数学入門公開講座

昭和55年７月29日（火）から８月７日（木）まで

時間＼日	7月 29日（火）	30日（水）	31日（木）	8月 1日（金）	2日（土）	3日（日）	4日（月）	5日（火）	6日（水）	7日（木）
13:15～14:45	数値計算の落し穴（一松）						地底の物体の形について（松浦）			
14:45～15:00	休憩						休憩			
15:00～16:30	電気振動の話（上田）						流体の数理（後藤）			

京都大学数理解析研究所

講師及び内容

1. 数値計算の落し穴（6時間）

京都大学数理解析研究所教授　一　松　　信

電子計算機の発展により、かつては大変だった計算が容易にできるようになった。しかし電子計算機はブラック・ボックスであり、扱える数値の範囲の制限などの理由により、機械的な計算を不用意に進めると、とんでもない結果になることが多い。この講義では必要に応じて電卓を使って、その種の実例を示し、数値計算の結果の精度保証が意外に困難であることを解説する。

2. 電気振動の話（6時間）

京都大学工学部助教授　上　田　晥　亮

社会生活と密接に結びついた電力や通信システムの基礎となる電気・電子回路における振動現象の数理について初等的な解説を試みる。

3. 地底の物体の形について（6時間）

京都大学数理解析研究所教授　松　浦　重　武

上記表題のもとに、直観的な立体図形（および平面図形）の問題について解説する。

4. 流体の数理（6時間）

京都大学数理解析研究所助教授　後　藤　金　英

流体とは気体・液体を理想化した連続体である。この講義では、流体の力学において数学がどのように用いられ、又流体力学が数学にどのような影響を与えたか、数学と流体力学の関りあいを、出来るだけ平易な例題を用いて紹介したい。

時　間　割

日／時間	7月29日（火）	30日（水）	31日（木）	8月1日（金）	2日（土）	3日（日）	4日（月）	5日（火）	6日（水）	7日（木）
13:15～14:45	数値計算の落し穴（一松）						地底の物体の形について（松浦）			
14:45～15:00	休　憩						休　憩			
15:00～16:30	電気振動の話（上田）						流体の数理（後藤）			

4. 流 体 の 数 理

講 師 ： 後 藤 金 英

期 間 ： 昭和５５年８月４日～７日

時 間 ： １５：００～１６：３０

流体の数理

後藤金英

§1. 流体力学の基礎方程式(非圧縮粘性流体の場合)

連続の式(質量保存則)

$$\mathrm{div}\,\mathfrak{u} = 0. \tag{1.1}$$

運動方程式(運動量保存則)　N-S方程式

$$\frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial t} + (\mathfrak{u}\cdot \mathrm{grad})\mathfrak{u} = -\frac{1}{\rho}\mathrm{grad}\,p + \nu \Delta \mathfrak{u}. \tag{1.2}$$

非圧縮性：密度 ρ ＝一定,

粘性：流れの速度 $\mathfrak{u}[u, v, w]$ が空間的に変化していると，流体中に速度勾配に関係した力(接線応力)が働く。この性質を流体の粘性という。

p：圧力，t：時間，ν：動粘性係数(定数)。

$$\mathrm{div}\,\mathfrak{u} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}, \qquad \mathrm{grad} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right),$$

$$(\mathfrak{u}\cdot \mathrm{grad}) = u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y} + w\frac{\partial}{\partial z}, \qquad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

[式の導出(スライド), cf Newton力学]

やさしい厳密解(一方向の定常流れ)

$$\mathfrak{u} = [u, 0, 0]$$

(1.1)　$\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0 \longrightarrow u = u(y, z)$

簡単のため z に無関係とする(二次元流)。

$$(1.2) \qquad 0 = -\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx} + \nu\frac{d^2u}{dy^2}, \qquad \frac{dp}{dx} = C \ (一定).$$

解 $\qquad u = \dfrac{C}{2\rho\nu}y^2 + Ay + B,$

A, B は境界条件(粘着条件)から決る定数。

Poiseuille の流れ (図 1)

$$u = \frac{C}{2\rho\nu}(y^2 - a^2),$$

Couette の流れ (図 2)

$$u = Uy/h,$$

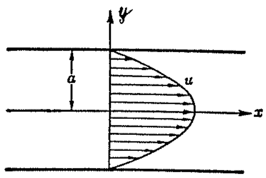


図 1.

