

ランダムウォークから空間を探る

渡辺 聡美

目次

1	ランダムウォークとは何か?	1
1.1	ランダムウォークとは何か	2
1.2	ランダムウォークの回帰、衝突、交差	3
1.3	確率とは何か	4
1.4	まとめ	7
2	ランダムウォークの出会いやすさ	8
2.1	ランダムウォークの記述	8
2.2	衝突回数と再帰性	9
2.3	命題 2.3 の証明	11
2.4	まとめ	12
2.5	補足	13
3	複雑な図形上のランダムウォーク	15
3.1	再帰的なグラフ上の 0-1 法則	15
3.2	Barlow-Peres-Sousi の判定法	15
3.3	ランダムウォークと電気回路	17
3.4	判定法の適用例	19
3.5	まとめ	20
4	衝突に関する新たな問い	21
4.1	ランダムグラフ上のランダムウォーク	21
4.2	三つのランダムウォークの衝突	22
4.3	これからの課題	22
4.4	まとめ	23

1 ランダムウォークとは何か?

講義のタイトルにあるランダムウォークは、自然現象に始まり、金融やリスク管理、ネットワークの振る舞いなど、様々な現象の数理モデルとして現れる数学的対象です。ランダムで予測不可能な挙動も、長いスケールで見れば、あるいはたくさんの粒子の集合として見たときには、何らかの法則が現れる。それが確率論の出発点です。そしてその法則は、異なる構造をもつ空間・ネットワークの上で共通して現れるものかもしれませんし、構造が違うことで本質的に変化するものかもしれません。

それぞれが同じように(法則性がなく、運任せで)動いていても、「どういった空間にいるか」によって目に見える振る舞いは異なる。

これが今回の講義のエッセンスです。本講義では、**ランダムウォークの衝突回数**を通して、ランダムウォークの挙動が空間によってどのように変化するかを見ていきます。

本講義のテーマ：

- ランダムウォークの衝突と空間にはどんな関連性があるのか？
- ランダムとは、ランダムウォークとは、数学的にはどのように扱われるか？

1.1 ランダムウォークとは何か

本講義では、ランダムウォーク(英: random walk)とは、ある時刻から次の時刻への「変位」が確率的に決まる離散時間確率過程のことをいいます¹。ランダムウォークは、自然界や人間社会のさまざまな現象のモデルとなっています。

例：水に浮かべた花粉の粒子が、水分子にぶつかることで複雑な動きを見せる。

例：株価の動きは規則性のないランダムな動きであり、過去の動きを再現できない。

例：トランプのシャッフルでは、カードを一回切るごとに、カードの並び順がランダムに移り変わる²。

本講義では、ブラウン運動の観察のような「ある空間の中を移動するランダムな粒子」をどのように数学的に記述するか？ということを考えていきます。

ところで、確率とかランダムとは一体何なのでしょう。今のところは「確率とは、ランダムとは(数学的に)何か」ということはいったん脇に置いておいて、次のようなイメージをもっていただければと思います。

- ランダムなものは**予測ができない**。たとえば、サイコロを一回振って3の目が出たとき、あるいは十回振ってずっと5の目が出ていたとき、次に何の目が出るのかを言い当てることはできない。
- ランダムなものは、次の予測はできないが、**起こりやすさ=確率**を表すことはできる。たとえば、均質なサイコロならば、六つの目の出やすさは等しいと言える。また、「無限に繰り返し振り続けたとき、1の目は絶対に出ない」という現象は起こりえない(=確率0)。

基本的な問い

ランダムウォークは、上記の通り、ミクロな分子の熱力学的な振る舞いや金融商品の価格の変動をはじめ、身近な「予測不可能な動き」のモデルになっています。では、数学者はランダムウォー

¹独立かつ同分布な確率変数列の和、と定義されることもあります。本講義では一般のグラフを扱うため、上記のようなイメージを持っていただきたいと思います。

²このような操作をランダムウォークと言うことは普段はありませんが、根底にある意識は同じものです。カードシャッフルのモデルは一般にマルコフ連鎖と呼ばれます。ランダムウォークは、マルコフ連鎖の一つです。

クを観察して、どのような性質を知ろうとしているのでしょうか。

長時間観察したときの「平均値」や「値のばらつき」、「状態の分布」はどこに落ち着くか？

- マクロな視点では、ミクロなランダム性は相殺されて消える。個々のステップは予測不能だが、全体を平均するとひとつの値へ収束する。(サイコロの目の平均値)：大数の法則
- ミクロなランダムネスがどんな種類であれ、極限の揺らぎは普遍的な形(正規分布)になる。：中心極限定理
- 十分に時間が経てば、初期状態の記憶は失われ、平衡状態に達する。：定常分布

平均から大きく外れるような事象はどのくらいの確率で起こるのか？：大偏差原理

時刻 t にある点 x から y へ移動している確率は、空間の幾何学的な性質にどう依存するか？：熱核評価

- 確率の広がり調べること、直接見ることができないグラフやモデルの構造そのものを理解できる。
- 他に、再帰性・非再帰性(特定の状態に必ず戻ってくるかどうか)や、特定の頂点への到達時間、全体を探索し終えるまでの時間(カバータイム)といった量もグラフの構造に示唆を与える。

本講演では主に三つ目の視点、「ランダムウォークの挙動が空間の幾何学的な性質にどう依存するか」を扱います。

1.2 ランダムウォークの回帰、衝突、交差

ランダムウォークにとって、その空間がどのように見えているか。その指標の一つに、「再帰性・非再帰性」というものがあります。

定義 1.1. ランダムウォークが有限時間内に出発点に戻ってくる確率が1のとき、再帰的であるという。この確率が1未満であるとき、非再帰的であるという。

たとえば、 $\mathbb{Z}$ 上の単純ランダムウォーク、すなわち各時刻で右(+1)に行くか左(-1)に行くか、 $\frac{1}{2}$ の確率で選んで数直線上を動くランダムウォークは、再帰的であることが知られています。

同様に、 $\mathbb{Z}^d$ 格子上で、各時刻に隣接する $2d$ 個の頂点のうち一つを確率 $(2d)^{-1}$ で選んで動いていく d 次元単純ランダムウォークを考えると、 $d=1, 2$ のときに再帰的、 $d \geq 3$ のときに非再帰的であることが知られています。

再帰性は次のように特徴づけることもできます。

定理 1.2. ランダムウォークが再帰的であるのは、「ランダムウォークが出発点に戻る回数」の期待値が ∞ であるとき、かつそのときに限る。

二つのランダムウォークの衝突

同じ空間上に、それぞれランダムウォークをしている二つの点 X と Y があるとします。この二つの点「同時に」同じ頂点を訪れることを衝突と呼びます。

これらが時刻 n に w という頂点で出会ったとしましょう。この間、途中経過を列挙して、 X は $v, u_1, u_2, \dots, u_{n-1}, w$ という旅を、 Y は $v, u'_1, u'_2, \dots, u'_{n-1}, w$ という旅をしてきたとします。このとき、次のような道のりを考えてみましょう。まず、二つのランダムウォークが出発すると同時に、 X の動きを追跡します。そして時刻 n になって Y と衝突したら、今度は Y が時刻 n まで旅してきた道を逆にたどっていきます。すると、衝突からさらに時刻 n が経過したとき、すなわち時刻 $2n$ に、原点に戻ってきます。

