

ランダムウォークから空間を探る

第二回

渡辺 聡美

令和 8 年度 第 47 回数学入門公開講座

前回の振り返り

- ランダムとは何か, ランダムウォークとは何か
- 空間をグラフで表し, その上のランダムウォークを定義した.

前回頂いていた質問

Q. 次元数が高い場合は、自由度を $d = 1, 2$ と揃えて比較したほうがよいのでは？

まさに自由度の違いこそが、ランダムウォークや確率モデルにおける難しさ・面白さの本質。また“一様な現象”を比較することにも意味はある。

Q. Fredholm 理論でランダムウォークを扱うことはあるのか？

ランダムウォークと微分方程式・積分方程式には深い関連がある。

Q. ランダムウォークの σ -加法族の定義について

実際に構成するには色々な準備があるので、参考書を読んでみてください。

もうひとつ、講義中に紹介（いい質問！）

本日のテーマ

独立な二つのランダムウォークを観察する.

次のどちらが起こるか？

A. 何度でも衝突する（同時刻に同頂点を訪れる）

or

B. ある時刻から先は衝突しなくなる

一次元 $\mathbb{Z}$, 二次元 $\mathbb{Z}^2$, 三次元 $\mathbb{Z}^3$, ...

正解：次元 $d \leq 2$ では確率 1 で A, $d \geq 3$ では確率 1 で B.

復習：ランダムウォークの再帰性・非再帰性（出発点に戻るかどうか）
空間が十分に“広い”かどうか

では、再帰性・非再帰性は、衝突が無限回かどうかと一致するのか？

ランダムネスの記述

今日は式計算を行う。準備として記号を整理する。

- ランダムウォークの挙動 = 出発点 $\times$ 推移確率 p .

頂点 v から出発したときの確率を P_v で表す。

標本空間 Ω : すべてのパラレルワールドの集合

- $\Omega \ni \omega$: ある世界線

$X(\omega)$: その世界線でのランダムウォークの挙動

- 観測できる現象 (例 : 出発点に戻る)

ある世界線 ω では達成される : $\{n \geq 1 : X_n(\omega) = v\} \neq \emptyset$.

- この事象が起こる世界線全体 $\{\omega : \{n \geq 1 : X_n(\omega) = v\} \neq \emptyset\}$.
- ランダムウォークが出発点 v に戻る確率

$$P_v(\{\omega : \{n \geq 1 : X_n(\omega) = v\} \neq \emptyset\}).$$

($P_v(\{n \geq 1 : X_n = v\} \neq \emptyset)$ と書く)

衝突性

独立な単純ランダムウォーク X と Y が時刻 n に衝突する：

$$\{X_n = Y_n\}$$

衝突回数 $H = \sum_{n=0}^{\infty} 1\{X_n = Y_n\}$. (指示関数の和)

定義 4 (無限回衝突性)

$G = (V, E)$: グラフ (連結, $\deg(v) < \infty$, $v \in V$).

X, Y : G 上の二つの独立な単純ランダムウォーク.

任意の $v \in V$ に対して

$$P_{v,v}(H = \infty) = 1,$$

が成り立つとき, グラフ G は**無限回衝突性**をもつという.

($< \infty$: 有限回衝突性)

以下, 本講義では有界次数のグラフを中心に扱う.

期待値の計算

- 二つのランダムウォークの衝突
“=” 一つのランダムウォークの帰還.
- しかし, ランダムウォークがどの道を通るか,
何回衝突するかを直接調べることは不可能.

→ 「確からしさ=確率」は計算できる.
まずは「期待値」を観察してみる.

衝突回数の期待値

$$\begin{aligned} E_{o,o}(H) &= E_{o,o} \left(\sum_{n=0}^{\infty} 1\{X_n = Y_n\} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} E_{o,o} (1\{X_n = Y_n\}) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P_{o,o} (X_n = Y_n). \end{aligned}$$

無限回衝突の例

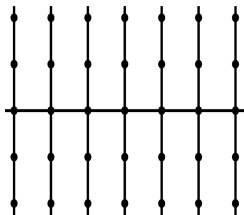
前ページより

$$E_{o,o}(H) = \sum_{n=0}^{\infty} P_{o,o}(X_n = Y_n).$$

$\mathbb{Z}^d$ 上ならば… 右辺は $E_o\left(\sum_{n=0}^{\infty} 1\{X_n = o\}\right)$ に等しい. (後で計算)
= 出発点に戻る平均回数

- 衝突回数の 期待値が有限 $\implies$ 有限回衝突性. … $d \geq 3$ の場合.
- さらに $\mathbb{Z}, \mathbb{Z}^2$ 上では,
衝突回数の 期待値が無量大 $\implies$ 無限回衝突性.
(後述の命題: グラフが推移的ならば成立)
- $\mathbb{Z}^d$ 以外ではどうか?