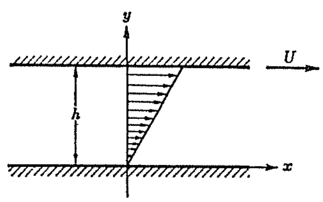


図 2.

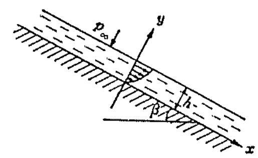


図 3.

実際の流れ(スライド)

方程式の無次元化と Reynolds 数の導入.

Reynolds の相似則

境界の形が幾何学的に相似な2つの流れは, パラメター $R = UL/\nu$ の値が等しければ, 流れの場そのものも相似になる。 R を Reynolds 数という。

[近似解の重要性]

§2. Stokes の流れ

$R \ll 1$ (小物体を過ぎるおそい流れ)の場合, (1.1) (1.2) は

$$\left.\begin{aligned} &\mathrm{div}\, u = 0, \\ &\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\,\mathrm{grad}\, p + \nu \Delta u, \end{aligned}\right\} \qquad (2.1)$$

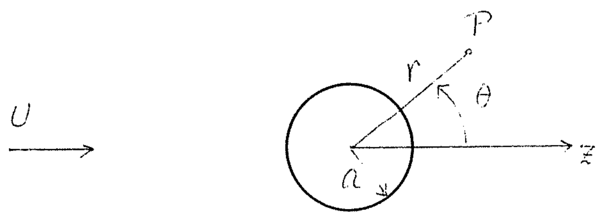
で近似できる。 この近似を Stokes の近似という。

(2.1) の別形,

$$\left.\begin{aligned} &\Delta p = 0, \\ &\frac{\partial u}{\partial t} - \nu \Delta u = -\frac{1}{\rho}\,\mathrm{grad}\, p. \end{aligned}\right\} \qquad (2.2)$$

$\mathrm{div}\, u = 0$ の条件は, $\partial f/\partial t = \nu \Delta f$ の解が $f_{t=0} = 0$ なら $f = 0$ であることにより $(\mathrm{div}\, u)_{t=0} = 0$ によって保証される。

例題 静止球を過ぎる一様定常流



定常 $(\partial/\partial t = 0)$, 軸対称 $(\partial/\partial \varphi = 0)$ の場合,

$$\Delta p = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial p}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial p}{\partial \theta}\right) = 0.$$

θ に独立な解 p

$$\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{dp}{dr}\right) = 0 \longrightarrow p = \frac{a_0}{r} + p_0, \qquad (2.3)$$

(2.2) $\Delta p = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) p = 0$ であるから (2.3) の p を x, y, z で微分して得られる関数は全て $\Delta p = 0$ の解。 従って

$$p = p_0 + \frac{a_0}{r} + a_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{r}\right) + a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\left(\frac{1}{r}\right) + \cdots , \quad (2.4)$$

$(x_1, x_2, x_3) \equiv (x, y, z)$, 第三, 第四項については $i = 1, 2, 3$, $j = 1, 2, 3$ として和をとる。

(2.4) を $\Delta \boldsymbol{u} = \frac{1}{\rho\nu} \,\mathrm{grad}\, p$

に代入して $\boldsymbol{u}$ を求めると, 境界条件

$$\boldsymbol{u} = [0, 0, U] \qquad r \to \infty$$
$$\boldsymbol{u} = 0 \qquad r = a$$

を満足する解は, 有限項で切れて 次のように求められる。

$$u = -\frac{3}{4} a U \left(\frac{zx}{r^3} - \frac{a^2 zx}{r^5}\right),$$
$$v = -\frac{3}{4} a U \left(\frac{zy}{r^3} - \frac{a^2 zy}{r^5}\right),$$
$$w = U - \frac{3}{4} a U \left(\frac{z^2}{r^3} + \frac{1}{r} - \frac{a^2 z^2}{r^5} + \frac{a^2}{3r^3}\right).$$

Stokes の抵抗則 (スライド)

同じ解析を静止円柱を過ぎる一様定常流の問題で行うと解が得られない。 Stokes' paradox.