どうやら、「二つのランダムウォークが時刻 n に出会う」という事象は、「ランダムウォークが時刻 $2n$ に戻ってくる」という事象と対応させられそうです。実際、 $\mathbb{Z}^d$ 上では「再帰的であること」と「 X と Y が無限回衝突すること」が一致します。

この観察は、 $\mathbb{Z}^d$ 以外の空間でも成り立つのでしょうか。すなわち、どんな空間においても、その「大きさ」がわかれば、ランダムウォークの衝突について判定が下せるのでしょうか。

これが本講義の中心となる問いです。

ランダムウォークの交差

衝突と似た現象として、ランダムウォークの交差を考えることができます。交差とは、二つの点 X と Y が「同じ、または異なる時刻に」同じ頂点を訪れることを言います。

$\mathbb{Z}^d$ 上の二つの独立な単純ランダムウォーク X と Y が交差する確率

$$P(X[0, \infty) \cap Y[0, \infty) \neq \emptyset),$$

は、 $d \leq 4$ のとき 1、 $d \geq 5$ のとき < 1 となることが知られています。「空間が広ければ起こりにくい」という点は原点への再帰性と同じですが、ランダムウォークの軌跡はある程度の広がりを持っているため、状態の“境目”となる次元（臨界次元）は異なります。

1.3 確率とは何か

確率と聞いて、身近に思い浮かぶものは「降水確率」でしょうか。高校の確率の問題ではよく「サイコロをふる」とか「カードを選ぶ」といった例が出てきます。賭けで勝てる確率に興味がある方もいらっしゃるかもしれません。

では、数学における確率とは何でしょうか？ それは：

- とりうるすべての状態（標本空間）例：一回サイコロを振って出る目は $\Omega := \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 。
- 起こりうる事象のリスト（ σ -加法族 $\mathcal{F}$ ）例：「出た目は偶数である」「3が出る」「4以上の目が出る」など、サイコロを1回振る場合には Ω の部分集合をすべて集めた集合族。
- 事象の確率を与える“関数”（確率測度 P ）例：サイコロの場合、 $P(k \text{ の目が出る}) = \frac{1}{6}$ が各 $k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ に対して成り立つ。

という三つの数学的対象の組 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ のことです³。この組を**確率空間**といいます。

唐突ですが、 Ω は、すべてを見通す神様の視点のようなものだと思ってみてください。我々に観察できるのは、この(特定の)世界 $\omega \in \Omega$ で何が起こるかということだけです。実際、一回サイコロを振ったら1から6のうちいずれか一つが出るということはわかりますが、我々が観測するのは一つの目(たとえば3)だけです。

そして我々が知りうるのは、それぞれの可能性がどの割合で起こりうるかということ(P)であり、特定のどの出来事が起こるかは予測不可能である、ということです。

とはいえ、物事の起こりやすさに関して、他にもわかる(あるいは、こういうことが成り立つというふうに取り決めたい)事柄はあります。それが、以下の三点です⁴。

- A という事象が起こりうるならば、 A でないという事象(A^c 、 A の余事象)も起こりうる。
- $A_1, A_2, \dots$ たちが起こりうるならば $\bigcup_n A_n$ も起こりうる(どれかは起こる、という事象を考えてよい)
- $A_1, A_2, \dots$ たちがそれぞれ互いに排反ならば、 $P\left(\bigcup_n A_n\right) = \sum_n P(A_n)$ が成り立つ。

確率論の用語

- 確率変数：各値をとる事象の確率を定めることができる関数。例：サイコロの場合、 $X = (\text{出た目を2で割った余り})$

確率変数の値の平均を期待値といい、 E で表すことが多いです。例：上記の X について、 $E(X) = \frac{1}{2}$ です。

- 独立：ある事象 A と B が独立であるとは、 $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ が成り立つことをいいます。

$P(A) \neq 0$ のとき、 $P(B | A) := \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$ を**条件付き確率**といいます。これは「 A が起こったとき、同時に B も起こっている割合」を表しています。 $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ ならば、この条件付き確率が $P(B)$ すなわち「全体に占める B が起こる事象の割合」に一致します。つまり、 A と B はお互いの発生確率に影響を及ぼさないといえます。

- 指示関数： A 上で1、 A^c 上で0をとる関数を A の指示関数といい、本講義ノートでは $\mathbf{1}_A$ 等で表します。

例：出た目が3の倍数である事象を A とします。また、 k の目が出たという状態(状態空間 Ω の元)を ω_k とします($\Omega = \{\omega_k : k = 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$)。このとき、 $\mathbf{1}_A(\omega_3) = 1, \mathbf{1}_A(\omega_5) = 0$ 。

また、 $A \in \mathcal{F}$ に対しては $E(\mathbf{1}_A) = P(A)$ が成り立ちます。

まずは、粒子の動く空間を与えましょう。本講義では、空間を離散的にとらえる見方を採用します。

³ P は厳密には測度と呼ばれるものです。 $P(\Omega) = 1$ となる測度を確率測度といいます。

⁴もっと数学的に厳密な議論は、測度論や確率論の入門書に整理されています。ぜひ参考文献等をご覧ください

定義 1.3 (グラフ). V を高々加算無限集合とする。また、 E を $V \times V$ の部分集合とする。このとき、 V と E の対 $G = (V, E)$ をグラフという。

要は「頂点と、それを結ぶ辺からなるもの」のことです。

下に例を挙げてみます。

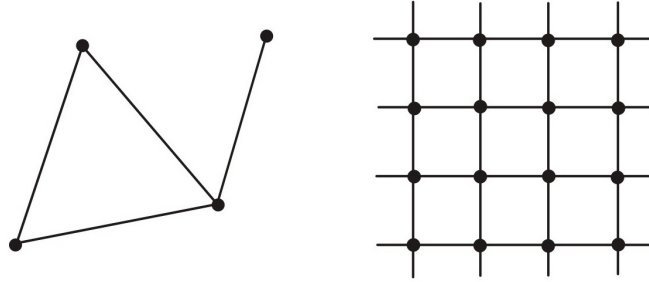


図 1: グラフの例

左は四つの頂点と四つの辺からなるグラフです。三角形と、別の一つの頂点が、一つの辺で結ばれています。右は $\mathbb{Z}^2$ の一部ですが、これも格子点を頂点、隣り合う点を辺で結んだグラフと考えることができます。また、同じ頂点集合に対して、辺集合として異なる集合を採用すれば、異なるグラフが得られます。

二つの頂点 v と w が辺で結ばれている、すなわち $(v, w) \in E$ のとき、 $v \sim w$ と書くことにします。また、以降、グラフ G の頂点集合、辺集合をそれぞれ明記するために $V(G)$ 、 $E(G)$ と書くことがあります。

