

ランダムウォークから空間を探る

第三回

渡辺 聡美

令和 8 年度 第 47 回数学入門公開講座

本日の問い

$\mathbb{Z}^d$ や $\text{Comb}(\mathbb{Z})$ を見たが、他のグラフはどうか？

- 判定法の紹介
- その判定基準を確かめるためには？
 - ランダムウォークと電気回路
- 具体例で判定法を使う

→ 第四回でいろいろなグラフを紹介

記号の復習 $H = \sum_{n=0}^{\infty} 1\{X_n = Y_n\}$: 衝突回数の合計

$$\tau_A = \inf\{n \geq 0 : X_n \in A^c\}$$

: ランダムウォークが集合 A を最初に離れる時刻

Barlow–Peres–Sousi の判定法

- グラフ G 全体での衝突回数が ∞ になる
 $\leftarrow B_r \subset G$ の増大列, $\bigcup B_r = G$ 例: $\mathbb{Z}^2$ に対して $B_r = [-r, r]^2$ など
 τ_{B_r} までの衝突回数 H_{B_r} が $r \rightarrow \infty$ で ∞ に近づけばよい.

定理 5 ([3], Theorem 3.1)

G : 再帰的, 一点 o を固定. $\{B_r\} : B_r \subset G$ の増大列, $\bigcup B_r = G$.
以下の条件が満たされるとき, グラフ G は無限回衝突性をもつ:

ある $C < \infty$ が存在し, すべての r とすべての $x \in B_r$ に対して

$$g_{B_r}(x, x) \leq C g_{B_r}(o, o).$$

ただし, $g_{B_r}(x, y) = E_x \left(\sum_{n=0}^{\tau_{B_r}} X_n = y \right) \deg(y)^{-1}$: グリーン核

Barlow–Peres–Sousi の判定法

定理 5 ([3], Theorem 3.1)

G : 再帰的, 一点 o を固定. $\{B_r\} : B_r \subset G$ の増大列, $\bigcup B_r = G$.
以下の条件が満たされるとき, グラフ G は無限回衝突性をもつ:

ある $C < \infty$ が存在し, すべての r とすべての $x \in B_r$ に対して

$$g_{B_r}(x, x) \leq C g_{B_r}(o, o).$$

ただし, $g_{B_r}(x, y) = E_x \left(\sum_{n=0}^{\tau_{B_r}} X_n = y \right) \deg(y)^{-1}$: グリーン核

予告: $\mathbb{Z}$ vs $\text{Comb}(\mathbb{Z})$

くしの歯の高さが 0 vs ∞ : 無限回 or 有限回衝突

定理 5 より, ある高さまでは無限回衝突することが示せる.

証明のアイデア

Paley–Zygmund 不等式

Z : 非負確率変数, $E(Z^2) < \infty$. このとき $\theta \in [0, 1]$ に対して

$$P(Z \geq \theta E(Z)) \geq (1 - \theta)^2 \frac{E(Z)^2}{E(Z^2)},$$

- $H_{B_r}^2$ “=” $\left(\sum_{n=0}^{\tau_{B_r}} 1(X_n = Y_n) \right)^2$
$$= \sum_{n=0}^{\tau_{B_r}} 1(X_n = Y_n) + \sum_{m,n=0}^{\tau_{B_r}} 1(X_m = Y_m, X_n = Y_n).$$

$$E_{o,o}(H_{B_r}^2) \leq E_{o,o}(H_{B_r}) \left(1 + D \max_{x \in B_r} g_{B_r}(x, x) \right)$$

- 右辺に代入, $P(H_{B_r} \geq \theta E(H_{B_r})) \geq c \frac{g_{B_r}(0, 0)}{\max_{x \in B_r} g_{B_r}(x, x)}.$

判定法の証明

- グラフ G 全体での衝突回数が ∞ になる
← 拡大する部分グラフ B_r を初めて出る時刻 τ_{B_r} までを見る。
この時刻までの衝突回数 H_{B_r} が $r \rightarrow \infty$ で無限大に近づけばよい。

$$\text{前ページより } P(H_{B_r} \geq \theta E(H_{B_r})) \geq c \frac{g_{B_r}(0,0)}{\max_{x \in B_r} g_{B_r}(x,x)}.$$

- 仮定 $g_{B_r}(x,x) \leq C g_{B_r}(o,o)$ より, 右辺は r, x によらず正。
- $H_{B_r} \rightarrow H, \quad E_{o,o}(H_{B_r}) \rightarrow E_{o,o}(H) = \infty$. (再帰性)

前ページの計算より, $P(H = \infty) > c$.

