j)(\partial_i u_j) = |\boldsymbol{\omega}|^2 + \frac{1}{2} \mathbf{S} : \mathbf{S}$$

証明 (\*)

$$\begin{aligned} 2U \mathbf{u}(\boldsymbol{\xi}^\perp) &= \int \left( \boldsymbol{\xi}^\perp \cdot \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\xi}^\perp - |\nabla \alpha_{\boldsymbol{\xi}^\perp}|^2 \right) d\mathbf{x} \\ &\geq \int \left( \boldsymbol{\xi}^\perp \cdot \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\xi}^\perp - |(\boldsymbol{\xi}^\perp \cdot \nabla) \mathbf{u}|^2 \right) d\mathbf{x} \\ &\quad (\|\nabla \alpha_{\boldsymbol{\xi}^\perp}\|^2 \leq \|(\boldsymbol{\xi}^\perp \cdot \nabla) \mathbf{u}\|^2) \\ &= \int \boldsymbol{\xi}^\perp \cdot \mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\xi}^\perp \quad (M_{ij} \equiv P_{ij} - (\partial_i u_k)(\partial_j u_k)) \end{aligned}$$

補題  
 $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{N}=3 \times 3$  実対称行列,  $\text{tr}(\mathbf{N}) = 0$

$$\mathbf{w}^T \mathbf{M} \mathbf{w} \leq \frac{1}{3} \text{tr}(\mathbf{M}),$$

$$\boldsymbol{w}^T \boldsymbol{N} \boldsymbol{w} = 0$$

となる単位ベクトル  $\boldsymbol{w}$  がある

証明

$\boldsymbol{N}$  対角化できる

$$\boldsymbol{N} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{w} = (s_1, s_2, s_3)^T, \quad s_i = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\boldsymbol{w}^T \boldsymbol{N} \boldsymbol{w} = s_1^2 A + s_2^2 B + s_3^2 C = 0$$

この主軸系で

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} a & p & r \\ p & b & q \\ r & q & c \end{pmatrix}$$

とすると

$$\boldsymbol{w}^T \boldsymbol{M} \boldsymbol{w} = \frac{1}{3}(a + b + c) + 2(ps_1 s_2 + qs_2 s_3 + rs_3 s_1)$$

$$\sum_{\text{all } \boldsymbol{w}} \boldsymbol{w}^T \boldsymbol{M} \boldsymbol{w} = \frac{8}{3}(a + b + c)$$

もし

$$\forall \boldsymbol{w}, \boldsymbol{w}^T \boldsymbol{M} \boldsymbol{w} > \frac{\text{tr}(\boldsymbol{M})}{3} \Rightarrow \text{矛盾}$$

$\therefore$  ある  $\boldsymbol{w}$  に対し

$$\boldsymbol{w}^T \boldsymbol{M} \boldsymbol{w} \leq \frac{\text{tr}(\boldsymbol{M})}{3}.$$

証明 (\*\*)

$$\min_{\|\boldsymbol{\xi}^\perp\|=1} 2U\boldsymbol{u}(\boldsymbol{\xi}^\perp) \leq \frac{1}{3}\text{tr}(\boldsymbol{M}(\bar{\boldsymbol{x}}, t)), \forall \bar{\boldsymbol{x}}$$

を示す

補題で  $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}(\bar{\boldsymbol{x}}, t)$ ,  $\boldsymbol{N} = \nabla \boldsymbol{u} + (\nabla \boldsymbol{u})^T$

$\exists$  正規直交基底  $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3) \in \mathbb{R}^3$

$$\boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{M}(\bar{\boldsymbol{x}}, t) \cdot \boldsymbol{e}_1 \leq \frac{\text{tr}(\boldsymbol{M}(\bar{\boldsymbol{x}}, t))}{3},$$

$$\boldsymbol{e}_1 \cdot \nabla \boldsymbol{u}(\bar{\boldsymbol{x}}, t) \cdot \boldsymbol{e}_1 = 0.$$

$$\boldsymbol{e}_1 \cdot \nabla \boldsymbol{u}(\bar{\boldsymbol{x}}, t) = a \boldsymbol{e}_2 \quad (a \geq 0) \text{ と仮定}$$

$$\xi_\epsilon(x_1, x_2, x_3) = \psi \left( \left( \frac{x_1}{\epsilon} \right)^2 + \left( \frac{x_2}{\epsilon^2} \right)^2 + \left( \frac{x_3}{\epsilon} \right)^2 \right) \begin{pmatrix} -\frac{x_2}{\epsilon} \\ \epsilon x_1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

ここで

$$\psi(s) = \begin{cases} \exp(1/(s-1)), & \text{for } 0 \leq s < 1 \\ 0, & \text{for } s \geq 1 \end{cases}$$

$$\xi_\epsilon(x_1, x_2, x_3) \parallel e_1, (\epsilon \rightarrow 0)$$

$$\nabla \cdot \xi_\epsilon \approx 0$$

$\alpha_\epsilon, \beta_\epsilon$  を定義

$$\nabla \cdot (\nabla \alpha_\epsilon + (\xi_\epsilon \cdot \nabla) \mathbf{u}) = 0,$$

$$\beta_\epsilon \equiv a \frac{\epsilon^3}{2} \Psi \left( \left( \frac{x_1}{\epsilon} \right)^2 + \left( \frac{x_2}{\epsilon^2} \right)^2 + \left( \frac{x_3}{\epsilon} \right)^2 \right),$$

$$\Psi = \int^s \psi(s') ds'$$

$$\beta_\epsilon \rightarrow \alpha_\epsilon, (\epsilon \rightarrow 0)$$

$$e_1 \cdot \nabla \mathbf{u} = a e_2 \text{ より}$$

$$\underbrace{e_1 \frac{-x_2}{\epsilon} \psi(s)}_{\approx \xi_\epsilon} \cdot \nabla \mathbf{u} = - \underbrace{\frac{\epsilon^3}{2} a \psi(s) \frac{2x_2}{\epsilon^4} e_2}_{\approx \nabla \beta_\epsilon},$$

よって

$$(\xi_\epsilon \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla \beta_\epsilon = O(\epsilon^2).$$

$$(\xi_\epsilon \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla \beta_\epsilon = O(\epsilon^2)$$

$$O(\epsilon^8) = \langle |(\xi_\epsilon \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla \beta_\epsilon|^2 \rangle$$

$$= \langle |\nabla \alpha_\epsilon - \nabla \beta_\epsilon|^2 \rangle + \langle |(\xi_\epsilon \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla \alpha_\epsilon|^2 \rangle$$

$$\geq \langle |\nabla \alpha_\epsilon - \nabla \beta_\epsilon|^2 \rangle$$

$$\langle |\nabla \alpha_\epsilon - \nabla \beta_\epsilon|^2 \rangle = O(\epsilon^8)$$

$$\xi_\epsilon \cdot \mathbf{M} \cdot \xi_\epsilon = \xi_\epsilon \cdot \mathbf{P} \cdot \xi_\epsilon - (\xi_\epsilon \cdot \nabla) \mathbf{u} \cdot (\xi_\epsilon \cdot \nabla) \mathbf{u}$$

$$= \xi_\epsilon \cdot \mathbf{P} \cdot \xi_\epsilon - |\nabla \beta_\epsilon|^2 + O(\epsilon^3)$$

$$\xi_\epsilon \cdot \mathbf{M} \cdot \xi_\epsilon = \xi_\epsilon \cdot \mathbf{P} \cdot \xi_\epsilon - |\nabla \beta_\epsilon|^2 + O(\epsilon^3)$$

$$\text{LHS} = \left( \frac{x_2}{\epsilon} \right)^2 \psi(s)^2 e_1 \cdot \mathbf{M}(\bar{\mathbf{x}}, t) \cdot e_1 + O(\epsilon^3)$$