注意 1.4. 本講義では、「無向・多重辺や自己ループをもたない・有界次数の・連結グラフ」を扱います。それぞれの意味は以下の通りです。

- 無向グラフ：辺に向きをつけない。他方、 (x, y) と (y, x) を向きの異なる辺として区別するグラフを有向グラフという。
- 多重辺：二つの頂点の間の二つ以上の辺を区別する。
- 自己ループ：起点と終点が同じ辺を考える。
- 有界次数：ある頂点を含む辺の数を次数といい、 $\deg(\cdot)$ で表す。すべての頂点 v について $\deg(v) < D$ を満たすような数 D が存在するとき、このグラフは有界次数グラフであるという。
- 連結：任意の二頂点 v と w に対し、それらを結ぶパス、すなわち頂点の有限列 $\{v = u_0, u_1, \dots, u_{n-1}, u_n = w\}$ で $u_{i-1} \sim u_i$ ($i = 1, \dots, n$) を満たすものが存在する。

では、いよいよランダムウォークを定義しましょう。

定義 1.5. グラフ G 上のランダムウォークとは、 V に値をとる確率変数の列 $X = (X_n)_{n \geq 0}$ であって、次のルールを満たすものをいう。

$$P(X_{n+1} = v \mid X_0 = u_0, X_1 = u_1, \dots, X_n = u_n) = p(u_n, v).$$

ただし関数 $V \times V$ 上の関数 p は、

$$p(u, v) = \begin{cases} > 0 & (u \sim v) \\ = 0 & (u \not\sim v) \end{cases}, \quad \text{および} \quad \sum_{v \in V, v \sim u} p(u, v) = 1,$$

を満たす。特に、 $p(u, v)$ が

$$p(u, v) = \frac{\mathbf{1}\{u \sim v\}}{\deg(u)},$$

で与えられる、すなわち各時刻ごとに隣の頂点を選ぶ確率が一樣であるランダムウォークを**単純ランダムウォーク** (simple random walk, SRW) という。

本講義では以下、基本的に単純ランダムウォークを扱います。

このルールの肝は「現在から見て、次の行動は『現在地と目的地』の情報によってのみ決まる。過去にどのような道を通ってきたかは関係ない⁵」ということです。

1.4 まとめ

本節のポイント：

- 本講義のテーマとなる、ランダムウォークの衝突という問題を取り上げた。
- 次元によるランダムウォークの振る舞いの違いを確認した。
- ランダムウォークに数学的な定義を与えた。

⁵過去が未来に影響を与えるランダムウォークもあります (elephant random walk など)。過去の影響の有無によって解析は本質的に異なります。

2 ランダムウォークの出会いやすさ

前回は、ランダムウォークとは何か、その問題意識はどういったものかについてお話ししました。また、ランダムウォークに関する事象を数式でどのように表すかをお話しし、衝突に関する事象を実際に書いてみました。

今回は、実際に衝突回数を計算してみましょう。

本節の問い：

- グラフが変化すると、その上のランダムウォークの衝突はどのように変化するか？
- グラフの広さはランダムウォークの衝突性を決定するか？

2.1 ランダムウォークの記述

その前に、前回紹介した確率の道具を使ってランダムウォークの挙動を記述する方法を整備しておきます。

ランダムウォークの定義より、出発点が一つ定まっているならば、その後のランダムウォークの挙動は推移確率 p の掛け合わせによって求めることができます。一方、始点が異なるランダムウォークに対しては、同じ事象が起こる確率も異なります。本講義では、ランダムウォークの法則（ある挙動に対してその確率を対応させる関数）は始点 v を明らかにして P_v と書きます。

また、二つ以上のランダムウォークを考える際も、それぞれの始点 v, w を明らかにして $P_{v,w}$ などと書きます。

次の話題に移る準備として、ランダムウォークがある事象を満たすとはどういうことか、はっきりさせておきましょう。前回、ランダムウォークは、 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ という確率空間の上の**確率変数の列**として決めました。すなわち、

全てのパラレルワールド $\Omega \ni$ ある世界線 ω

↓

$X_n(\omega)$ ：実際にその世界線でランダムウォークが時刻 n に訪れた頂点

$X(\omega)$ ：実際にその世界線で記録されたランダムウォークの動き

という対応関係があります。このとき、現に目に見える現象（原点に再び戻るとか、特定の点を訪れるとか） A を、我々が見ているランダムウォークが達成しているならば

$$X(\omega) \in A,$$

と書くことにします。我々が見ている世界線だけではなく、あらゆるパラレルワールドのうち、 A が起こる可能性全体は

$$\{\omega : X(\omega) \in A\},$$

と書けます。この確率は

$$P(\{\omega : X(\omega) \in A\}), \quad \text{または少し省略して} \quad P(X \in A),$$

と書きます。

マルコフ性

ランダムウォークには次のような性質があります。

マルコフ性

A_1 を時刻 n までの情報で発生の有無が判断できる事象、 A_2 を任意の事象とすると、

$$P_x(\theta_n(X) \in A_2 \mid X \in A_1) = E_x(P_{X_n}(A_2) \mid A_1),$$

が成り立つ。ただし θ_n は時刻を n だけ後ろへずらす、すなわち

$$\theta(\{a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}, \dots\}) = \{a_n, a_{n+1}, \dots\},$$

という作用素、 $E(\cdot \mid A)$ は条件付き期待値

$$E(X \mid A) = \frac{E(X \cdot \mathbf{1}_A)}{P(A)},$$

とする。

これは簡単に言うと「未来のことを考えるには、過去に起こったことは忘れて、今この瞬間から独立に考えればいい」ということを意味しています。

左辺は「時刻 n までに A_1 という事象が起こったとき、時刻 n 以降のランダムウォークに関して A_2 という事象が起こる」という条件付き確率です。

右辺の条件付き期待値の中身は $P_{X_n}(A_2)$ 、すなわち n 歩目に訪れた点 X_n から新しいランダムウォークを（当初の出発点が x だったことなど忘れて）始めたかのように考えて、そのランダムウォークが A_2 を満たす確率です。これは X_n というランダムな要素によって値が決まるので、確率変数です。それを、 A_1 が起こったという条件の下で平均したものが右辺です。

例で見てみましょう。

$P_x(X_{n+m} = w \mid X_n = v)$ すなわち「 n 歩目に v にいるという条件の下で、 $n+m$ 歩目には w にいる確率」を考えましょう。

$A_1 = \{X_n = v\}$ 、 $A_2 = \{X_m = w\}$ とします。マルコフ性より

$$P_x(X_{n+m} = w \mid X_n = v) = P_x(\theta_n(X)_m = w \mid X_n = v) = E_x(P_{X_n}(A_2) \mid A_1),$$

が成り立ちます。一方、右辺は

$$\frac{E_x(P_{X_n}(A_2) \cdot \mathbf{1}_{\{X_n=v\}})}{P(X_n=v)} = \frac{E_x(P_v(A_2) \cdot \mathbf{1}_{\{X_n=v\}})}{P(X_n=v)} = \frac{P_v(A_2)E_x(\mathbf{1}_{\{X_n=v\}})}{P(X_n=v)} = P_v(X_m = w),$$