原因は何か? 近似式で省略した項の評価,

$$\frac{(\boldsymbol{u}\cdot \mathrm{grad})\boldsymbol{u}}{\nu \Delta \boldsymbol{u}} = \frac{aU^2/r^2}{\nu a U/r^3} = \frac{Ua}{\nu}\frac{r}{a} = R \cdot \frac{r}{a},$$

$R \ll 1$ とこの二項の比が小さくなることとは、r の値に関係して、同値でなくなる（非一様）。 $r/a > 1/R$ では近似方程式の意味が失われる。 但し、解はこの領域では

$$w = U\left(1 + O\left(\frac{a}{r}\right)\right)$$

であって、主な項は第一項であるから、実用的な意味をもつ近似の破綻は、逐次近似解の構成で問題となる。

一様流からの摂動による解法（Oseen 近似）（スライド）

matched asymptotic expansion への発展。

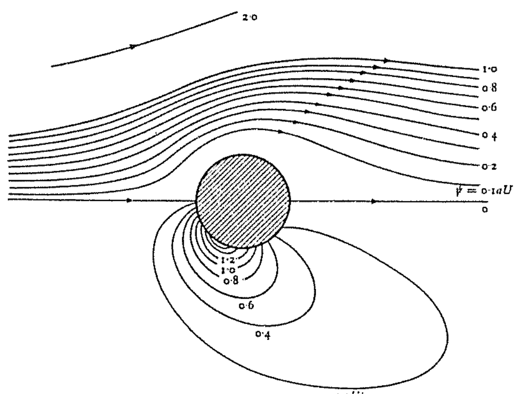
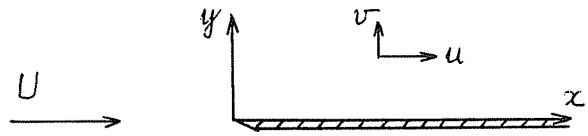


Figure 4.12.2 Streamlines (upper half of figure) and lines of constant vorticity (lower half) in flow past a circular cylinder at $R = 4$, calculated by Keller and Takami (1966).

§3 Prandtl の理論

$R \gg 1$ の流れ。 U と L が $O(1)$ なら $R \gg 1 \rightleftarrows \nu \ll 1$。(1.2)式で $\nu \Delta \mathbf{u}$ の項を無視した式を Euler 方程式と呼ぶ。$\mathbf{u}$ の空間分布が ν に関係なく一様に $O(1)$ であれば、Euler 方程式は成立する。しかし、$\Delta \mathbf{u}$ の値が $1/\nu$ の程度に大きな値をとる領域が存在すると、そこでは $\nu \ll 1$ でも $\nu \Delta \mathbf{u}$ の項を無視できない。境界近傍(境界層と呼ぶ)には、そのような領域が現れる。

例題　平板に沿う二次元定常流



$w = 0,$

$\dfrac{\partial}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial z} = 0,$

(1.1) (1.2) 式はこの場合,

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \tag{3.1}$$

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right), \tag{3.2}$$

$$u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)。 \tag{3.3}$$

境界条件は

$y = 0, \quad x \geq 0$ で $u = v = 0,$

$|y| = \infty, \quad x = -\infty$ で $u = U, \ v = 0.$

この問題の Euler 方程式の解 $\mathbf{u} = [U, 0]$, $p = $ 一定

は，平板の近くを除く領域で実際の流れをよく表わすが，平板表面における境界条件を満足しない。　平板近くの $y \leq \delta$ の範囲で $\nu \Delta u$ の項を無視できないと考える，座標変数のスケール変換：$\tilde{y} = y/\delta$ と (3.1) から，

$$v = -\delta \int (\partial u/\partial x)\, d\tilde{y} = \delta \tilde{v}, \quad (\tilde{v} \text{ のスケール変換})$$

(3.2) (3.3) は

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + \tilde{v}\frac{\partial u}{\partial \tilde{y}} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\nu}{\delta^2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \tilde{y}^2} + \delta^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right),$$

$$\delta\left(u\frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} + \tilde{v}\frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}}\right) = -\frac{1}{\delta \rho}\frac{\partial p}{\partial \tilde{y}} + \frac{\nu}{\delta}\left(\frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \tilde{y}^2} + \delta^2 \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial x^2}\right),$$