よって

$$\langle \mathbf{A} \mathbf{u}(\xi_\epsilon), \xi_\epsilon \rangle = e_1 \cdot \mathbf{M}(\bar{\mathbf{x}}, t) \cdot e_1 k^2 \epsilon^6 + O(\epsilon^7),$$

ここで

$$k^2 \epsilon^6 = \int \left( \frac{x_2}{\epsilon} \right)^2 \psi^2 \left( \left( \frac{x_1}{\epsilon} \right)^2 + \left( \frac{x_2}{\epsilon^2} \right)^2 + \left( \frac{x_3}{\epsilon} \right)^2 \right) d\mathbf{x}$$

$$= \|\xi_\epsilon\|^2 + O(\epsilon^7)$$

$$\xi_\epsilon^\perp = \xi_\epsilon - \frac{\langle \xi_\epsilon, \mathbf{u} \rangle}{\|\mathbf{u}\|^2} \mathbf{u}, \quad \langle \xi_\epsilon, \mathbf{u} \rangle = O(\epsilon^5)$$

$$\|\xi_\epsilon\|^2 = \|\xi_\epsilon^\perp\|^2 + O(\epsilon^{10})$$

よって

$$\frac{2U_{\mathbf{u}}(\xi_\epsilon^\perp)}{\|\xi_\epsilon^\perp\|^2} = \underbrace{e_1 \cdot \mathbf{M}(\bar{x}, t) \cdot e_1}_{\leq \frac{\text{tr}(\mathbf{M}(\bar{x}, t))}{3}} + O(\epsilon)$$

## 2.5 例

ABC 流

$$\xi = \begin{pmatrix} A \sin z + C \cos y \\ B \sin x + A \cos z \\ C \sin y + B \cos x \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} a \sin z + c \cos y \\ b \sin x + a \cos z \\ c \sin y + b \cos x \end{pmatrix}$$

$$\nabla \cdot ((\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}) + \Delta p = 0,$$

$$\nabla \cdot ((\xi \cdot \nabla) \mathbf{u}) + \Delta \alpha \xi = 0$$

$$\mathbf{P} = \nabla \nabla p$$

$$2U_{\mathbf{u}}(\xi) =$$

$$\begin{aligned} \langle \xi, \mathbf{A} \mathbf{u}(\xi) \rangle &= \langle \xi \cdot \mathbf{P} \cdot \xi - \nabla \alpha \xi \cdot \nabla \alpha \xi \rangle \\ &= -\frac{1}{8} ((aB - bA)^2 + (bC - cB)^2 + (cA - aC)^2) \end{aligned}$$

Nakamura, Hattori & Kambe(1992): Fourier 級数による計算と一致  
Taylor-Green 渦

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} A \cos x \sin y \sin z \\ B \sin x \cos y \sin z \\ C \sin x \sin y \cos z \end{pmatrix}, A + B + C = 0$$

Case.1 攪乱 = 速度型

$$\xi = \begin{pmatrix} a \cos x \sin y \sin z \\ b \sin x \cos y \sin z \\ c \sin x \sin y \cos z \end{pmatrix}, a + b + c = 0$$

$$2U_{\mathbf{u}}(\xi) = 0$$

Case.2 攪乱 = 渦度型

$$\xi = \begin{pmatrix} (c - b) \sin x \cos y \cos z \\ (a - c) \cos x \sin y \cos z \\ (b - a) \cos x \cos y \sin z \end{pmatrix}, a + b + c = 0$$

$$2U_{\mathbf{u}}(\xi) = -\frac{3}{128} (a^2 B^2 + b^2 A^2 + 2(bA - aB)^2)$$

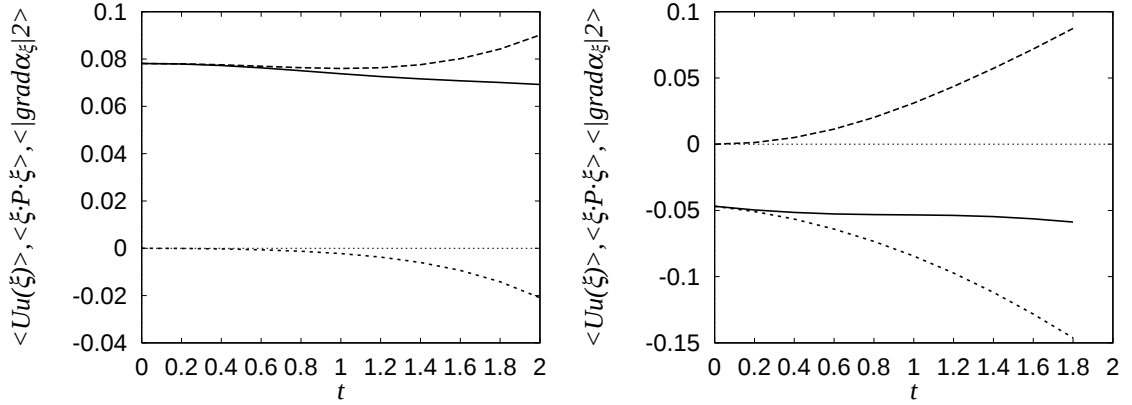
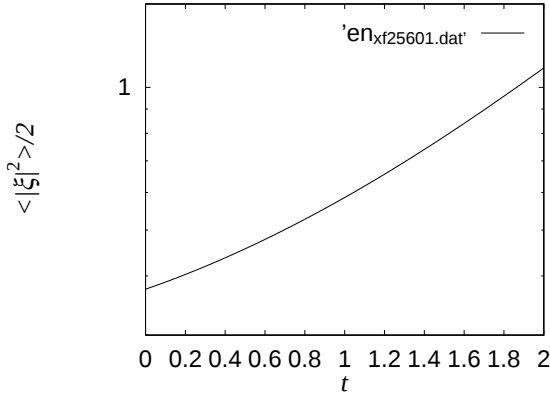


Figure 1: Case.1  $A = -B = 1, C = 0$ , Figure 2: Case.2  $A = -B = 1, C = 0$ ,  
 $\langle |\nabla \alpha_\xi|^2 \rangle, \langle \xi \cdot P \cdot \xi \rangle, \langle Uu(\xi) \rangle$   $\langle |\nabla \alpha_\xi|^2 \rangle, \langle \xi \cdot P \cdot \xi \rangle, \langle Uu(\xi) \rangle$

$$+(A+B)^2(a^2+b^2) + (a+b)^2(A^2+B^2) \leq 0$$

断面曲率の符号は負になる



Case.2 指数関数的増加 (代数的ではない)

## 2.6 線型安定性理論との関係

定常流  $U, \Omega$

攪乱  $u, \omega$

線型化 Euler 方程式

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \nabla \times (U \times \omega) + \nabla \times (u \times \Omega)$$

線型化 Euler 方程式 (簡約版)

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \nabla \times (U \times \omega)$$

i.e.