でしたから、「過去 n ステップのことを忘れて、現在頂点 v から改めて出発したランダムウォークが、時刻 m に w に到達する確率」になります。

2.2 衝突回数と再帰性

前回お話しした通り、空間の広さがグラフの再帰性、すなわち特定の状態へ戻ってくるかどうかを決めるとお話ししました。直感的には、空間が広ければ二つのランダムウォークがばったり出会うことは珍しい事象で、空間が狭ければ頻繁に出会ってもおかしくない……と思えます。これをもう少し掘り下げてみましょう。

まず、今回以降のキーワードを定義します。 X と Y が時刻 n に衝突するという事象は

$$\{X_n = Y_n\},$$

と表せます。 X と Y が衝突する総回数を H とすると、指示関数を用いて

$$H = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{1}\{X_n = Y_n\},$$

と表せます。

定義 2.1 (無限回衝突性). グラフ $G = (V, E)$ 上の、二つの独立な単純ランダムウォーク X と Y について、任意の $v \in V$ に対して

$$P_{v,v}(H = \infty) = 1,$$

が成り立つとき、グラフ G は**無限回衝突性**をもつという。

前回4ページで見たように、再帰と衝突は関連付けることができそうです。しかし彼らは“ランダムウォーク”なので、どの道を通るか、何回衝突するかを直接調べることはできません。我々には、**「確からしさ=確率」**を計算することだけです。そこで、衝突回数そのものではなく、まずは**「期待値」**を求めてみましょう。

期待値の関係

以降、出発点はグラフ上に一点定め、名前を o とします。ここで先ほどの「二つのランダムウォークが時刻 n に会う」と「ランダムウォークが時刻 $2n$ に戻ってくる」という対応を当てはめると、

$$D^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} P_o(X_{2n} = o) \leq E_{o,o}(H) \leq D \sum_{n=0}^{\infty} P_o(X_{2n} = o), \quad (2.1)$$

となり、偶数時刻に o に戻ってくる確率の和で上下から評価することができます。ここで、 D は G の次数の上界です。厳密な変形、なぜ D が出てくるのかといったことは、この節の補足をご覧ください。

右辺の和がすべての時刻の和で上からおさえられることは明らかです。左辺についても、この節の補足より、ある定数 c を掛けて

$$cD^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} P_o(X_n = o) \leq E_{o,o}(H) \leq D \sum_{n=0}^{\infty} P_o(X_n = o), \quad (2.2)$$

を得ることができます。

衝突回数が無限になるとき

前項で、“単純ランダムウォークに関して”、“グラフの頂点の次数が有界ならば”、ランダムウォークの衝突回数の**「期待値」**は無限大になることが示せました。では、実際に**「確率1で無限回衝突する」**のはどのような場合でしょうか？

一つの例として、再帰的かつ**「グラフが推移的である」**場合には、無限回衝突性が成り立つことが証明できます。

定義 2.2. グラフ G の任意の二頂点 a, b に対し、次を満たす全単射 $\phi : V \rightarrow V$ が存在するとき、 G は推移的であるという。

1. $\phi(a) = b$,
2. $v \sim w \iff \phi(v) \sim \phi(w)$.

つまり、推移性とは、グラフ上のどの頂点から見てもグラフが同じ構造をもっているということです。第一回のグラフの例では $\mathbb{Z}^2$ の全体が推移的なグラフになっています。

命題 2.3. 再帰的かつ推移的なグラフは無限回衝突性をもつ

証明は次節で行うことにします。

衝突回数が無限にならないとき

一方、「再帰的」かつ「推移的でない」グラフ上では、衝突回数が確率 1 で有限回になる例が知られています。この例を報告したのは Krishnapur–Peres (2004) です。どんなグラフなのか見てみましょう。

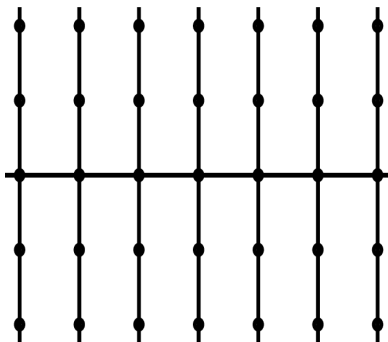


図 2: グラフ $\text{Comb}(\mathbb{Z})$ [6] より引用

垂直方向のパスはどこまでも無限に続いています。 $\mathbb{Z}^2$ と見比べてみると、 x 軸以外の水平方向の辺がすべて取り除かれています。くしのような形をしているので、コーム、あるいは $\text{Comb}(\mathbb{Z})$ ⁶ と呼ばれています。

$\mathbb{Z}^2$ では左右を自由に行き来できる一方、このグラフでは x 軸の高さまで下りて（上がって）来なければ、左右に移動することはできません。もし二つのランダムウォークが、一旦ばらばらな方向へ進み始めたら、衝突するためにはまずくしの中の同じ「歯」に滞在していなければいけません、その可能性も非常に低いということです。

2.3 命題 2.3 の証明

証明. Step 1. X と Y の衝突回数 H が特定の分布に従うことを示します。まず、次のように（ランダムな）時刻 T_n を定義します。

$$T_n = \inf \left\{ k : \sum_{i=0}^k \mathbf{1}\{X_i = Y_i\} = n + 1 \right\}$$

⁶ くしの胴にあたる部分が x 軸 $= \mathbb{Z}$ であるため。

つまり、 T_n は $(n+1)$ 回目の衝突が起こった時刻です。すると、

$$\begin{aligned} P_{o,o}(H > m+n) &= P_{o,o}(H \geq m+n+1) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{v \in V} P_{o,o}(T_n = k, X_k = Y_k = v, H \geq m+n+1). \end{aligned} \quad (2.3)$$

と変形できます。時刻 k でランダムウォークたちの挙動を条件づけましょう。

- (i) $\{T_n = k\}$ 、すなわち時刻 k にちょうど $(n+1)$ 回目の衝突が起こるかどうか、そして $\{X_k = Y_k = v\}$ 、すなわち X と Y が時刻 k に v にいるかどうかは、時刻 $0, 1, \dots, k$ の状態のみによって決まり、未来とは独立である。
- (ii) 「時刻 k に頂点 v でちょうど $(n+1)$ 回目の衝突が起こった」と知った状態なら、「最終的に $m+n+1$ 回以上の衝突が起こるかどうか」は、時刻 $k+1$ 以降の動きによって決まる。

よって、マルコフ性より

$$P_{o,o}(T_n = k, X_k = Y_k = v, H \geq m+n+1) = P_{o,o}(T_n = k, X_k = Y_k = v)P_{v,v}(H \geq m+1),$$

が得られます (H は開始時刻での衝突を含むことに注意)。 G が推移的であることから、

$$P_{o,o}(T_n = k, X_k = Y_k = v, H \geq m+n+1) = P_{o,o}(T_n = k, X_k = Y_k = v)P_{o,o}(H \geq m+1)$$

となり、これを (2.3) に戻すと

$$P_{o,o}(H > m+n) = P_{o,o}(T_n < \infty)P_{o,o}(H \geq m+1) = P_{o,o}(H > n)P_{o,o}(H > m),$$