+

命題 6 (Collision の 0-1 法則)

G : 連結, 再帰的. X, Y : G 上の独立な単純ランダムウォーク.
このとき, 任意の $a, b \in G$ に対して, $P_{a,b}(H = \infty) \in \{0, 1\}$.

判定法の証明

$$\text{前ページより } P(H_{B_r} \geq \theta E(H_{B_r})) \geq c \frac{g_{B_r}(0,0)}{\max_{x \in B_r} g_{B_r}(x,x)}.$$

- 仮定 $g_{B_r}(x,x) \leq C g_{B_r}(o,o)$ より, 右辺は r, x によらず正.
- $H_{B_r} \rightarrow H, \quad E_{o,o}(H_{B_r}) \rightarrow E_{o,o}(H) = \infty$. (再帰性)

前ページの計算より, $P(H = \infty) > c$.

命題 6 (Collision の 0-1 法則)

G : 連結, 再帰的. X, Y : G 上の独立な単純ランダムウォーク.
このとき, 任意の $a, b \in G$ に対して, $P_{a,b}(H = \infty) \in \{0, 1\}$.

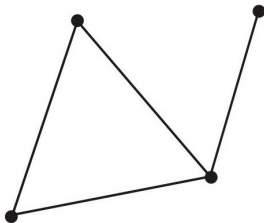
- 衝突回数が無限 or 有限: **有限時間の観察結果に影響されない.**

再帰的 + 二つの独立性 $\rightarrow$ 確率は 0 か 1 (0-1 法則)

- 無限回衝突性 $\implies$ 一回でも衝突する確率が正なら,
異なる始点 (a, b) の場合も無限回衝突

ランダムウォークと電気回路

このセクションのねらい：グリーン核とグラフの図形的特徴の結びつき



- $p(i, j)$: 頂点 i から j への遷移確率
$$\sum_j p(i, j) = 1.$$
- $\pi : V \rightarrow [0, \infty).$

すべての辺 (i, j) に対して

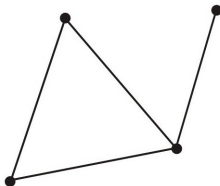
$$\pi(i)p(i, j) = \pi(j)p(j, i)$$

が成り立つとき, この値を $c(i, j)$ ($= c(j, i)$) とおく.

この対称な関数 $c : V \times V \rightarrow [0, \infty)$ をコンダクタンスといい,

(G, c) をネットワークという.

回路が定めるランダムウォーク



$$\sum_{j:j \sim i} \pi(i)p(i,j) = \pi(i), \quad p(i,j) = \frac{c(i,j)}{\pi(i)} = \frac{c(i,j)}{\sum_{j:j \sim i} c(i,j)}$$

- コンダクタンスからランダムウォークの遷移確率が再現できる.
(単純ランダムウォーク: $\pi(i) = \deg(i)$, $c(i,j) \equiv 1$)

次のセクション: 電位が「訪問確率」,

電気エネルギーが「グリーン関数」という対応をみる

電気回路の基本法則

コンダクタンスの逆数 $r(x, y) := c(x, y)^{-1}$ を抵抗という.

電流が満たす法則

- オームの法則 : 電流は電圧に比例し, 抵抗に反比例する.

$$v(x) - v(y) = i(x, y) \cdot r(x, y).$$

- キルヒホッフの法則 : 一点への電流の流入量と流出量は等しい.

$$\sum_{y \sim x} i(y, x) = 0.$$

これらを合わせて整理すると

$$\sum_{y \sim x} v(y) p(x, y) - v(x) = 0. \quad (1)$$

これを満たす関数 v を調和関数という.

電気回路のエネルギー (1/2)

V 上の関数 f, g に対して

$$\mathcal{E}(f, g) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{x, y \in V \\ x \sim y}} (f(x) - f(y))(g(x) - g(y))c(x, y),$$

と定める.

電気回路のエネルギー (1/2)

電力の公式 $P = V^2/R$ より, 電位が v のときのエネルギーは

$$\frac{1}{2} \sum_{\substack{x, y \in V \\ x \sim y}} (v(x) - v(y))^2 c(x, y) = \mathcal{E}(v, v),$$

と表せる.

前ページより, 電位 v は調和関数だった. このとき何が言えるか?

電気回路のエネルギー (2/2)

$H = \{f : \mathcal{E}(f, f) < \infty\}$: エネルギーが有限となる関数全体
 $A, B \subset V, A \cap B = \emptyset$. 電位と、それ以外の関数を比較する

命題 7 ([4] 参照)

A 上で 1, B 上で 0 をとる任意の V 上の関数 $f \in H$ に対して

$$\mathcal{E}(f, f) \geq \mathcal{E}(v, v),$$

となる関数 $v \in H$ がただ一つ存在する. さらに, この v は

$$\sum_{y \sim x} v(y)p(x, y) - v(x) = 0,$$

(前出の式 (1)) を満たす, すなわち調和関数である.