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + U \cdot \nabla \omega = \omega \cdot \nabla U$$

## 2.7 まとめ

- 断面曲率に関する Rouchon の公式を導いた
- 非圧縮 Euler 流の場合、一般にこれは負定値である
- Couette 流の場合、線型理論では攪乱は  $t$  の多項式でしか増加しない

## 2.8 参考文献

微分幾何の教科書 (流体向け)

Vectors, tensors, and the basic equations of fluid mechanics,  
R Aris, Dover(1962)

Tensor calculus,  
JL Synge, A Schild, Dover(1978)

V. Arnold,  
Sur la geometrie differentielle des groupes de Lie  
de dimension infinie et ses applications a l'hydrodynamique  
des fluides parfaits.  
Annales de l'institut Fourier, 16 no. 1 (1966), 319--361.  
available at <http://www.numdam.org>

V.I. Arnold and Khesin, "Topological Methods in Hydrodynamics"  
Springer (2021)

J.E. Marsden, D.G. Ebin and A.E. Fischer, (1972)  
"Diffeomorphism groups, hydrodynamics and relativity"

解説

B Khesin, "Topological Fluid dynamics" Notices AMS 52(2005)9--19.

P Rouchon,  
Jacobi equation, Riemannian curvature and the motion of a perfect  
incompressible fluid.  
Eur. J. Mech. B/Fluids, 11(1992)317--336.  
<http://cas.ensmp.fr/~rouchon/publications/PR1992/GEODESIC.pdf>

F Nakamura, Y Hattori, T Kambe,  
Geodesics and curvature of a group of diffeomorphisms  
and motion of an ideal fluid  
1992 J. Phys. A: Math. Gen. 25 L45-L50

V.I. Yudovich, 参考  
On the loss of smoothness of the solutions of the Euler equations and  
the inherent instability of flows of an ideal fluid. Chaos 10 (2000),  
705--719.

"Hamiltonian description of the ideal fluid"

P. J. Morrison, Rev. Mod. Phys. (1998)

[http://prola.aps.org/abstract/RMP/v70/i2/p467\\_1](http://prola.aps.org/abstract/RMP/v70/i2/p467_1)

### 3 シュレディンガー方程式

#### 3.1 バーガース方程式

(N-S 方程式より簡単)

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = \nu \Delta \mathbf{v} - \nabla V$$

$V(\mathbf{x}, t)$  は与えられた関数.

Cole-Hopf 変換  $\mathbf{v} = -2\nu \nabla \log \psi$  により、線型化出来る.

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \nu \Delta \psi + \frac{1}{2\nu} V \psi$$

board working for 1D

Cole-Hopf 変換  $\mathbf{v} = -2\nu \nabla \log \psi$

(演算子形)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} - \nu \Delta \mathbf{v} + \nabla V \\ = -2\nu \nabla \left( \frac{\partial_t \psi - \nu \Delta \psi - \frac{1}{2\nu} V \psi}{\psi} \right) \end{aligned}$$

Gesztesy-Holden (2000)

#### 3.2 シュレディンガー方程式

Heuristics (発見的導出)

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2} \Delta \psi + V(\mathbf{x}, t) \psi$$

$\psi(\mathbf{x}, t)$ : 波動関数

$V(\mathbf{x}, t)$ : ポテンシャル. 当面、与えられた関数とする.

$$\begin{cases} E = \frac{p^2}{2m} \\ E = \hbar\omega \\ k = \frac{p}{\hbar} \end{cases}$$

$$\hbar\omega = E = \frac{(k\hbar)^2}{2m} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

$\psi = F(kx + \omega t)$  を考えて

$$\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$$

$$\|\psi\| \searrow 0$$

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}, \text{ Schrödinger (1926) } i \text{ を導入}$$

### 3.3 マーデルング変換：流体力学 → 量子力学

'Die Mathematischen Hilfsmittel des Physikers' Madelung (Springer,1957).

$$\text{連続の式 } \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (7)$$

$$\text{平均値 } \bar{\phi} := \int \rho \phi dv \rightarrow \frac{d\bar{\phi}}{dt} = \overline{\frac{d}{dt} \phi} \text{ (黒板)}$$

$$\bar{\mathbf{r}} = \int \rho \mathbf{r} dv \rightarrow \frac{d\bar{\mathbf{r}}}{dt} = \overline{\frac{d\mathbf{r}}{dt}} := \bar{\mathbf{v}}$$

$$\frac{d\bar{\mathbf{v}}}{dt} = \overline{\frac{d\mathbf{v}}{dt}} = \frac{d}{dt} \int \rho \mathbf{v} dv$$

線形化をねらい  $\rho = \alpha\beta$  と仮定

$$\mathbf{v} = C \nabla \log \frac{\alpha}{\beta} = C \left( \frac{\nabla \alpha}{\alpha} - \frac{\nabla \beta}{\beta} \right)$$

$$\rho \mathbf{v} = C(\beta \nabla \alpha - \alpha \nabla \beta) \quad (8)$$

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = C(\beta \Delta \alpha - \alpha \Delta \beta) \text{ (黒板)}$$

$$\dot{\rho} = \dot{\alpha}\beta + \alpha\dot{\beta}$$

$$\therefore \dot{\alpha}\beta + \alpha\dot{\beta} + C(\beta \Delta \alpha - \alpha \Delta \beta) = 0$$

$$\frac{\dot{\beta} - C \Delta \beta}{\beta} = -\frac{\dot{\alpha} + C \Delta \alpha}{\alpha} := f$$

$$\dot{\alpha} + C \Delta \alpha + \alpha f = 0 \quad (9)$$

$$\dot{\beta} - C \Delta \beta - \beta f = 0 \quad (10)$$

$$\frac{d^2 \bar{\mathbf{r}}}{dt^2} = \frac{d\bar{\mathbf{v}}}{dt} = \frac{d}{dt} \int \rho \mathbf{v} dv$$

(8) より

$$= C \int (\dot{\beta} \nabla \alpha + \underbrace{\beta \nabla \dot{\alpha}}_{\rightarrow -\dot{\alpha} \nabla \beta} - \dot{\alpha} \nabla \beta - \underbrace{\alpha \nabla \dot{\beta}}_{\rightarrow -\dot{\beta} \nabla \alpha}) dv$$

$$= 2C \int (\dot{\beta} \nabla \alpha - \dot{\alpha} \nabla \beta) dv$$

$$(9,10) \text{ より } = 2C \int \{(C \Delta \beta + \beta f) \nabla \alpha + (C \Delta \alpha + \alpha f) \nabla \beta\} dv$$

$$= 2C \int f \nabla(\alpha\beta) dv = -2C \int \rho \nabla f dv = -2C \overline{\nabla f}$$

$$\therefore m \frac{d^2 \bar{\mathbf{r}}}{dt^2} = -2mC \overline{\nabla f} := -\overline{\nabla V} \text{ つまり } V := 2mCf$$

$$\text{定数を } 2mC := \frac{\hbar}{i} \text{ とおくと } f = \frac{V}{2mC} = \frac{iV}{\hbar}$$

$$\alpha = \psi, \beta = \psi^* \text{ とおくと}$$

$$\dot{\alpha} + C \Delta \alpha + \alpha f = 0$$

$$\dot{\psi} + \frac{\hbar}{2mi} \Delta \psi + \psi \frac{i}{\hbar} V = 0$$

$$-i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi + \psi V = 0$$

連続の式から、シュレディンガー方程式が導けた。

### 3.4 マーデルング変換: 量子力学 → 流体力学

Madelung (1927)