が得られます。このような等式がなりたつ確率変数は、幾何分布と呼ばれる分布に従います。

Step 2. 上の等式から特に

$$P_{o,o}(H > n) = P_{o,o}(H > 1)^n \quad (2.4)$$

が従い、これを満たす離散確率変数 H の期待値は

$$E_{o,o}(H) = \frac{1}{1 - P_{o,o}(H > 1)}$$

で得られることもわかります。いま、左辺は無限大でしたので $P(H > 1) = 1$ となり、(2.4) より任意の自然数 n に対して $P(H > n) = 1$ が得られます。確率測度の上からの連続性⁷より、 $P(H = \infty) = 1$ が成り立つことがわかります。 $\square$

2.4 まとめ

本節のポイント：

- ランダムウォークは、過去と未来を独立に考えることができる。これはランダムウォークの解析において重要な役割を担っている。
- ランダムウォークの衝突は、空間の広さ（再帰性・非再帰性）だけでなく、空間のつながり方にも影響を受ける

⁷確率測度 P と事象の列 $A_1 \supset A_2 \supset \dots$ に対して次の極限が成り立つという性質です： $P(A_i) \downarrow P(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i)$.

2.5 補足

式(2.1)の証明

証明. X と Y が点 o から出発したとき、期待値は

$$\begin{aligned} E_{o,o}(H) &= E_{o,o} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{1}\{X_n = Y_n\} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} E_{o,o}(\mathbf{1}\{X_n = Y_n\}) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P_{o,o}(X_n = Y_n), \end{aligned}$$

と変形できます⁸。さらに、時刻 n で X と Y が出会う頂点を考え、独立性を使うことで

$$\begin{aligned} E(H) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{v \in V} P_{o,o}(X_n = Y_n = v) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{v \in V} P_o(X_n = v) P_o(Y_n = v) \end{aligned}$$

が得られます。

ランダムウォークの始点を取り換えるために、遷移確率について

$$\frac{P_v(X_n = w)}{\deg(w)} = \frac{P_w(X_n = v)}{\deg(v)},$$

が成り立つことに注意します（一ステップごとの遷移確率を掛けあわせて確かめることができます）。すると、

$$\begin{aligned} E(H) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{v \in V} P_o(X_n = v) P_v(Y_n = o) \frac{\deg(v)}{\deg(o)} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{v \in V} P_o(X_n = v, X_{2n} = o) \frac{\deg(v)}{\deg(o)} \end{aligned}$$

と表すことができます。二つ目の等号ではランダムウォークのマルコフ性を用いました。グラフに関する連結性と次数の有界性の仮定から、

$$D^{-1} \leq \frac{\deg(v)}{\deg(o)} \leq D,$$

が従うので、(2.1) が得られます。 □

式(2.2)の証明

$\sum P_o(X_{2n} = o) = \infty$ の場合は各辺 ∞ となって成り立ちます。そうでない場合について、まずマルコフ性より

$$P_o(X_{2n+1} = o) = \sum_{x \in V} P_o(X_n = x) P_x(X_{n+1} = o),$$

が成り立ちます（これをチャップマン–コルモゴロフ方程式といいます）。さらに、コーシー–シュワルツの不等式

⁸期待値と無限和の順序交換は、指示関数が非負であることより保証されます

コーシー–シュワルツの不等式

数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ に対して $\sum a_n^2 < \infty, \sum b_n^2 < \infty$ が成り立つならば

$$\sum a_n b_n \leq \left(\sum a_n^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum b_n^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

に先ほどの式を代入し、さらに上で式 (2.1) を示したのと同様の議論を適用することで

$$\begin{aligned} P_o(X_{2n+1} = o) &\leq \left(\sum_{n=0}^{\infty} P_o(X_n = o)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=0}^{\infty} P(X_{n+1} = o)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq D \sqrt{P_o(X_{2n} = o) P_o(X_{2n+2} = o)} \\ &\leq \frac{D}{2} (P_o(X_{2n} = o) + P_o(X_{2n+2} = o)), \end{aligned}$$

を得ます (最後の不等式は相加・相乗平均の関係より)。よって

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} P_o(X_n = o) &= \sum_{n=0}^{\infty} P_o(X_{2n} = o) + \sum_{n=0}^{\infty} P_o(X_{2n+1} = o) \\ &\leq (1 + D) \sum_{n=0}^{\infty} P_o(X_{2n} = o) - \frac{D}{2}, \end{aligned}$$

が成り立つので、 $c = (1 + D)^{-1}$ とすればよいことがわかります。

□

3 複雑な図形の上のランダムウォーク

前回、再帰的かつ推移的なグラフ上では、二つの独立なランダムウォークは無限回衝突するということを見ました。また、再帰的なグラフであっても有限回しか衝突しない例も紹介しました。では、再帰的なグラフは「推移的でなければ無限回衝突性をもたない」のでしょうか。

本節の問い：

- 一般のグラフに対して、どのように衝突性を判定できるか？

3.1 再帰的なグラフ上の 0-1 法則

ここまで、「確率 1 で無限回衝突するなら、それはグラフに“無限回衝突性がある”と言える」と話してきました。実は、再帰的なグラフであれば、次が成り立ちます。

命題 3.1. G を連結で再帰的なグラフ、 X と Y は G 上の独立なランダムウォークとする。このとき、どんな $a, b \in G$ に対しても、 $P_{a,b}(Z = \infty) \in \{0, 1\}$ が成り立つ。

つまり、無限回衝突が正の(つまり、0でない)確率で起こるならば、実は確率 1 で起こる、ということです。証明には確率論の準備が必要なのでここでは行いませんが、再帰的なグラフの上のランダムウォークは「同じ状態に何度も戻ってくる」のに対し、非再帰的なグラフはそうではない、ということが鍵になっています。

3.2 Barlow–Peres–Sousi の判定法

前回、ランダムウォークの再帰回数と衝突回数の関係をお話ししました。そこで用いた再帰回数の期待値には、より一般の形式に対して**グリーン関数**という名前がついています。今回用いる類似の形式と合わせて、以下のように表します。

定義 3.2. (i) 二点 x, y に対して、

$$G(x, y) = E^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{1}(X_n = y) \right),$$

すなわち x を出発したランダムウォークが y を訪れる回数の期待値として定まる関数を、**グリーン関数**という。また、

$$g(x, y) = \frac{G(x, y)}{\deg(y)},$$

を**グリーン核**という。

(ii) $A \subset V$ (頂点集合) に対し、

$$\tau_A = \inf \{n : X_n \in A^c\},$$

によって、集合 A を最初に離れる時刻を表す^a。このとき、

$$G_A(x, y) = E^x \left(\sum_{n=0}^{\tau_A} \mathbf{1}(X_n = y) \right); \quad g_A(x, y) = \frac{G_A(x, y)}{\deg(y)},$$