$\nu \to 0$ のとき，$\delta \propto \nu^{1/2}$ の層ができるとすると，(3.1)～(3.3) は次の式で近似される。

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} = 0, \tag{3.4}$$

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + \tilde{v}\frac{\partial u}{\partial \tilde{y}} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\nu}{\delta^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \tilde{y}^2}, \tag{3.5}$$

$$0 = \frac{\partial p}{\partial \tilde{y}}, \tag{3.6}$$

(3.6) から，p は境界層内で $\tilde{y}$ によって変らないことがわかるから，p は境界層外の圧力分布 P（既知，今の場合は const.）でおきかえられる。　従って (3.5) は

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + \tilde{v}\frac{\partial u}{\partial \tilde{y}} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\nu}{\delta^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \tilde{y}^2}. \tag{3.7}$$

Prandtl の境界層方程式 (1905).

相似解　速度分布 u v は

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \psi = 2\sqrt{\nu U x}\ F\left(y\sqrt{\frac{U}{\nu x}}\right) \qquad (3.8)$$

の形に得られる（スライド）。但し，$F(\eta)$ は

$$\frac{d^3F}{d\eta^3} + F\frac{d^2F}{d\eta^2} = 0. \qquad (3.9)$$

$$F(0) = F'(0) = 0, \quad F'(\infty) = 1/2 \qquad (3.10)$$

の解。

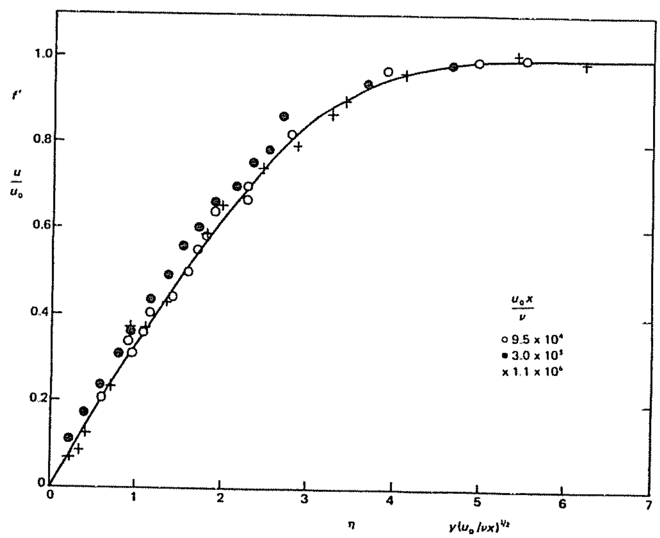


Figure 11.2　Theoretical Blasius profile and experimental confirmation from Refs. [96] and [162].

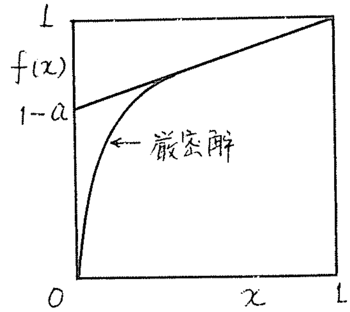
Friedrichs のモデル (1942)

$$\varepsilon\frac{d^2f}{dx^2} + \frac{df}{dx} = a, \qquad f(0) = 0, \quad f(1) = 1 \qquad (3.11)$$

厳密解　$$f(x,\varepsilon) = (1-a)\frac{1-e^{-\frac{x}{\varepsilon}}}{1-e^{-\frac{1}{\varepsilon}}} + ax,$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} f(x,\varepsilon) = \begin{cases} 1-a+ax, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

$x=0$ は $\varepsilon\to 0$ の極限で特異点.