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2} \Delta \psi + V(\mathbf{x}, t) \psi$$

$$\psi = \sqrt{\rho} \exp\left(i \frac{\phi(\mathbf{x}, t)}{\hbar}\right), \mathbf{v} = \nabla \phi$$

一般化: 非線型 Schrödinger 方程式:  $V = \hbar f'(\rho)$ ,  $\rho = |\psi|^2$

cf. Nore, Abid & Brachet(1997)

マーデルング変換 (演算子形)

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} - \frac{\hbar^2}{2} \nabla \left( \frac{\Delta \sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}} \right) + \nabla V(\mathbf{x}, t) = -i\hbar \nabla \left( \frac{\frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{i\hbar}{2} \Delta \psi + \frac{i}{\hbar} V \psi}{\psi} \right)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0$$

### 3.5 量子流体力学の方程式

オイラー-コルトベーク-ポアソン系

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = \frac{\hbar^2}{2} \nabla \left( \frac{\Delta \sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}} \right) - \nabla V(\mathbf{x}, t),$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0.$$

$\frac{\hbar^2}{2} \frac{\Delta \sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}}$ : 量子圧力 (ボーム ポテンシャル)

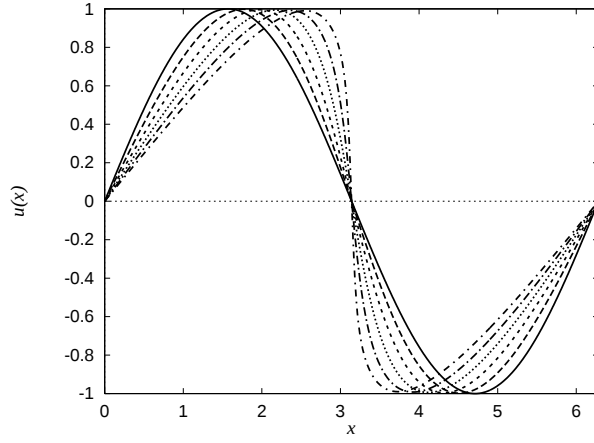


Figure 3: 通常粘性  $\nu = .01$ ,  $v_t + vv_x = \nu v_{xx}$ ,  $v_0 = \sin x$

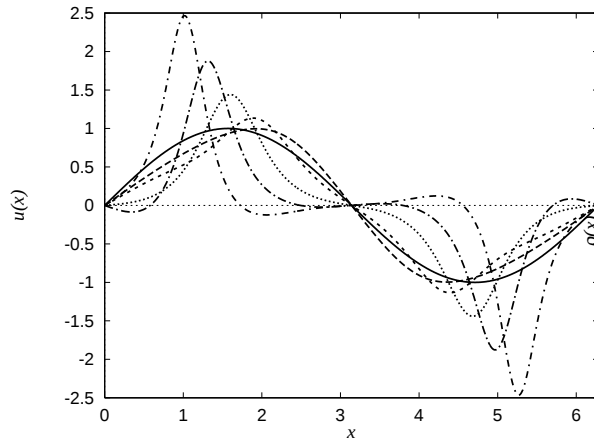


Figure 4: 量子力学の圧力  $\hbar = 1$   $v_t + vv_x = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial_{xx} \sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}} \right)_x$ ,  $\rho_t + (v\rho)_x = 0$

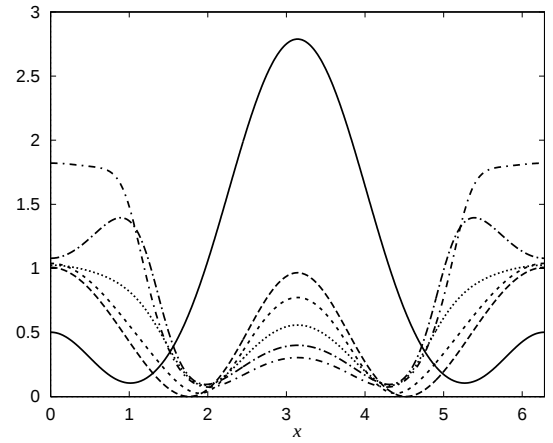


Figure 5: 密度  $\rho$

### 3.6 正則化のしくみ

拡散型: 熱半群

分散型: シュレディンガー半群 (量子力学的圧力)

別の例 KdV 方程式 (可積分系) 計算機によるデモ

量子力学的圧力下での粒子の軌道

熱半群:  $\mathbb{R}^n$

$$\psi_t = \nu \Delta \psi; \quad G(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{(4\pi\nu t)^{n/2}} \exp\left(-\frac{|\mathbf{x}|^2}{4\nu t}\right)$$

$$\text{初期値: } \psi_0 = \frac{1}{(\pi l^2)^{n/2}} \exp\left(-\frac{|\mathbf{x}|^2}{l^2}\right)$$

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\{\pi(4\nu t + l^2)\}^{n/2}} \exp\left(-\frac{|\mathbf{x}|^2}{4\nu t + l^2}\right)$$

シュレディンガー半群:  $\mathbb{R}^n$

$$\psi_t = i\Delta \psi; \quad G(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{(4\pi i t)^{n/2}} \exp\left(-\frac{|\mathbf{x}|^2}{4it}\right)$$

$$\text{同じ初期値: } \psi_0 = \frac{1}{(\pi l^2)^{n/2}} \exp\left(-\frac{|\mathbf{x}|^2}{l^2}\right)$$

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{l^n \left\{ \pi \sqrt{1 + (4t/l^2)^2} \right\}^{n/2}} \exp\left(-\frac{|\mathbf{x}|^2/l^2}{1 + (4t/l^2)^2}\right) \\ &\quad \times \exp\left\{i \left( \frac{4t|\mathbf{x}|^2/l^4}{1 + (4t/l^2)^2} - \frac{n}{2} \tan^{-1} \frac{4t}{l^2} \right)\right\} \end{aligned}$$

1次元: 相互作用のない場合 (ポテンシャル項  $V = 0$ )

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$$

$$\psi = \sqrt{\rho} \exp\left(i \frac{\phi}{\hbar}\right), \quad v = \frac{\partial \phi}{\partial x} \text{ を適用}$$

1D バーガース方程式 (分散型正則化)

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\hbar^2}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\frac{\partial^2}{\partial x^2} \sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}} \right)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v) = 0$$

特性曲線法  $\rho \frac{\partial x}{\partial a} = \rho_0 (= 1)$

ラグランジュ表示 (cf.  $\rho = 1/x_a$ )

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{\hbar^2}{4} \left( \frac{x_{4a}}{x_a^4} - 8 \frac{x_{3a} x_{aa}}{x_a^5} + 10 \frac{x_{aa}^3}{x_a^6} \right) = 0$$

## 4 オンサーガー予想

### 4.1 考え方

粘性流体の運動方程式に従う乱流に対する現象論的な理論を俯瞰する。そこでは、非粘性極限における全運動エネルギーの散逸率の振る舞いが重要となる。近年進展のあった、微分幾何学における等長埋め込みに基づく、流体方程式の連続な解の構成についても触れる。

#### 参考文献

Bardos, C. W., & Titi, E. S. (2013).  
Mathematics and turbulence: where do we stand?.  
Journal of Turbulence, 14(3), 42-76.  
<https://arxiv.org/pdf/1301.0273>

#### 3.2 章

Klainerman, S. (2017).