と定める。特に $x, y \in A$ のとき、 y を訪れる回数を、 A を離れるまでの間だけ数えた回数の期待値を表す。

^ainf は下限 (infimum) を表す記号です。馴染のない方は “最小値を一般化したもの” と思っていただければと思います。

これを用いてグラフ上の無限回衝突性の判定基準を与えたのが、Barlow–Peres–Sousi という三人の数学者です。

定理 3.3 ([1], Theorem 3.1). G を再帰的なグラフとし、一点 o を固定する。 $\{B_r\}$ を、 G に含まれているグラフからなる列で、 $\bigcup B_r = G$ を満たすものとする^a。以下の条件が満たされるとき、グラフ G は無限回衝突性をもつ：

ある $C < \infty$ が存在して、すべての r とすべての $x \in B_r$ に対して

$$g_{B_r}(x, x) \leq C g_{B_r}(o, o). \quad (3.1)$$

^aたとえば $\mathbb{Z}^2$ に対して $B_r = [-r, r]^2$ など

説明. 命題 3.1 より、正の確率で衝突回数が無限大になることを言えばよいです。以下の不等式もちいます。

Paley–Zygmund 不等式

確率変数 $Z \geq 0$ が $E(Z^2) < \infty$ を満たすとき、 $\theta \in [0, 1]$ に対して

$$P(Z \geq \theta E(Z)) \geq (1 - \theta)^2 \frac{E(Z)^2}{E(Z^2)},$$

が成り立つ。

$H_{B_r} := \sum_{n=0}^{\tau_{B_r}} \mathbf{1}\{X_n = Y_n\}$ によって、球 B_r を出るまでの衝突回数を定めます。この確率変数に対して $E_{o,o}(H_{B_r})$ と $E_{o,o}(H_{B_r}^2)$ を計算し、上式に代入します。

$E_{o,o}(H_{B_r})$ はすでに第二回の補足で一度計算したものを応用して、

$$E_{o,o}(H_{B_r}) \geq c g_{B_r}(o, o),$$

とすることができます。一方、 $E_{o,o}(H_{B_r}^2)$ はマルコフ性などを用いると

$$E_{o,o}(H_{B_r}^2) \leq E_{o,o}(H_{B_r}) \left(1 + D \max_{x \in B_r} g_{B_r}(x, x) \right),$$

と評価することができます ($H_{B_r}^2$ を展開すると、 H_{B_r} という “一度以上衝突する” 回数と、 “二度以上衝突する” 回数の和であることがわかります)。

これらを Paley–Zygmund 不等式に代入して、さらに仮定 (3.1) が成り立っているとすると、

$$P_{o,o} \left(H_{B_r} \geq \frac{1}{2} E_{o,o}(H_{B_r}) \right) \geq c',$$

となる、 r によらない定数 $c' > 0$ が存在します。仮定より $H \geq H_{B_r}$ ですから、

$$P_{o,o} \left(H_{B_r} \geq \frac{1}{2} E_{o,o}(H_{B_r}) \right) \geq c',$$

となり、 $r \rightarrow \infty$ とすると $E_{o,o}(H_{B_r}) \rightarrow \infty$ より、 $P(H = \infty) \geq c' > 0$ が得られます。□

3.3 ランダムウォークと電気回路

グリーン核は、グラフの図形的な意味でのかたちと深く結びついています。そのカギとなるのが、電気回路です。

推移確率が $p(\cdot, \cdot)$ という関数で与えられているランダムウォークに対して、

$$x \sim y \implies \pi(x)p(x, y) = \pi(y)p(y, x), \quad (3.2)$$

$$\pi(x) > 0, \quad x \in V, \quad (3.3)$$

を満たす V 上の関数 π が存在するとします。このとき、

$$c(x, y) = \pi(x)p(x, y)(= \pi(y)p(y, x)); \quad r(x, y) = c(x, y)^{-1},$$

と定めることで、グラフ上のランダムウォークを「辺 (x, y) を値が $r(x, y)$ の電気抵抗と見なす電気回路」と対応させます。逆に、

$$\pi(x) = \pi(x) \sum_{y \sim x} p(x, y) = \sum_{y \sim x} c(x, y),$$

より

$$p(x, y) = \frac{c(x, y)}{\pi(x)} = \frac{c(x, y)}{\sum_{y \sim x} c(x, y)},$$

となりますから、グラフ上のランダムウォークは各辺の（抵抗の逆数である）電気の通りやすさに比例した推移確率をもつ、という対応もついています。

エネルギーと有効抵抗

以下、しばらく高校物理の電磁気の分野のお話になります。 V の空でない部分集合 A と B ($A \cap B = \emptyset$) をとり、（電気回路と見なして） A の頂点を電源の+の端子に、 B の頂点を-の端子につなぐものとします。電源の電圧は1としておきましょう。すなわち、関数 v は A 上で1、 B 上で0をとります。このとき、各頂点 x での電位を $v(x)$ 、辺 (x, y) を x から y の向きに流れる電流の値を $i(x, y)$ と表すことにします。

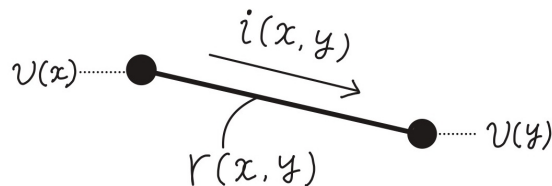


図 3: 電位 v 、電流 i 、抵抗 r

電流は次の二つの法則を満たします。

- **オームの法則**: 電流は電圧に比例し、抵抗に反比例する。 $v(x) - v(y) = i(x, y) \cdot r(x, y)$.
- **キルヒホッフの法則**: 一点への電流の流入量と流出量は等しい。 $\sum_{y \sim x} i(y, x) = 0$.

第二式に第一式を代入して各辺を整理すると、

$$\sum_{y \sim x} v(y) p(x, y) - v(x) = 0, \quad (3.4)$$

を得ます。この等式を満たす V 上の関数 v を**調和関数**といいます。

さて、電気回路を電源につなぐと、抵抗で電気エネルギーが発生します。回路全体のエネルギーは

$$\frac{1}{2} \sum_{\substack{x, y \in V \\ x \sim y}} (v(x) - v(y))^2 c(x, y),$$

で表すことができます。一般に、 V 上の関数 f, g に対して

$$\mathcal{E}(f, g) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{x, y \in V \\ x \sim y}} (f(x) - f(y))(g(x) - g(y)) c(x, y),$$

と定めると、電位 v をおいたときの**エネルギー**は $\mathcal{E}(v, v)$ と表されます。さらに、 V 上の関数の集合 H を

$$H = \{f : \mathcal{E}(f, f) < \infty\},$$

すなわちエネルギーが有限となる関数全体の集合として定めます。

このとき、次のことが成り立ちます。

命題 3.4. A 上で1、 B 上で0をとる任意の V 上の関数 $f \in H$ に対して

$$\mathcal{E}(f, f) \geq \mathcal{E}(v, v),$$

となる関数 $v \in H$ がただ一つ存在する。さらに、この v は (3.4) を満たす。

つまり、電流は電気エネルギーを最小にするように流れていく、ということです。この命題の証明は参考書 [10] をご覧ください。

さて、オームの法則より「単位電圧に対して流れる電気エネルギーの量は抵抗の逆数」となっていますから、回路を一つの電気抵抗として見てたときの**有効抵抗**は次のように定めることができます。

