

ランダムウォークから空間を探る 第四回

渡辺 聡美

令和 8 年度 第 47 回数学入門公開講座

今回の流れ

- * 前回：無限回衝突性の判定法，ランダムウォークと電気回路
- ランダムネスから生まれる複雑なかたち
→ そのうえでのランダムウォークの衝突
- 近年の研究の動向（衝突性・関連する問題など）

フラクタル上の衝突

フラクタルとは…一部を拡大すると、全体と同じ構造が現れる図形

現実世界の例

雲や海岸線、下から見上げた森林、体内器官の構造など

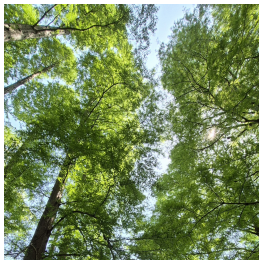


Figure: 新宿御苑のどこか (撮影：渡辺)

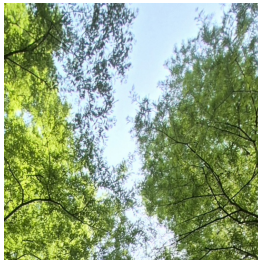


Figure: 画像上部を拡大



Figure: さらに拡大

フラクタル上の衝突

フラクタルとは…一部を拡大すると、全体と同じ構造が現れる図形

現実世界の例

雲や海岸線，下から見上げた森林，体内器官の構造など

- なめらかでない → 解析の道具が $\mathbb{R}^d$ と大きく異なる.
- ランダムウォークの挙動が，一様な空間とは本質的に違う.
(穴や障害物があり，遅くなる)

数学的構成：発見…19世紀後半～1900年代

名付け・理論の整備…1970年代 マンデルブロ以降

ランダムなグラフのかたち

フラクタルのようなカタチは、ランダムな設定からも生まれる。

例： $\mathbb{Z}^2$ 上のパーコレーション

(ランダムに辺や頂点を置いたり取り除いたりする)

参考 https://en.wikipedia.org/wiki/Percolation_theory#/media/File:Percolation_zoom.gif

パーコレーションとは

- 水の浸透のモデル → 感染症の広がり, 情報の伝播への応用
- 1960 年前後: Broadbent–Hammersley (モデル化), 物理学的考察
→ 1980 年代～: 数学的な解析

このようなランダムで複雑な図形・グラフの上で,

ランダムウォークはどのように動くのか?

ランダムなグラフの上のランダムウォーク

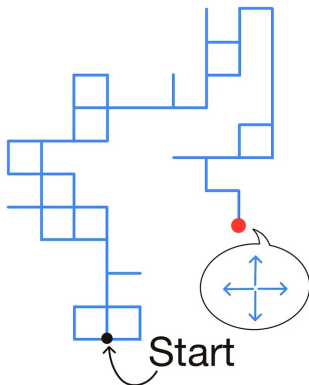


Figure: 二次元単純ランダムウォーク
のサンプルパス

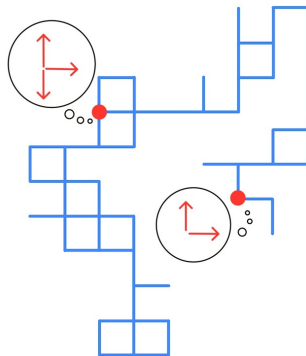


Figure: 左のパスの上でランダム
ウォークする

ランダムなグラフの上のランダムウォーク

- 一つ目のランダムネス：ランダムグラフ（媒質）
確率空間 $(\Omega, \mathbb{P}) \ni \omega \mapsto \mathcal{G}(\omega)$ ：一つの実現 $\rightarrow$ 固定
- 二つ目のランダムネス： $\mathcal{G}(\omega)$ 上のランダムウォーク
 - 通常, $P(X \in A)$ は 0 から 1 までの値
 - $P^{\mathcal{G}(\omega)}(X^{\mathcal{G}(\omega)} \in A)$ ： ω に依存 $\rightarrow (\Omega, \mathbb{P})$ 上の確率変数
- 知りたいのは典型的な挙動や平均的な挙動
 - $\mathbb{P}$ に対して確率 1 で成り立つか？
(例：「無限回衝突性」は確率 1 で成り立つか？)
 - $\mathbb{E}(P^{\mathcal{G}(\omega)}(\cdot))$ ：平均をとる

確率 1 で成り立つ性質は、ランダムグラフの典型的な性質といえる

判定法 ランダムグラフ ver.

1. 前回紹介した Barlow–Peres–Sousi

前回の判定法の条件式 ($g_{B_r}(x, x) \leq C g_{B_r}(o, o)$) に相当するものが高確率で満たされる → ある種の一様性

2. “平均すると推移的に近い”

- Hutchcroft–Peres (2015) 再帰的かつ「平均的に見て、**どの頂点も同じ役割**を担う (unimodular)」
⇒ そのランダムグラフは確率 1 で無限回衝突性をもつ.
- Astoquillca–Martinez-Arevalo (2026+, プレプリント)
unimodular なランダムグラフでは、衝突性と再帰性が一致

三つのランダムウォーク

問題の一般化の一例：ランダムウォークの数を増やす

独立なランダムウォーク X, Y, Z と,
衝突回数 $H = \sum_n 1\{X_n = Y_n = Z_n\}$.

- $\mathbb{Z}$ では無限回衝突, $\mathbb{Z}^2$ では有限回衝突 → “境界” は再帰性ではない
- くし形で, 歯の高さ L_n が独立同分布・期待値 $< \infty$
ならば無限回衝突 by Chen–Chen (2011)
- $\text{Comb}(\mathbb{Z}, \log^\alpha)$ では, $\alpha \leq 1$ or $\alpha > 1$ で無限回／有限回衝突
by Croydon–De Ambroggio (2025)

次のステップ

Comb は非常に扱いやすい (有効抵抗が簡単にわかる, 構造も単純)
→ では, Comb 以外のグラフでは?