On Nash ' s unique contribution to analysis in just three of his papers.  
Bulletin of the American Mathematical Society, 54(2), 283-305.

#### 0.1 章

### 4.2 ナビエ-ストークス方程式

ナビエ-ストークス方程式 = 最も短い乱流の理論

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u}, \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

$$\epsilon(t) = -\frac{d}{dt} \left\langle \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} \right\rangle, \quad \langle \dots \rangle := \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{T}^3} dV$$

オイラー方程式

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla p, \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

粘性 (まさつ) がない場合、全運動エネルギーが保存される。  
(形式的) 証明  $\mathbf{u} \cdot$  をかける

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} = -\mathbf{u} \cdot \nabla p$$

$\mathbb{T}^3$  で積分

$$\frac{d}{dt} \int \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} dV + \int (\mathbf{u} \cdot \nabla) \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} dV = - \int \mathbf{u} \cdot \nabla p dV$$

$$\text{例えば } \int \mathbf{u} \cdot \nabla p dV = \underbrace{\int p \mathbf{u} \cdot d\mathbf{S}}_{=0, \text{ 周期性}} - \underbrace{\int p \nabla \cdot \mathbf{u} dV}_{=0, \nabla \cdot \mathbf{u}=0} = 0$$

\*微分可能性を仮定すれば:  $\nu = 0 \implies \epsilon = 0$

それでは  $\nu \rightarrow 0 \implies \epsilon \rightarrow 0$  だろうか?

\*微分可能性を仮定しない場合: 広義の解 (弱解)

### 4.3 フーリエ解析

$$u(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

乱流 = 様々な波数  $n$  を持つ成分の重ね合わせ  
成分の分布、成分間の相関が大事.

ワイエルシュトラス関数 (1872)

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos(a^n \pi x)$$

$$0 < a < 1, b \in \mathbb{N}, \text{ 奇数}$$

特徴: 微分不可能, (ほぼ) 自己相似

一般向け解説書

“Elementary Mathematics from a Higher Standpoint Volume III:  
Precision Mathematics and Approximation Mathematics,”

F. Klein, Springer 1928, 2016(英訳), p.41

導関数の定義

$$\frac{df(x)}{dx} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{f(x+r) - f(x)}{r}$$

$\Delta f(r) := f(x+r) - f(x)$  とおくと

微分可能なら  $r \rightarrow 0$  のとき  $\Delta f(r) \propto r$  (遅くとも).

ヘルダー連続性

$$\Delta f(r) \propto r^h, \quad (0 < h < 1)$$

のとき、 $h$  をヘルダー指数という.

### 4.4 エネルギーカスケード

コルモゴロフの現象論 (1941)

$\nu \rightarrow 0$  でも  $\epsilon \neq 0$  (異常散逸)

次元解析  $\delta u(\mathbf{r}) := (\mathbf{u}(\mathbf{x} + \mathbf{r}) - \mathbf{u}(\mathbf{r})) \cdot \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}$

$$\langle \delta u(r)^n \rangle = C_n \epsilon^{n/3} r^{\xi_n}, \quad \xi_n = \frac{n}{3}$$

$$n = 3: \quad \langle \delta u(r)^3 \rangle = -\frac{4}{5} \epsilon r, \quad \text{つまり } \xi_3 = 1, C_3 = -\frac{4}{5}$$

$$n = 2: \quad \langle \delta u(r)^2 \rangle = C_2 \epsilon^{2/3} r^{2/3} \iff E(k) = C_2' \epsilon^{2/3} k^{-5/3}$$

$$\langle \delta u(r)^2 \rangle = \int_0^\infty E(k) f(kr) dr, \quad f(s) := 4 \left( 1 - \frac{\sin s}{s} \right)$$

(注) ここでの  $\langle \dots \rangle$  は確率平均.

定常確率過程のスペクトル理論

44

II. Functions  $f(x)$  of a Real Variable  $x$

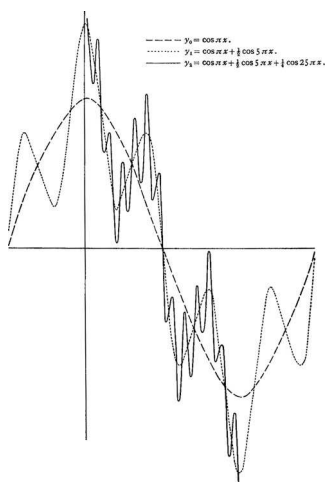


Figure 19 Approximating curves of the Weierstrass function  $y = \sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos a^n \pi x$  for  $b = \frac{1}{5}$ ,  $a = 5$

The single addends of the sum  $\sum_{m=1}^{\infty} b^m \cos a^m \pi x$  all have the same factor  $b^{m+1}$ .  
If we factor it out we have

$$y = Y_m + b^{m+1} \sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos a^{m+1+n} \pi x.$$

Now we are searching for an estimate for the infinite sum and will this way assign an upper and lower bound for  $y$ , that is, we determine the stripe in which the Weierstrassian function lies.

Figure 6: Klein (2016) より

## 4.5 オンサーガー予想

オイラー方程式が全運動エネルギーを保存する

⇔ 速度場がコルモゴロフ理論の相似則より滑らか

(⇐) 剛性

Constantin, E & Titi (1994)

レイノルズ・ストレス  $R := \overline{u \otimes u} - \bar{u} \otimes \bar{u}$  の取扱い

(⇒) 柔軟性

難しかった.

∵ ヘルダー連続な速度場を持ち、エネルギーを散逸する「弱解」

は知られていなかった.

「弱解」の先駆的論文:

シェファール (1993), シュニーレルマン (1997). 難解

ブラニエール ⇒ デレリスに「解説」を依頼.

## 4.6 近年の進展

デレリス-セーケイヒディ

微分幾何学の「等長埋め込み」とオイラー方程式の「弱解」(wild solutions)との類似性を見つけた.

基本 ナッシュ(1954)-クーパー (1955) の定理

距離を縮める \* 埋め込み  $\psi: \mathbb{M}^n \rightarrow \mathbb{R}^k, k \geq n+1$  は、 $C^1$ -等長埋め込みで一樣に近似することができる.

$\mathbb{M}^n$  は  $n$ -次元 閉リーマン多様体  $\approx$  球面

埋め込みとは曲面のパラメータ表示

(\*) 2次形式の意味で  $\partial_i \psi \partial_j \psi \leq g_{ij}$

例  $n=2, k=3, \mathbb{M}^2 = \mathbb{S}^2$

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi_1(x_1, x_2) \\ \phi_2(x_1, x_2) \\ \phi_3(x_1, x_2) \end{pmatrix}$$

$$(x_1, x_2) \in \mathbb{S}^2, (\phi_1, \phi_2, \phi_3) \in \mathbb{R}^3$$

$$\text{cf. } d\phi = (\partial_1 \phi) dx_1 + (\partial_2 \phi) dx_2$$

$$(\partial_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}, \partial_2 = \frac{\partial}{\partial x_2})$$

線要素 (第1基本形式)

$$ds^2 = d\phi \cdot d\phi = g_{11} dx_1^2 + 2g_{12} dx_1 dx_2 + g_{22} dx_2^2$$

$$\text{計量 } g_{11} = \partial_1 \phi \cdot \partial_1 \phi, g_{12} = \partial_1 \phi \cdot \partial_2 \phi, g_{22} = \partial_2 \phi \cdot \partial_2 \phi$$

$\phi_r \in C^2$  ではあり得ない.