集合 A, B : それぞれ電源 (電圧 1) の +, - 極をつなぐ点

オームの法則, キルヒホッフの法則
各点での原理



エネルギー最小化
大域的な原理

有効抵抗とグリーン核

$P = V^2/R$ より, 単位電圧の電気エネルギーは**抵抗の逆数**.

定義 8

A と B の間の有効抵抗 $R(A, B)$ を

$$R(A, B)^{-1} = \inf\{\mathcal{E}(f, f) : f \in H, f = 1 \text{ on } A, f = 0 \text{ on } B\},$$

と定める.

- 一点 $x \in B$ から, B の外側までの有効抵抗は

$$R(x, B^c)^{-1} = \inf\{\mathcal{E}(f, f) : f \in H, f(x) = 1, f = 0 \text{ on } B^c\}.$$

- さらに, $\mathcal{E}$ を最小にする関数は調和関数だった.

→ B が有限集合ならば, このような関数は**ただ一つ**存在する.

(ディリクレ問題の解の一意性)

有効抵抗とグリーン核

- 一点 $x \in B$ から, B の外側までの有効抵抗は

$$R(x, B^c)^{-1} = \inf \{ \mathcal{E}(f, f) : f \in H, f(x) = 1, f = 0 \text{ on } B^c. \}$$

- さらに, $\mathcal{E}$ を最小にする関数は調和関数だった.

→ B が有限集合ならば, このような関数は**ただ一つ**存在する.

(ディリクレ問題の解の一意性)

計算により, $\frac{g_{B_r}(x, \cdot)}{g_{B_r}(x, x)}$ がその関数だと確かめられる.

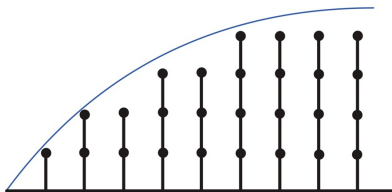
- $g_{B_r}(x, \cdot)$ は定義 (訪問回数の期待値) より調和関数 ← マルコフ性
- $\mathcal{E}(g_{B_r}(x, \cdot), f) = f(x)$.

$$R(x, B^c) = \mathcal{E} \left(\frac{g_{B_r}(x, \cdot)}{g_{B_r}(x, x)}, \frac{g_{B_r}(x, \cdot)}{g_{B_r}(x, x)} \right)^{-1} = g_{B_r}(x, x).$$

応用：Comb グラフと衝突の判定

グラフ $\text{Comb}(\mathbb{Z}, f)$

- 頂点集合 $V(f) := \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 : 0 \leq y \leq f(x)\}$,
- 辺集合 $\{(x, y) \in V(f) \times V(f) : (x, y) \in E(\text{Comb}(\mathbb{Z}))\}$.



$$f(x) = |x|^\alpha, \quad B_r = \{(x, y) \in V(|\cdot|^\alpha) : x \leq r\}$$

定理 9 ([3], Theorem 1.6)

$\alpha \leq 1$ のとき、 $\text{Comb}(\mathbb{Z}, |\cdot|^\alpha)$ は無限回衝突性をもつ。

$\alpha > 1$ のときは有限回衝突（同論文：衝突回数の期待値の計算より）

応用：フラクタル上の衝突

フラクタル：自己相似性のある図形

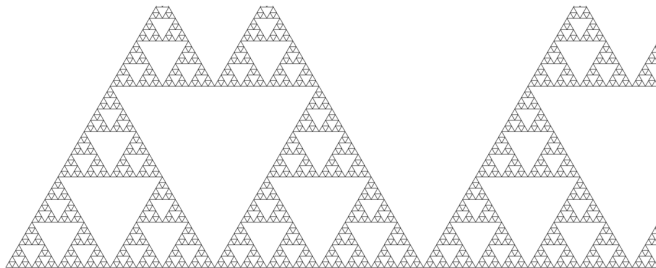


Figure: Sierśinśki gasket(を近似するグラフ). 図は Kozma–Nachmias, The Alexander–Orbach conjecture holds in high dimensions (2009) より引用

- 有効抵抗が計算されているものに対しては，衝突性がわかることがある．

まとめ

- 無限回衝突性を判定する方法の一例
- ランダムウォークとグラフの図形的特徴
→電気回路による結びつき
- 例 : $\text{Comb}(f)$, フラクタル的な形状をもつグラフ

参考文献

- [3] M. T. Barlow, Y. Peres and P. Sousi, Collisions of random walks, Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat. **48** (2012), no. 4, 922–946
- [4] 熊谷 隆, 確率論, シリーズ・新しい解析学の流れ, 共立出版, 2003