ランダムウォークの軌跡

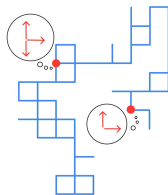
四次元単純ランダムウォークの軌跡

ランダムウォークが通過した点／辺全体を頂点集合／辺集合とする

講演者の最近の結果：Croydon–Shiraishi–W. (26+) の主定理

四次元単純ランダムウォークの軌跡がなすランダムグラフは、
確率 1 で無限三重衝突性をもつ

- $\mathcal{G}(\omega)$: 一つの実現
- $P^{\mathcal{G}}(X_n^{\mathcal{G}} = Y_n^{\mathcal{G}} = Z_n^{\mathcal{G}} \text{ i.o.}) = 1$ をみたす ω の割合は？



※この図は二次元

$$\rightarrow \mathbb{P}(\{\omega : P^{\mathcal{G}(\omega)}(X_n^{\mathcal{G}(\omega)} = Y_n^{\mathcal{G}(\omega)} = Z_n^{\mathcal{G}(\omega)} \text{ i.o.}) = 1\}) = 1$$

とても単純化したアイデア

- ランダムウォークの軌跡は、確率 1 で再帰的（グラフとして）
- $\mathbb{Z}^4$ 上の単純ランダムウォークの軌跡は $\text{Comb}(\mathbb{Z}, \log^{1/2})$ に近い
 - 自己交差がないパス：長さ n のパスの端点の間の有効抵抗は n .
 - ★ 4次元単純ランダムウォーク：小さな区間での自己交差がある。
 - 端点間の有効抵抗が n となるパスに含まれる頂点数は
$$n(\log n)^{1/2}$$
 - 全体が “無限パス + 小さな構造” と見なせる

「三つの場合の無限回衝突性があるのではないか？」

困難と今後の課題

二つのときと比べて何が大変か

- わかりやすい判定法は使えない
- 三つのランダムウォークでの $E_{o,o,o}(\tilde{H}_{B_r})$ はグリーン核には
ならない

訪問確率の “三乗” の “和” をコントロールするために、より多くの
情報が必要になる

何とかなったのは、ランダムウォーク（軌跡）のよい性質のおかげ
今後の課題 → 他のグラフに拡張するにはどうすればよい？

困難と今後の課題

二つのときと比べて何が大変か

- わかりやすい判定法は使えない
- 三つのランダムウォークでの $E_{o,o,o}(\tilde{H}_{B_r})$ はグリーン核には
ならない

訪問確率の “三乗” の “和” をコントロールするために、より多くの
情報が必要になる

- Paley–Zygmund 不等式 $E(\tilde{H}_{B_r})^2$ vs $E(\tilde{H}_{B_r}^2)$.
- 熱核の評価: $p_{2n}(x, x) \leq \frac{4r}{n} + \frac{4}{V_R(x, r)}.$

何とかなったのは、ランダムウォーク（軌跡）のよい性質のおかげ

今後の課題 → 他のグラフに拡張するにはどうすればよいか？

研究の進展

ランダムウォークの衝突性の研究の流れを振り返る

今回紹介した主な結果の流れ

0. Pólya の観察, $\mathbb{Z}^d$ の場合 (再帰性との対応)
1. 再帰的かつ有限回衝突の例 ← 先行研究への反例
2. 無限回衝突性の十分条件 ← 例から一般論へ: “推移的” を拡張
2+. 十分条件が必要十分条件になる場合
3. 三つのランダムウォークの衝突性 ← 問題の一般化
- ⋮

紹介しきれないが, 様々なグラフに対して

衝突性を判定する試み・結果は蓄積されている

衝突以外の挙動 (1/2)

- ランダムウォークがたくさん訪れた点 (favorite sites)
… 時刻 n までに一番訪れた点 (たち) $\mathcal{K}(n)$ on $\mathbb{Z}^d$

- 出発点から離れていく
- $d = 1, 2$: いずれ 3 個以下になる ($d = 1$ by Tóth (2001),
 $d = 2$ by Hao–Li–Okada–Zhang (2025))

VS

$d \geq 3$: 何個にもなりうる by Erdős–Révész (1991)

- $d \leq 2$: 「いま favorite site である点たち」を避けられない
→ すぐに更新される

VS

$d \geq 3$: favorite sites が離れた場所に同時に存在

衝突以外の挙動 (2/2)

- 離散と連続の橋渡し
 - 格子 $\mathbb{Z}^d$ を縮小していくと連続な空間に近づく.
 - 格子上的ランダムウォークを “引き” で見ると,
ブラウン運動に近づく.

“近づく”とはどういうことか？ 複雑な（離散の）図形が連続の図形に近づくとき，その上のランダムな粒子の動きは何になるのか？

- 解析の難しさ … $\mathbb{Z}^d$ でも，次元 d によって異なる
一番難しいのは？: **1, 2 を除く低次元**
- ランダムな曲面の解析

全体のまとめ

1. グラフ上のランダムウォークを定義した
2. 衝突性と再帰性の一致／不一致の例を見た
3. 衝突性を解析するための手法を学んだ
4. 複雑な図形上のランダムウォークについて，研究の流れを見た

メッセージ

ランダムな現象の挙動は，現実世界にも大きく関連する問題．

自然現象にも，社会現象にも現れる．

今回ご紹介したのは，そんな広い世界の**ごく一部**！

ご参加ありがとうございました！