定義 3.5. V の空でない部分集合 A と B ($A \cap B = \emptyset$) に対し、 A と B の間の有効抵抗 $R(A, B)$ を

$$R(A, B)^{-1} = \inf\{\mathcal{E}(f, f) : f \in H, f|_A = 1, f|_B = 0\},$$

と定める^a。

^a $f|_A = 1$ は f を A 上の関数としてみたときに、1のみをとる定数関数であることを表します。

単純ランダムウォークでは、(3.2)、(3.3) を満たす関数 π としてグラフの頂点の次数 $\deg$ をとることができますので、以下では対応する電気回路は各辺に抵抗値が1の抵抗、すなわち単位抵抗をおいた回路として考えていきます。

グリーン核と有効抵抗

さて、この3.3節の冒頭では、グリーン核と有効抵抗が結びついていると予告しました。ここである有限集合 $B \subset V$ と、その中の一点 $x \in B$ に対して、「 x と B^c (B の外側) の間の有効抵抗」を考えてみましょう。定義3.5より、

$$R(x, B^c)^{-1} = \inf\{\mathcal{E}(f, f) : f \in H, f(x) = 1, f|_{B^c} = 0\},$$

と表されました。さらに、 B が有限集合である場合には、

- 式(3.4)を満たし、
- $f(x) = 1, f|_{B^c} = 0$ が成り立つ、

という関数は一つしかありません⁹。実は

$$f(y) = \frac{g_B(x, y)}{g_B(x, x)},$$

という関数を考えると、 $f(x) = 1, f|_{B^c} = 0$ であり、さらに f が $B \setminus \{x\}$ 上で調和であることがグリーン核の定義より従います。さらに、 B^c 上で0である関数 h に対して

$$\mathcal{E}(g_B(x, \cdot), h) = h(x),$$

となることも、グリーン核の定義より確かめられます。よって、

$$R(x, B^c) = \mathcal{E}(h, h)^{-1} = g_B(x, x),$$

が得られました。

3.4 判定法の適用例

Krichnapur–Peres のグラフ再考

前回、 $\text{Comb}(\mathbb{Z})$ というグラフ上では確率1で有限回衝突となることをお話ししました。一方、 $\mathbb{Z}$ を“歯”の高さが0のコームだと見なすこともできますが、 $\mathbb{Z}$ は再帰的かつ推移的なグラフなので、無限回衝突性を持ちます。では、高さを0から徐々に増していけば、どこかで無限回衝突性を失うのではないのでしょうか。

Barlow–Peres–Sousi は、定理3.3を用いて答えを与えました。まず、 $\text{Comb}(\mathbb{Z}, f)$ を、 $\text{Comb}(\mathbb{Z})$ の部分グラフで、

- 頂点集合が $V(f) := \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 : 0 \leq y \leq f(x)\}$ であり、
- 辺集合が $\{(x, y) \in V(f) \times V(f) : (x, y) \in E(\text{Comb}(\mathbb{Z}))\}$

であるもの、すなわち「座標が $0 \leq y \leq f(x)$ を満たす点のみからなるもの」を考えます。このとき、次が示されています。

定理 3.6 ([1], Theorem 1.6). $\alpha \leq 1$ のとき、 $\text{Comb}(\mathbb{Z}, |\cdot|^\alpha)$ は無限回衝突性をもつ。一方、 $\alpha > 1$ のとき、 $\text{Comb}(\mathbb{Z}, |\cdot|^\alpha)$ 上の衝突回数は確率1で有限である。

⁹ B が有限集合であるという仮定が、最初に配布した講義ノートでは抜け落ちていました。 B が有限集合でない場合の反例については、たとえば [7] の Example 4.1.3 を参照してください。

この主張の前半は、 $B_r = \{(x, y) \in V(|\cdot|^\alpha) : x \leq r\}$ ととり、原点および $x \in B_r$ から B_r^c の外側までの有効抵抗を比較することで、定理 3.3 を使って証明することができます¹⁰。

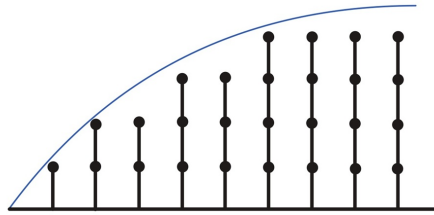


図 4: グラフ $\text{Comb}(\mathbb{Z}, f)$ の例。グラフ（曲線）の下側の頂点のみを含む。

フラクタル上のランダムウォーク

自然界には「規則性のある整然としたかたち」だけでなく、「ランダムで複雑なかたち」も多数見られます。たとえば雲や海岸線は、一部を拡大しても全体と似た形に見える（自己相似性）、どれだけ拡大しても単純な図形にならない、という構造を持つ自然現象の代表例です。

こうした図形を扱う概念として、Mandelbrot により**フラクタル**が導入されました。フラクタル的な構造を近似するグラフのうちいくつかは、有効抵抗の挙動がよく調べられているので、Barlow–Peres–Sousi の判定法を適用することができます。この方法で、無限回衝突性を示すことができる例には、シェルピンスキーのガスケット、コッホ曲線、ヴィチェックのスノーフレイクなどがあります。

3.5 まとめ

本節のポイント：

- ランダムウォークの衝突を、グリーン核を用いて判定する方法が知られている。
 - 離散調和解析を通して、解析的な量と図形的な性質を結びつけることができる。
- ランダムウォークの衝突も、図形的な性質を手掛かりに調べることができる。

¹⁰後半は実際に衝突回数を計算することで証明されますが、前半ほど簡単ではないので、ここでは省略します

4 衝突に関する新たな問い

第1節では、ランダムウォークとは何か、ランダムウォークについてどういった問題が考えられているのかということをお話ししました。第2節では、グラフの再帰性から出発して、無限回衝突の一番シンプルな十分条件、そしてランダムウォークの衝突が本格的に研究される端緒となった Comb グラフを見てきました。第3節では、より一般のグラフに適用できる無限回衝突の判定条件について、数式を用いて説明しました。

本節では、最近の進展や、ランダムウォークの衝突に関してまだ明らかになっていない事柄を紹介します。

本節の問い：

- ランダムウォークの衝突について、研究者はどういった問題を考えているのか。今後どのような展望があるのか。

4.1 ランダムグラフ上のランダムウォーク

複雑なかたちの数理モデルとしてフラクタルを紹介しましたが、ランダムグラフもそうしたモデルの一つに数えられます。統計物理学の分野でも、物質のミクロな状態がランダムに決まるモデルの研究が進められています¹¹。こうしたランダムなモデルは、フラクタル的な振る舞いを示すことがあり、両者は深く関連しています。そんな「ランダムで複雑なかたち」の上の解析は、近年盛んに研究されているトピックのひとつです。

ここまでお話ししてきた通り、確率論における解析とは「特定の頂点がいまどのような状態にあるか」ということを知ることはできません。では、ランダムなグラフのかたちはどのように測ればよいのでしょうか。どのような条件が揃えば、「そのランダムなグラフは無限回衝突性をもつ」と判定できるのでしょうか。