(3.11) で $\varepsilon = 0$ とおくと

$$\frac{df}{dx} = a, \quad f(1) = 1$$

$$\therefore \quad f = a(x-1)+1.$$

$X = x/\varepsilon$ として $\varepsilon = 0$ とおくと

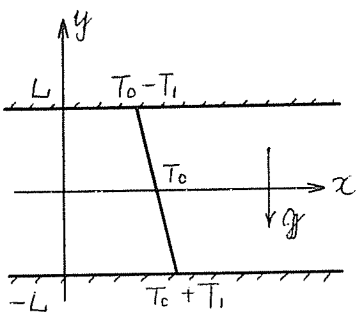
$$\frac{d^2f}{dX^2} + \frac{df}{dX} = 0, \quad f(0)=0 \quad f(\infty) = 1-a,$$

$$f = (1-a)(1-e^{-X}).$$

PLK法

§4. 熱対流の発生

静止水平流体層を下から加熱した時の安定性問題.



静止状態

$$\bar{u} = 0,$$

$$\bar{\rho} = \rho_0\left(1 + \frac{\alpha T_1}{L} y\right),$$

$$\bar{T} = T_0 - \frac{T_1}{L} y,$$

$$\bar{p} = -\rho_0 g\left(y + \frac{\alpha T_1}{2L} y^2\right),$$

$\bar{T}+\hat{T}$, $\bar{u}+\hat{u}$ の振舞いを調べる。

状態方程式 $\quad \rho = \rho_0\{1-\alpha(T-T_0)\}$, (4.1)

α : 体積膨張率 $\quad 10^{-4}/℃$ (水の場合)

連続の式

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (u\,\mathrm{grad})\rho + \rho\,\mathrm{div}\,u = 0 \qquad (4.2)$$

$\partial\rho/\partial t$, $(u\,\mathrm{grad})\rho$ は α に比例して十分小さいので無視する。 (4.2) $\longrightarrow$

$$\mathrm{div}\,u = 0 \qquad (4.3)$$

運動方程式 (4.3) を用いて

$$\rho\left\{\frac{\partial u}{\partial t} + (u\cdot\mathrm{grad})u\right\} = -\mathrm{grad}\,p + \rho g + \rho\nu\Delta u, \qquad (4.4)$$

熱伝導方程式

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (u\,\mathrm{grad})T = \kappa\Delta T, \qquad (4.5)$$

$\bar{T}+\hat{T}$, $\bar{u}+\hat{u}$, $\bar{p}+\hat{p}$ を代入し、$\wedge$ のついた量の二次の項を無視すると (4.4), (4.5) は

$$\rho_0\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} = -\mathrm{grad}\,\hat{p} - \rho_0\alpha\hat{T}g + \rho_0\nu\Delta\hat{u}, \qquad (4.6)$$

$$\frac{\partial \hat{T}}{\partial t} - \frac{T_1}{L}\hat{v} = \kappa\Delta\hat{T}, \qquad (4.7)$$

$\mathrm{div}\,\hat{u} = 0$ と (4.6) から $\hat{p}$, $\hat{u}$, $\hat{w}$ を消去すると

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \nu\Delta\right)\Delta\hat{v} = \alpha g\left(\Delta - \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\hat{T}, \qquad (4.8)$$

モード分解（Fourier 分解）

$$\begin{pmatrix} \hat{v}(x,t) \\ \hat{T}(x,t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{v}(y) \\ \hat{T}(y) \end{pmatrix} \exp[i(\beta x + \gamma z) + st], \tag{4.9}$$

(4.7) (4.8) $\longrightarrow$

$$\left.\begin{aligned} &\left(\frac{d^2}{dy^2} - k^2 - \frac{s}{\kappa}\right)\hat{T} = -\frac{T_1}{\kappa L}\hat{v}, \qquad k^2 = \beta^2 + \gamma^2, \\ &\left(\frac{d^2}{dy^2} - k^2 - \frac{s}{\nu}\right)\left(\frac{d^2}{dy^2} - k^2\right)\hat{v} = \frac{\alpha g k^2}{\nu}\hat{T} \end{aligned}\right\} \tag{4.10}$$

或は，
$$\left(\frac{d^2}{dy^2} - k^2 - \frac{s}{\nu}\right)\left(\frac{d^2}{dy^2} - k^2 - \frac{s}{\kappa}\right)\left(\frac{d^2}{dy^2} - k^2\right)\hat{v} = -\frac{\alpha g T_1 k^2}{\kappa\nu L}\hat{v}, \tag{4.11}$$

