

ランダムウォークから空間を探る 第一回

渡辺 聡美

令和 8 年度 第 47 回数学入門公開講座

はじめに

- 本講義のテーマ：ランダムウォーク

…空間の中をランダムに動く粒子

例：空中を漂う煙，情報などの伝播

- ランダムウォークの動き $\longleftrightarrow$ 空間のかたち

本日の流れ

本講座の問いの紹介

図形の上をランダムに歩く人の挙動は、図形によってどう変わるか？
特に、二人が同じ頂点で出会う回数を考える。

本日の流れ

- ランダムとは何か
- ランダムウォークとは何か
- ランダムウォークを数学的に表す

本日はイントロダクションとして、第二回以降に本格的に計算を見ていくための準備をする。

ランダムとは

例：サイコロ，ブラインド商品・カプセルトイ，降水確率など

- 予測ができない
- 起こりやすさ = **確率** を表すことができる

ランダムウォークとは：時刻ごとの変位が確率的に決まる過程

ランダムウォークの例

- 水に浮かべた花粉の粒子，
- 株価の動き， ● 都市計画のシミュレーション など

本講義のテーマ：「ある空間の中を移動するランダムな粒子」は
数学的には **どう記述** できるか？ …第一回（今日）
何がわかる か？ …第二回以降

確率論における問い

数学者はランダムウォークの何を知りたいのか？

1. 長時間観察したときの挙動

平均への収束（大数の法則）、ばらつき（中心極限定理）など

2. 平均から大きく外れる現象の確率（大偏差原理）

3. 空間内の移動（熱核評価）

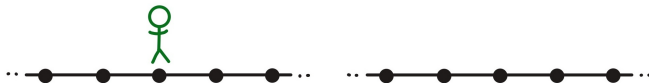
ある時刻に特定の点へ移動する確率は空間によってどう変わるか？

本講義の視点：3. の視点

+ 「衝突」という現象

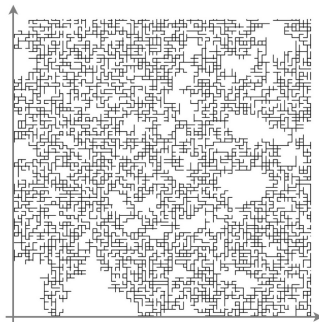
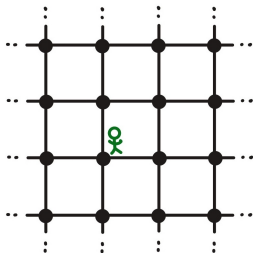
ランダムウォークの動き

- 次の時刻への変位が確率的に決まる過程
- 例：表裏が等しく出るコイン・表が出たら右へ、裏なら左へ
→ 数直線上のランダムウォーク



ランダムウォークの動き

- 次の時刻への変位が確率的に決まる過程
- 例：表裏が等しく出るコイン・表が出たら右へ、裏なら左へ
→ 数直線上のランダムウォーク



出典 <https://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~croydon/Images/halfplanepercbig.png>

ランダムウォークの動き

- 次の時刻への**変位**が確率的に決まる過程
- 例：表裏が等しく出るコイン・表が出たら右へ、裏なら左へ
→ 数直線上のランダムウォーク

長時間挙動の例

1. 原点に戻ってくる（再帰性） or どこかへいってしまう（非再帰性）
2. 二つのランダムウォークはいつまでも出会い続けるか？
3. 二つのランダムウォークの軌跡が交わるか？

関連はある？：「原点に戻ってきやすいなら、出会いやすそう」,
「反対に、どこかへ行ってしまうのだったら、出会うこともなくなる」？

再帰性、衝突、交差

d 次元単純ランダムウォーク : $\mathbb{Z}^d$ 格子上,

$2d$ 個の隣接点のうちどれか一つへ移動

原点から出発したランダムウォークは…

1. $d = 1, 2$ のとき, 確率 1 で原点に戻る (再帰的)

vs $d = 3$ のとき, 原点には有限回しか戻らない (非再帰的)

参考動画 : Visualizing Random Walks in Three Dimensions
(<https://www.youtube.com/watch?v=7A83lXbs6lk>)