二重のランダム性

たとえば、グラフ上のランダムウォークの軌跡も一つのランダムグラフと見なせます。

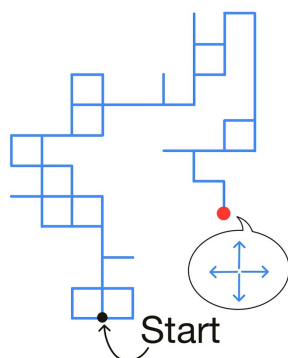


図 5: ランダムウォーク

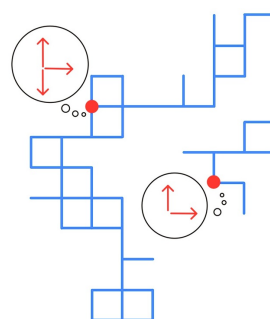


図 6: ランダムウォーク上のランダムウォーク

¹¹興味をもたれた方へのキーワード：パーコレーション、イジング模型、スピングラス、フラクタルなど

ランダムウォークを定める確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を明示しておきましょう。このとき、一つのサンプル $\omega \in \Omega$ に対して、

$$V(\omega) = \{v \in V : \text{ある } n \text{ に対して } v = S_n\}$$

$$E(\omega) = \{(v, w) \in E : \text{ある } n \text{ に対して } (v, w) = (S_n, S_{n+1})\}$$

と定めると、連結で（元のグラフ G が有界次数ならば）有界次数の、一筆書きのグラフ $G(\omega) := (V(\omega), E(\omega))$ が得られます。すると、この $G(\omega)$ の上のランダムウォーク X^ω, Y^ω を考え、それらが確率1で無限回衝突するかどうかを考えることができます。

もし“ X^ω と Y^ω が確率1で無限回衝突する”、すなわち“ $G(\omega)$ が無限回衝突性をもつ”という事象が、軌跡を定めるランダムウォークに関して確率1で成り立つならば、「無限回衝突性という性質は、 G というランダムグラフがいつも満たすものだ」と考えることができます。このように、ランダムグラフに対して確率1で成り立つ性質や、定量的な評価を得ることは、「ランダムで複雑なかたち」を解析するうえで重要な問題の一つです。

ランダムグラフ上の衝突性の判定

ランダムグラフ上の無限回衝突性の十分条件として、前回紹介した Barlow–Peres–Sousi の判定法（定理 3.3）は、ランダムグラフに適用できる形が同論文 [1] で導出されています。また、Hutchcroft–Peres [6] は、「再帰的かつ推移的」という十分条件をランダムグラフに翻訳した判定法を示しました。

実際にどのようなランダムグラフがこれらの条件を満たしているか、講義中に時間の許す限りお見せしたいと思います。

4.2 三つのランダムウォークの衝突

三つのランダムウォークの衝突についても、二つの場合と同様に考えることができます。すなわち、三つの独立なランダムウォーク X, Y, Z が同時に同じ頂点を訪れる回数

$$\tilde{H} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{1}\{X_n = Y_n = Z_n\},$$

が確率1で無限大になるかどうかを考えます。

前回登場した Comb を考えると、高さ 0 のとき、すなわち $\mathbb{Z}$ は、三つのランダムウォークに関する無限回衝突性をもちます。一方、高さが x^α ($\alpha > 1$) 以上のときには、有限回衝突性を（二つに対してもつので）三つのランダムウォークに関するももちます。では、ちょうど性質が切り替わる点はどこにあるのでしょうか。

Croydon–De Ambroggio [2] によると、この相転移は高さの関数として $(\log x)^\alpha$ を見ると観測することができます。グラフ $\text{Comb}(\mathbb{Z}, (\log |x|)^\alpha \vee 0)$ は、 $\alpha \leq 1$ のときには三つのランダムウォークに関する無限回衝突性を持ち、 $\alpha > 1$ のときには有限回衝突性をもつことが知られています。講義内では、時間が許せば、ランダムグラフ上の三つのランダムウォークに関する最近の研究 [3] についてもお話しします。

4.3 これからの課題

最後に、ランダムウォークの衝突に関する展望、今後期待される発展を述べたいと思います。

1. 三つ以上のランダムウォークの衝突に関する研究はまだ始まったばかりです。二つのランダムウォークの場合の「再帰性」や「推移性」、各種十分条件のような、グラフのこういった特徴が三つのランダムウォークの無限回衝突性に本質的に関わっているか、ということはまだ解明されていません。
2. ランダムウォークが無限回衝突するか、しないかという、白黒つけられる性質を判定する(定性的な結果)のほかに、ランダムウォークの衝突回数をグラフの半径や経過時間と関連付けて評価する(定量的な評価)という方向性もあります。一般に、定量的な評価を行うためにはグラフの形状に関する詳細な情報が必要であり、難易度がグラフ自体の解析の行いやすさにも依存します。
3. (二つ、または三つの)ランダムウォークの無限回衝突に関する必要条件はほとんどわかっていません。有限回衝突が示されたグラフでは、「そのグラフに固有の性質を活かした方法」で計算が行われており [4, 6]、一般のグラフに対する基準 (Barlow–Peres–Sousi や Hutchcroft–Peres の十分条件のような) は得られていません。

4.4 まとめ

本節のポイント：

- ランダムで複雑な構造の上でのランダムウォークの研究も盛んに行われている。
- ランダムウォークの衝突がグラフの何を特徴づけているのか、の解明には、さらなる研究がまたれる。

参考文献

- [1] M. T. Barlow, Y. Peres and P. Sousi, Collisions of random walks, Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat. **48** (2012), no. 4, 922–946
- [2] D. A. Croydon and U. De Ambroggio, Triple collisions on a comb graph, Electron. J. Probab. **30** (2025), Paper No. 130
- [3] D. A. Croydon, D. Shiraishi, S. Watanabe Collision properties of the four-dimensional random walk trace, arXiv:2605.30755
- [4] U. De Ambroggio, M. Nitzschner, C. Scali, Collisions of random walks on comb graphs with a planar base, arXiv:2508.19814
- [5] T. Hutchcroft and Y. Peres, Collisions of random walks in reversible random graphs, Electron. Commun. Probab. **20** (2015), no. 63
- [6] M. Krishnapur and Y. Peres, Recurrent graphs where two independent random walks collide finitely often, Electron. Comm. Probab. **9** (2004), 72–81

- [7] T. Kumagai, *Random walks on disordered media and their scaling limits*, Lecture Notes in Mathematics École d'Été de Probabilités de Saint-Flour, 2101, Springer, Cham, 2014

ランダムウォークに関する読み物や入門的な教科書など

- [8] B. Hayes, 川辺 治之 訳, 数学そぞろ歩き — 学者だけに任せておくには楽しすぎる数学余話— 共立出版, 2020
- [9] J. Klafter, I. M. Sokolov, 秋元 琢磨 訳, ランダムウォーク はじめの一步 — 自然現象の解析を見すえて— 共立出版, 2018
- [10] 熊谷 隆, 確率論, シリーズ・新しい解析学の流れ, 共立出版, 2003
- [11] 佐藤 坦, はじめての確率論 測度から確率へ, 共立出版, 1994