∵  $r$  が小さいと、猛烈にシワがよって、曲率が有界とならない.

ガウスの驚愕定理(Theorema Egregium) と矛盾する.

ガウス曲率  $K$  は、第一・第二基本形式(とその微分)で表すことができる.

実際、

コーンフォッセン (1927)-ヘルグロッツの剛性定理

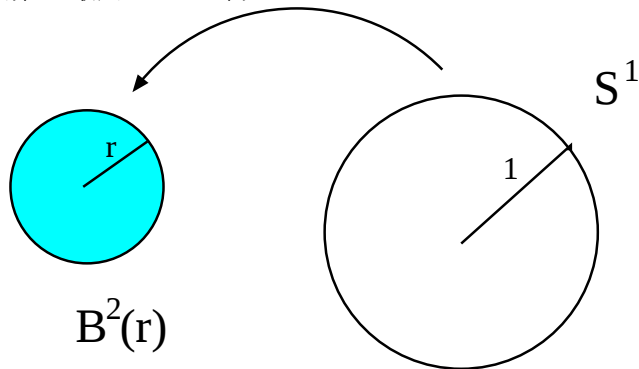
ガウス曲率  $K$  が正の閉曲面は、第一基本形式を保ったまま変形することは不可能.

等長埋め込み: 最も簡単な例  $n = 1, k = 2, \mathbb{M}^1 = \mathbb{S}^1$

$$\text{単位円周 } S^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| = 1\} \subset \mathbb{R}^2$$

$$\text{円板 } B^2(r) = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq r\} \subset \mathbb{R}^2, \forall r > 0$$

$\mathbb{R}^2$  のリーマン計量に付随する等長変換  $\phi_r \in C^\beta(S^1; B^2(r))$  のうち、  
正則性が最良のものは何か?



命題

$r$  を任意に固定する.

$r$  に依らない、小さな  $0 < \alpha < 1$  に対し、 $S^1$  の等長埋め込み  $\phi_r \in C^{1,\alpha}$  が存在;

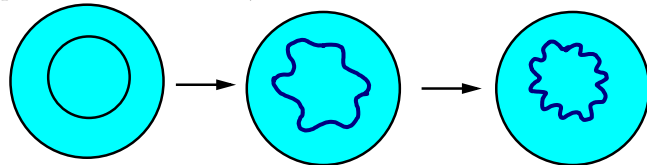
$\phi_r(S^1) \subset B^2(r)$ .

(証明のアイデア)

step 1. リーマン多様体  $\psi_r(S^1)$  上で、距離を縮める写像  $\psi_r$  の存在を示す.

step 2. 微小な振動を集積することで、距離を等しくするように持っていく.

step 3. その極限として  $\phi_r \in C^{1,\alpha}$  を得る.



$B^2(r)$

デレリス-セーケイヒディ

\*連続であるが、微分できない解の構成した.

\*ヘルダー指数の更新

$$h = \frac{1}{10} \nearrow \frac{1}{5} \nearrow \frac{1}{3}$$

Isett(2018); Buckmaster-De Lellis-Szekelyhidi-Vicol(2019)

## 4.7 解の構成法

(考え方)

$$\partial_t \mathbf{u} + \nabla \cdot (\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \nabla p = 0, \nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

$$\text{平均: } \partial_t \bar{\mathbf{u}} + \nabla \cdot (\overline{\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}}) + \nabla \bar{p} = 0, \nabla \cdot \bar{\mathbf{u}} = 0$$

$$\begin{aligned}\overline{\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}} &= \underbrace{\overline{\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}} - \overline{\mathbf{u}} \otimes \overline{\mathbf{u}}}_{:= \mathbf{R} \text{ レイノルズ・ストレス}} + \overline{\mathbf{u}} \otimes \overline{\mathbf{u}} \\ \partial_t \overline{\mathbf{u}} + \nabla \cdot (\overline{\mathbf{u}} \otimes \overline{\mathbf{u}} + \mathbf{R}) + \nabla \overline{p} &= 0 \\ \text{cf. } \mathbf{R} &= \overline{(\mathbf{u} - \overline{\mathbf{u}}) \otimes (\mathbf{u} - \overline{\mathbf{u}})}\end{aligned}$$

次のようにみる:

$$\overline{\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}} = \lim_{n \rightarrow \infty} (\mathbf{u}_n \otimes \mathbf{u}_n), \quad \overline{\mathbf{u}} \otimes \overline{\mathbf{u}} = \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{u}_n \right) \otimes \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{u}_n \right)$$

$\{\mathbf{u}_n\}$ : 近似列 ( $n = 1, 2, \dots$ )

\* $h \in (0, \frac{1}{3})$  を定め、 $E(t) = \int |\mathbf{u}|^2 dV$ , ( $t_1 \leq t \leq t_2$ ) を与える.

\*時空間における反復解法により、オイラー方程式の弱解に収束させる.

(注: 初期値問題を解いているのではない. 一般に一意性は成り立たない.)

$$\text{逐次近似: } \partial_t \mathbf{u}_n + \nabla \cdot (\mathbf{u}_n \otimes \mathbf{u}_n) + \nabla p_n = -\nabla \cdot \mathbf{R}_n$$

$$\text{摂動: } \mathbf{w}_{n+1} = \mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_n$$

$$\mathbf{w}_{n+1} = \sum_{\xi \in \Lambda} a_\xi \mathbf{W}_\xi \mathbf{w}_{\xi, \lambda^{n+1}}, \quad \mathbf{W}_\xi \mathbf{w}_{\xi, \lambda^{n+1}}: \text{構成要素}$$

$$\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{W}(\mathbf{u}_n, \mathbf{R}_n, \lambda^{n+1} \mathbf{x}, \lambda^{n+1} t), \lambda^n (> 1): \text{周波数}$$

$$\begin{aligned}\text{cf. } -\nabla \cdot \mathbf{R}_{n+1} &= \nabla \cdot (\mathbf{w}_{n+1} \otimes \mathbf{w}_{n+1} - \mathbf{R}_n) + \nabla(p_{n+1} - p_n) \\ &\quad + \partial_t \mathbf{w}_{n+1} + \mathbf{u}_n \cdot \nabla \mathbf{w}_{n+1} + \mathbf{w}_{n+1} \cdot \nabla \mathbf{u}_n\end{aligned}$$

シワ寄せに使う道具

$\mathbf{W}_{\xi, \lambda^{n+1}}$ : オイラー方程式の定常解

Mikado flow (お菓子の固有名詞が数学術語となった珍しい例)

Beltrami flow

間欠的 Beltrami flow (ナビエ-ストークス方程式用), etc.

#### 4.8 まとめ

|                                              |                                                         |
|----------------------------------------------|---------------------------------------------------------|
| 微分幾何学                                        | 流体力学                                                    |
| 等長埋め込み                                       | オイラー流れ                                                  |
| $\phi \in C^\alpha$                          | $\delta u \propto r^h$                                  |
| 剛性定理 ( $\alpha=2$ )<br>Cohn-Vossen, Herglotz | エネルギー保存 ( $h > \frac{1}{3}$ )<br>Constantin-E-Titi      |
| 柔軟性定理 ( $\alpha=1$ )<br>Nash, Kuiper         | エネルギー非保存 ( $h < \frac{1}{3}$ )<br>De Lellis-Szekelyhidi |

## 5 進んだ文献案内

非圧縮性流体

Drivas, T. D., & Elgindi, T. M. (2023). Singularity formation in the incompressible Euler equation in finite and infinite time. EMS Surveys in Mathematical Sciences, 10(1), 1-100.