臨界条件は $s = 0$（証明略，一般には $s = s_r + i s_i$，$s_r = 0$）

(4.11)
$$\left(\frac{d^2}{dy^2} - k^2\right)^3 \hat{v} = -\frac{\alpha g T_1 k^2}{\kappa\nu L}\hat{v} \tag{4.12}$$

L で次元をなくすると

$$\left(\frac{d^2}{dy^2} - k^2\right)^3 \hat{v} = -k^2 Ra\,\hat{v}, \tag{4.13}$$

$Ra = \dfrac{\alpha g T_1 L^3}{\nu\kappa}$ は Rayleigh 数。

<u>境界条件 1</u>　簡単に解ける場合（応力 free）

$$\hat{v}(\pm 1) = \hat{v}''(\pm 1) = \hat{v}^{iv}(\pm 1) = 0 \tag{4.14}$$

解　$v(y) = \cos\{(n+\frac{1}{2})\pi y\}$，　$Ra = \frac{1}{k^2}\{(n+\frac{1}{2})^2\pi^2 + k^2\}^3$，$n = 0, 1, 2, \cdots$

$v(y) = \sin n\pi y$，　$Ra = \frac{1}{k^2}(n^2\pi^2 + k^2)^3$，$n = 1, 2, \cdots$

Ra の最小値 Ra_c は，第一の解の $n = 0$，$k^2 = \frac{\pi^2}{8}$

の時で；
$$Ra_c = \frac{27\pi^4}{64} = 41.09 \tag{4.15}$$

境界条件 2 (上下固体壁)

$$\tilde{v}(\pm 1) = v'(\pm 1) = v^{iv}(\pm 1) - 2k^2 v''(\pm 1) = 0, \tag{4.16}$$

この場合の解,

$$v(y) = C_1 \cos(\xi y) + C_2 \cosh(\eta y) + C_3 \cosh(\eta^* y),$$

$$\xi = k\left\{\left(\frac{Ra}{k^4}\right)^{\frac{1}{3}} - 1\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\eta = k\left\{\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\left(\frac{Ra}{k^4}\right)^{\frac{1}{3}} + 1\right\}^{\frac{1}{2}}$$

(4.16) を満足する有意な解が存在するためには,

$$E(k, Ra) = \begin{vmatrix} \cos\xi & \cosh\eta & \cosh\eta^* \\ -\xi\sin\xi & \eta\sinh\eta & \eta^*\sinh\eta^* \\ (\xi^2+k^2)^2\cos\xi & (\eta^2-k^2)^2\cosh\eta & (\eta^{*2}-k^2)^2\cosh\eta^* \end{vmatrix} = 0$$

この式から $k = 1.558$ のとき $Ra_c = 106.7$ (4.17)

境界条件 3. (上応力 free, 下固体壁)

$$k = 1.34 \quad \text{のとき} \quad Ra_c = 68.8 \tag{4.18}$$

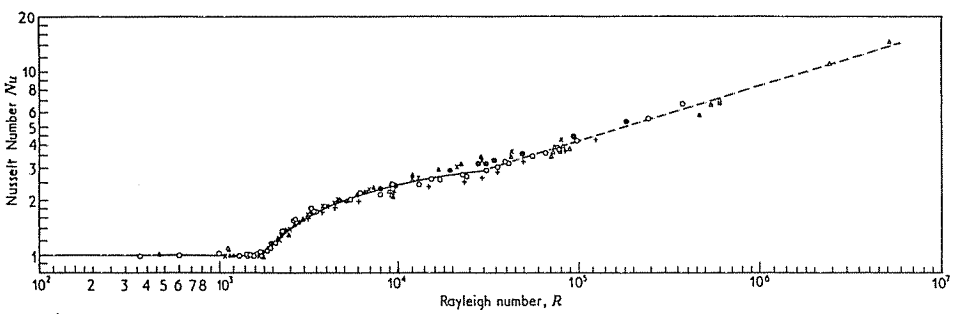


FIG. 13. Silveston's experimental results on the heat transfer in various liquids (○ water; + heptane; × ethylene glycol; ● silicone oil AK 3; ▲ silicone oil AK 350; △ air data of Mull and Reiher). The Nusselt number is plotted against the Rayleigh number.

この実験で定義されたRaは本文中のRaの16倍. Ra_c(実験)$=1700\pm 51$