2. $\mathbb{Z}^d$ 上では、二つのランダムウォークの衝突が無限回か／有限回かは、再帰性／非再帰性に一致
3. $d \leq 4$ のとき, 二つの軌跡は確率 1 で交差する vs $d \geq 5$ のとき, 正の確率で交差が起こらない

確率の数学的記述

数学的に扱う = 抽象化：重要な性質を取り出す

→ どんな対象にも一般的な扱いができる

確率の三つの要素

- 標本空間 Ω … すべての世界線
- σ -加法族 $\mathcal{F}$ … 起こりうる事象のリスト
- 確率測度 P … 事象の確率を与える “関数”

確率が満たすべき条件

1. 全体の確率は1 ($P(\Omega) = 1$)
2. 余事象が考えられる ($A \in \mathcal{F} \implies A^c \in \mathcal{F}$)
3. $A_1, A_2, A_3 \dots \in \mathcal{F}$ が共通部分をもたないとき

$$P\left(\bigcup A_n\right) = \sum P(A_n)$$

確率の性質

A が起こったとき, 同時に B も起こる確率 $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$
(条件付き確率)

独立性

$P(A \cap B) = P(A)P(B)$ が成り立つとき, 事象 A, B は独立という

注意: 独立かつ $P(A) \neq 0 \Leftrightarrow P(B|A) = P(B)$.

その他の用語

- 確率変数: 各値をとる確率が定まる関数
- 期待値 $E(\cdot)$: 確率変数の平均値
- 指示関数 $1_A(\omega) = \begin{cases} 1 & (\omega \in A) \\ 0 & (\omega \notin A) \end{cases}$: $A \in \mathcal{F}$ ならば確率変数
- $E(1_A) = P(A)$

空間＝グラフ

定義 1 (グラフ)

V : 高々加算無限集合, $E : V \times V$ の部分集合.

V と E の対 $G = (V, E)$ をグラフという.

$(v, w) \in E$ のとき, $v \sim w$ と書く.

$V(G), E(G) : G$ の頂点集合・辺集合であることを明記.

注意 2

本講義では, 次のようなグラフを扱うことにする.

- 辺に向きをつけない. ● 多重辺がない. ● 自己ループをもたない.
- 連結 : 任意の二頂点を結ぶ経路がある.
- 有界次数: ある数 D が存在して, すべての頂点 v について $\deg(v) < D$. ただし $\deg(v)$ は v の次数 (v を含む辺の数).

ランダムウォークの記述

定義 3 (グラフ上のランダムウォーク)

グラフ G 上の**ランダムウォーク**とは, 頂点集合 V に値をとる確率変数の列 $X = (X_n)_{n \geq 0}$ であって, 次を満たすものをいう.

$$P(X_{n+1} = v \mid X_0 = u_0, X_1 = u_1, \dots, X_n = u_n) = p(u_n, v).$$

ただし関数 $V \times V$ 上の関数 p は,

$$p(u, v) = \begin{cases} > 0 & (u \sim v) \\ = 0 & (u \not\sim v) \end{cases} \quad \text{および} \quad \sum_{v \in V, v \sim u} p(u, v) = 1,$$

を満たす.

単純ランダムウォーク

単純ランダムウォーク

特に

$$p(u, v) = \frac{1\{u \sim v\}}{\deg(u)},$$

すなわち各時刻ごとに隣の頂点を選ぶ確率が一律なランダムウォークを、**単純ランダムウォーク** (simple random walk, **SRW**) という。

- 単純ランダムウォーク：一律な現象

(一律な空間中のブラウン運動など)

↔ 異なる p : 偏りのあるネットワークや,

電場や磁場, 外力など外部の場のあるモデル

- 独立でないステップ :

- 自己回避ウォーク (自分の軌跡を避ける) : ポリマーの挙動など
- Elephant random walk (過去を再現) : 金融の特定モデルなど

本日のまとめ

- 数学者は、ランダムな現象に表れる法則を知りたい。
 - どのような長時間挙動？
 - それは空間のどんな性質によって決まる？
- ランダムな現象の一般的な性質を取り出し、数学として扱う。
- 空間をグラフで表し、ランダムウォークを定義した。