Elgindi, T. M., & Jeong, I. J. (2021). The incompressible Euler equations under octahedral symmetry: singularity formation in a fundamental domain. Advances in Mathematics, 393, 108091.

Madelung 変換の幾何構造

Khesin, B., Misiolek, G., & Modin, K. (2018). “Geometric hydrodynamics via Madelung transform.” Proceedings of the National Academy of Sciences, 115(24), 6165-6170.

Convex integration

T. Buckmaster & V. Vicol (2020). “Convex integration and phenomenologies in turbulence.” EMS Surveys in Mathematical Sciences, 6(1), 173-263.

De Lellis and L. Szekelyhidi Jr. (2019) “On turbulence and geometry: from Nash to Onsager.” Notices of the American Mathematical Society 5: 677-685.

## 6 ベクトル解析の公式

$$\nabla(\phi\psi) = \phi\nabla\psi + (\nabla\phi)\psi$$

$$\operatorname{div}(\phi\mathbf{A}) = \nabla \cdot (\phi\mathbf{A}) = \mathbf{A} \cdot \nabla\phi + \phi\nabla \cdot \mathbf{A}$$

$$\operatorname{div}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B})$$

$$\operatorname{rot}(\phi\mathbf{A}) = \nabla \times (\phi\mathbf{A}) = \phi\nabla \times \mathbf{A} - \mathbf{A} \times \nabla\phi$$

$$\operatorname{rot}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{A}(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{A}) + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B}$$

$$\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}) + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} + (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B}$$

Day 1

令和7年度(第46回)数学入門公開講座テキスト(京都大学数理解析研究所, 令和7年8月4日~8月7日開催)

# Burgers 渦

$$U = \begin{pmatrix} -\alpha x + u_1(x, y, t) \\ -\alpha y + u_2(x, y, t) \\ 2\alpha z \end{pmatrix}$$

$\omega = \nabla \times U$  渦度

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + (U \cdot \nabla) \omega = (\omega \cdot \nabla) U + \nu \Delta \omega$$

$$\omega = \frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \omega}{\partial t} + (-\alpha x + u_1) \frac{\partial \omega}{\partial x} + (-\alpha y + u_2) \frac{\partial \omega}{\partial y} = 2\alpha \omega + \nu \Delta \omega$$

Step.1  $\exists \psi \quad u_1 = \frac{\partial \psi}{\partial y}, u_2 = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$

$\omega = \omega(r, t), \quad \psi = \psi(r, t)$

$$u_1 \frac{\partial \omega}{\partial x} + u_2 \frac{\partial \omega}{\partial y} = \frac{\partial(\omega, \psi)}{\partial(x, y)} = 0$$

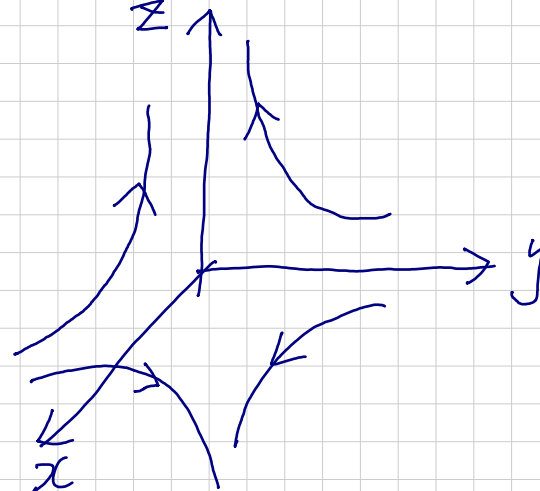
$$\frac{\partial \omega}{\partial t} - \alpha \left( x \frac{\partial \omega}{\partial x} + y \frac{\partial \omega}{\partial y} \right) = 2\alpha \omega + \nu \Delta \omega$$

$$\omega \equiv e^{2\alpha t} \Omega$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} - \alpha \left( x \frac{\partial \Omega}{\partial x} + y \frac{\partial \Omega}{\partial y} \right) = \nu \Delta_x \Omega$$

$$e^{2\alpha t} \frac{\partial \Omega}{\partial t} + \alpha \left( x \frac{\partial \Omega}{\partial x} + y \frac{\partial \Omega}{\partial y} \right) - \alpha \left( x \frac{\partial \Omega}{\partial x} + y \frac{\partial \Omega}{\partial y} \right) = \nu e^{2\alpha t} \Delta_x \Omega$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial T} = \nu \Delta_x \Omega //$$



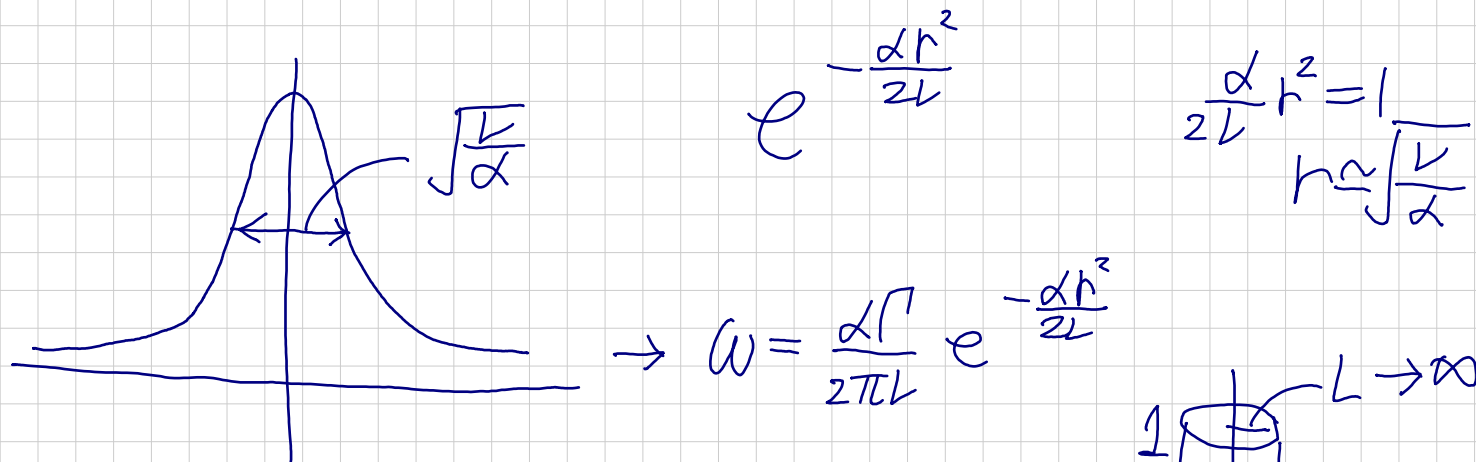
Step2  $(x, y, t) \leftrightarrow (X, Y, T)$

$$\begin{cases} X = e^{\alpha t} x \\ Y = e^{\alpha t} y \\ T = \frac{1}{2\alpha} (e^{2\alpha t} - 1) \end{cases}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial T}{\partial t} \frac{\partial}{\partial T} + \alpha \left( X \frac{\partial}{\partial X} + Y \frac{\partial}{\partial Y} \right)$$