再帰的かつ有限回衝突な例



Krishnapur–Peres (2004) が
有限回衝突性を証明

直感

ランダムウォークが垂直方向の
パスに留まり、なかなか出会わな
くなる。

Figure: [2] Krishnapur–Peres
(2004) より

$\mathbb{Z}$ と $\text{Comb}(\mathbb{Z})$ の違い

任意の二頂点 $a, b \in V$ に対し、次を満たす全単射 $\phi : V \rightarrow V$ が存在
するとき、グラフ G は推移的であるという。

$$1. \phi(a) = b, \quad 2. v \sim w \iff \phi(v) \sim \phi(w).$$

推移的なグラフ = どの頂点にいてもグラフ全体が同じに見える

期待値の計算

$$\text{前ページ: } E_{o,o}(H) = \sum_{n=0}^{\infty} P_{o,o}(X_n = Y_n).$$

衝突と帰還

時刻 n での衝突がどの頂点で起こったかで場合分け

$$\begin{aligned} P_{o,o}(X_n = Y_n) &= \sum_{v \in V} P_{o,o}(X_n = Y_n = v) \\ &= \sum_{v \in V} P_o(X_n = v) P_o(Y_n = v) \\ &= \sum_{v \in V} P_o(X_n = v) P_v(Y_n = o) \frac{\deg(v)}{\deg(o)} \end{aligned}$$

次: $E_{o,o}(H) \asymp E_o\left(\sum_{n=0}^{\infty} 1\{X_n = o\}\right)$ を目指す.

マルコフ性

ランダムウォークのマルコフ性

過去に条件づけた未来の確率を知るためには、

「現在から見て未来に何が起こるか」と

「過去から見て現在までに何が起こるか」

を分けて考えればよい。（厳密な定義は講義ノートを参照）

マルコフ性がない例：自己回避ランダムウォーク.

過去の軌跡を回避するためには、現在より前の軌跡の情報が必要.

計算のまとめ

マルコフ性を使う

マルコフ性より, $P_v(Y_n = o) = P_o(Y_{2n} = o \mid Y_n = v)$.

これより $P_o(X_n = v)P_v(Y_n = o) = P_o(X_n = v, X_{2n} = o)$ を得る.

計算をまとめる. グラフが有界次数のとき,

$$\begin{aligned} E_{o,o}(H) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{v \in V} P_o(X_n = v, X_{2n} = o) \frac{\deg(v)}{\deg(o)} \\ &\asymp \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{v \in V} P_o(X_n = v, X_{2n} = o) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P_o(X_{2n} = o). \end{aligned}$$

右辺は, $\mathbb{Z}^d$ のように偶奇性がある場合は **= 再帰回数の期待値**,

有界次数ならば **≍ 再帰回数の期待値** (講義ノートの補足参照) .

グラフが推移的な場合

衝突回数 H は特定の分布に従い, 再帰的 $\implies$ 無限回衝突.

$$P_{o,o}(H > m + n)$$

$$= \sum_{v \in V} P_{o,o}(n \text{ 回目*の衝突位置が } v) P_{v,v}(m \text{ 回*以上衝突する})$$

$$= \sum_{v \in V} P_{o,o}(n \text{ 回目*の衝突位置が } v) P_{o,o}(m \text{ 回*以上衝突する})$$

$$= P_{o,o}(H > n) P_{o,o}(H > m). \quad (* \text{ 時刻 } 0 \text{ を除く})$$

$\implies H$ は幾何分布に従う.

$$P_{o,o}(H > n) = P_{o,o}(H > 1)^n, E_{o,o}(H) = \frac{1}{1 - P_{o,o}(H > 1)}.$$

$$E_{o,o}(H) = \infty \implies P_{o,o}(H > \infty) = 1.$$

コメント : 準推移的なグラフでも再帰性と衝突性は一致 ([1])

グラフが推移的な場合

$$P_{o,o}(H > n) = P_{o,o}(H > 1)^n, E_{o,o}(H) = \frac{1}{1 - P_{o,o}(H > 1)}.$$
$$E_{o,o}(H) = \infty \implies P_{o,o}(H > \infty) = 1.$$

コメント：準推移的なグラフでも再帰性と衝突性は一致 ([1])

Q. 衝突する確率 1 or $p < 1$ を掛け続けるのだから、 $P_{o,o}(H = \infty)$ は 0 か 1 しかありえないのでは？

$$P_{o,o}(H > m + n) = P_{o,o}(H > n)P_{o,o}(H > m)$$

という式の導出に、グラフが**推移的**であることを用いている。

推移的でなければ、 $P_{v,v}$ (衝突に関する事象) は v によって異なる。

非再帰的なグラフでは、このバランスによっては、 0 か 1 以外の値をとる可能性を排除できない。

まとめ

- 衝突回数・帰還回数の期待値を計算した.
 - 再帰的なグラフで, 無限衝突と有限衝突の例をみた.
 - 再帰性・非再帰性と無限回／有限回衝突性は一致するとは限らない.
 - 推移的なグラフでは一致.
 - 有界次数のグラフでは, 非再帰的 $\implies$ 有限回衝突.
- 空間のかたちに関する性質には**多様な種類**がある.

参考文献

- [1] D. Chen, B. Wei and F. Zhang, A note on the finite collision property of random walks, Statist. Probab. Lett. **78** (2008), no. 13, 1742–1747
- [2] M. Krishnapur and Y. Peres, Recurrent graphs where two independent random walks collide finitely often, Electron. Comm. Probab. **9** (2004), 72–81