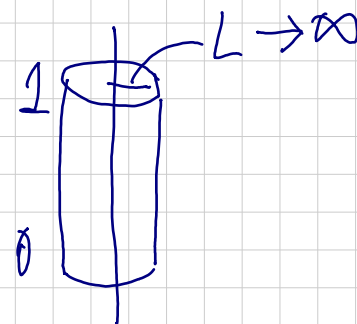
$$e^{2\alpha t} \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial T} + \alpha \left( X \frac{\partial}{\partial X} + Y \frac{\partial}{\partial Y} \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = e^{\alpha t} \frac{\partial}{\partial X}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = e^{\alpha t} \frac{\partial}{\partial Y}$$



エネルギー散逸率

$$\begin{aligned}
 \epsilon &= L \int \omega^2 dV \\
 &= L \int \left( \frac{\alpha \Gamma}{2\pi L} \right)^2 e^{-\frac{\alpha r^2}{L}} 2\pi r dr \\
 &= 2\pi L \left( \frac{\alpha \Gamma}{2\pi L} \right)^2 \int_0^\infty e^{-\frac{\alpha r^2}{L}} r dr \\
 &= \frac{(\alpha \Gamma)^2}{2\pi L} \left[ -\frac{L}{2\alpha} e^{-\frac{\alpha r^2}{L}} \right]_0^\infty \\
 &= \frac{(\alpha \Gamma)^2}{2\pi L} \frac{L}{2\alpha} = \frac{\alpha \Gamma^2}{4\pi} \quad L\text{-indep.}
 \end{aligned}$$



## Day 2

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u = -\nabla p + \nu \Delta u \\ \nabla \cdot u = 0 \end{cases} \quad -\Delta = \nabla \times (\nabla \times)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \frac{|u|^2}{2} + \cancel{\int (u \cdot \nabla) \frac{|u|^2}{2}} = \cancel{\int u \cdot \nabla p} + \nu \int u \cdot \Delta u - \nu \int |\nabla \times u|^2$$

$$\frac{d}{dt} \int \frac{|u|^2}{2} dV = -\nu \int |\nabla \times u|^2 dV$$

Lemma  $\frac{D}{Dt} (\xi \cdot \nabla \phi) = \frac{D\xi}{Dt} \cdot \nabla \phi + \xi \cdot \frac{D}{Dt} \nabla \phi \quad \star$

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \partial_i \phi &= \left( \frac{\partial}{\partial t} + u_j \partial_j \right) \partial_i \phi = \frac{\partial}{\partial t} \partial_i \phi + u_j \partial_i \partial_j \phi \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \partial_i \phi + \partial_i (u_j \partial_j \phi) - (\partial_i u_j) \partial_j \phi \\ &= \partial_i \frac{D\phi}{Dt} - (\partial_i u_j) \partial_j \phi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \star &= \frac{D\xi}{Dt} \cdot \nabla + \xi_i \left( \partial_i \frac{D\phi}{Dt} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \partial_j \phi \right) \\ &= (\xi \cdot \nabla) \frac{D\phi}{Dt} + f \cdot \nabla \phi + \xi_i \partial_i \frac{D\phi}{Dt} - \xi_i \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \partial_j \phi \end{aligned}$$

$$\frac{D}{Dt} (\xi \cdot \nabla \phi) = \xi \cdot \nabla \frac{D\phi}{Dt} + f \cdot \nabla \phi$$

$$\frac{D\xi}{Dt} = (\xi \cdot \nabla)u + f$$

$$\begin{cases} \xi = \omega \\ f = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 \langle \xi_1, A u(\xi_2) \rangle &= \int \xi_1 \cdot (P \xi_2 - (u \cdot \nabla) \nabla \alpha_{\xi_2} + \nabla \sigma) \\
 &= \int \xi_1 \cdot P \cdot \xi_2 - \int \xi_1 (u \cdot \nabla) \nabla \alpha_{\xi_2} \\
 &= \quad \quad + \underbrace{\int (u \cdot \nabla \xi_1) \cdot \nabla \alpha_{\xi_2}}
 \end{aligned}$$

$$\frac{\delta \xi_1}{\delta t} = \frac{D \xi_1}{D t} + \nabla \alpha_{\xi_1}$$

$$\begin{aligned}
 \cdot \nabla \alpha_{\xi_2} \quad \int \frac{D \xi_1}{D t} \cdot \nabla \alpha_{\xi_2} + \int \nabla \alpha_{\xi_1} \cdot \nabla \alpha_{\xi_2} &= 0 \\
 \int \frac{\partial \xi_1}{\partial t} \cdot \nabla \alpha_{\xi_2} + \underbrace{\int (u \cdot \nabla \xi_1) \cdot \nabla \alpha_{\xi_2}} + \int \nabla \alpha_{\xi_1} \cdot \nabla \alpha_{\xi_2} &= 0
 \end{aligned}$$

$$(*) \quad \int \xi^\perp \cdot M \cdot \xi^\perp = \int \underbrace{\min \frac{\xi^\perp \cdot M \xi^\perp}{|\xi^\perp|^2}} \cdot |\xi^\perp|^2 \geq \lambda_{\min} \underbrace{\int |\xi^\perp|^2}_{=1}$$

Day 3

Cole-Hopf tf

$$v = -2\nu(\log \psi)_x = -2\nu \frac{\psi_x}{\psi}, \quad v_x = -2\nu \frac{\psi_{xx}\psi - \psi_x^2}{\psi^2}$$

$$\begin{aligned} v_t &= -2\nu(\log \psi)_{xt} \\ &= -2\nu(\log \psi)_{tx} = -2\nu \left( \frac{\psi_t}{\psi} \right)_x \leftarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &v_t + v v_x - \nu v_{xx} \\ &= v_t + \left( \frac{v^2}{2} \right)_x - \nu v_{xx} \\ &= -2\nu \left( \frac{\psi_t}{\psi} \right)_x + \left( \frac{4\nu^2 \psi_x^2}{2\psi^2} \right)_x + 2\nu^2 \left( \frac{\psi_{xx}\psi - \psi_x^2}{\psi^2} \right)_x \\ &= -2\nu \left( \frac{\psi_t}{\psi} \right)_x + 2\nu^2 \left( \frac{\psi_{xx}}{\psi} \right)_x \\ &= -2\nu \left( \frac{\psi_t - \nu \psi_{xx}}{\psi} \right)_x \quad \square \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \overline{\phi} &= \frac{d}{dt} \int \rho \phi dV = \int \frac{\partial}{\partial t} (\rho \phi) dV \\
 &= \int \left( \rho \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \phi \right) dV \\
 &= \int \left( \rho \frac{\partial \phi}{\partial t} - \underbrace{\phi \nabla \cdot (\rho \mathbf{v})}_{\text{divergence}} \right) dV \\
 &= \int \left( \rho \frac{\partial \phi}{\partial t} - \nabla \cdot (\phi \rho \mathbf{v}) + \rho \mathbf{v} \cdot \nabla \phi \right) dV \\
 &= \int \rho \frac{d\phi}{dt} dV = \overline{\frac{d\phi}{dt}} \quad \square
 \end{aligned}$$