数学入門公開講座

昭和57年7月27日（火）から8月5日（木）まで

日 / 時間	7月 27日（火）	28日（水）	29日（木）	30日（金）	31日（土）	8月 1日（日）	2日（月）	3日（火）	4日（水）	5日（木）
13:15～14:45	広中	広中	一松	一松	休講		荒木	荒木	荒木	荒木
14:45～15:00	休憩						休憩			
15:00～16:30	一松	広中	一松	広中			松浦	松浦	松浦	松浦

主催　京都大学数理解析研究所

講師及び内容

1. ひまわりの渦(うず)（6時間）　京都大学数理解析研究所教授　広　中　平　祐

自然の中にみられる対数的渦と黄金比、その分数近似に現れる数列フイボナッチ数について解説する。

2. ユークリッド“原論”を読む（6時間）　京都大学数理解析研究所教授　一　松　　信

ユークリッドの〝原論〞は典型的な論証体系であり、永らく精密科学の記述の代表と考えられていた。もちろん現代の目から見れば不備もあるが、このような論証体系は他の文化圏では発展しなかつた。数学教育の現代化は「ユークリッドの追放」から始まつたが、特にその伝統のなかつた日本では、少々追放されすぎて差し支えが生じ始めている。今回、日本語訳によつてではあるが古典を読む一つの試みをしてみたい。第１巻の初等幾何学のほか第５巻の比例論、第７～９巻の整数論、第12巻の取りつくし法などにも重点を置いて論ずる予定である。

予定内容　1.) ユークリッド〝原論〞の構成と伝承
2.) 平行線の公理をめぐつて
3.) 比例論・整数論
4) 取りつくし法

3. ミクロの論理（6時間）　京都大学数理解析研究所教授　荒　木　不二洋

私達の日常経験から得られたマクロの世界の論理は、ミクロの世界に適用しない。マクロの論理とミクロの論理はどこが違うのか？ミクロの論理は射影幾何学と深い関連を持つ。デザルグの定理やハツプスの定理の意味するものは？

4. 転(ころ)と団子(だんご)（6時間）　京都大学数理解析研究所教授　松　浦　重　武

上記表題のもとに、定幅曲線と定幅立体の話をする。

切り口が全て定幅曲線になるような立体は球に限ることを証明する。

時　　間　　割

時間＼日	7月27日(火)	28日(水)	29日(木)	30日(金)	8月31日(土)	1日(日)	2日(月)	3日(火)	4日(水)	5日(木)
13:15～14:45	広中	広中	一松	一松	休講		荒木	荒木	荒木	荒木
14:45～15:00	休憩						休憩			
15:00～16:30	一松	広中	一松	広中			松浦	松浦	松浦	松浦

1. ひまわりの渦(うず)（6時間）

京都大学数理解析研究所教授　広　中　平　祐

1982, JULY 27, 28, 30　　13:15-14:45　　15:00-16:30

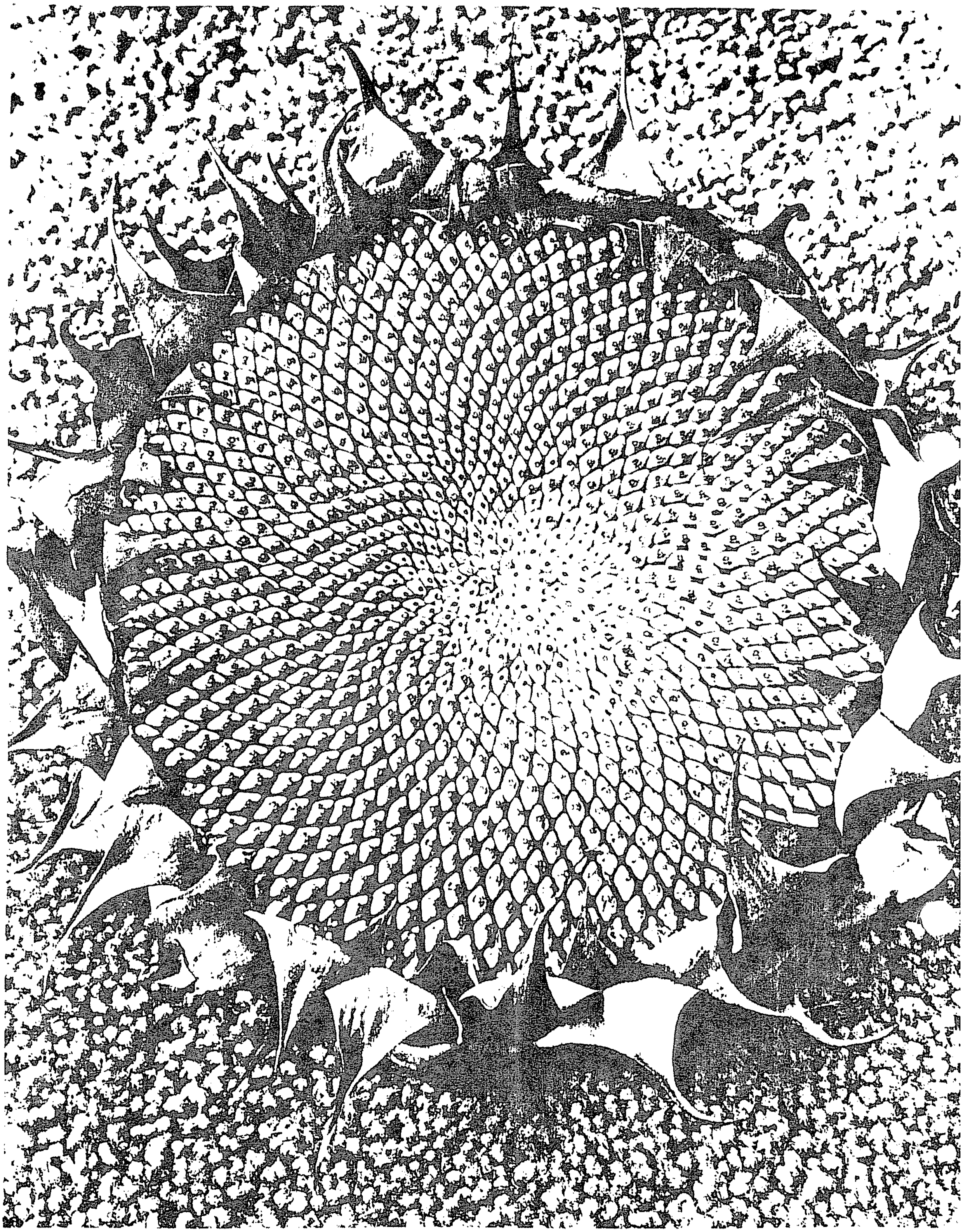
ヒマワリの渦

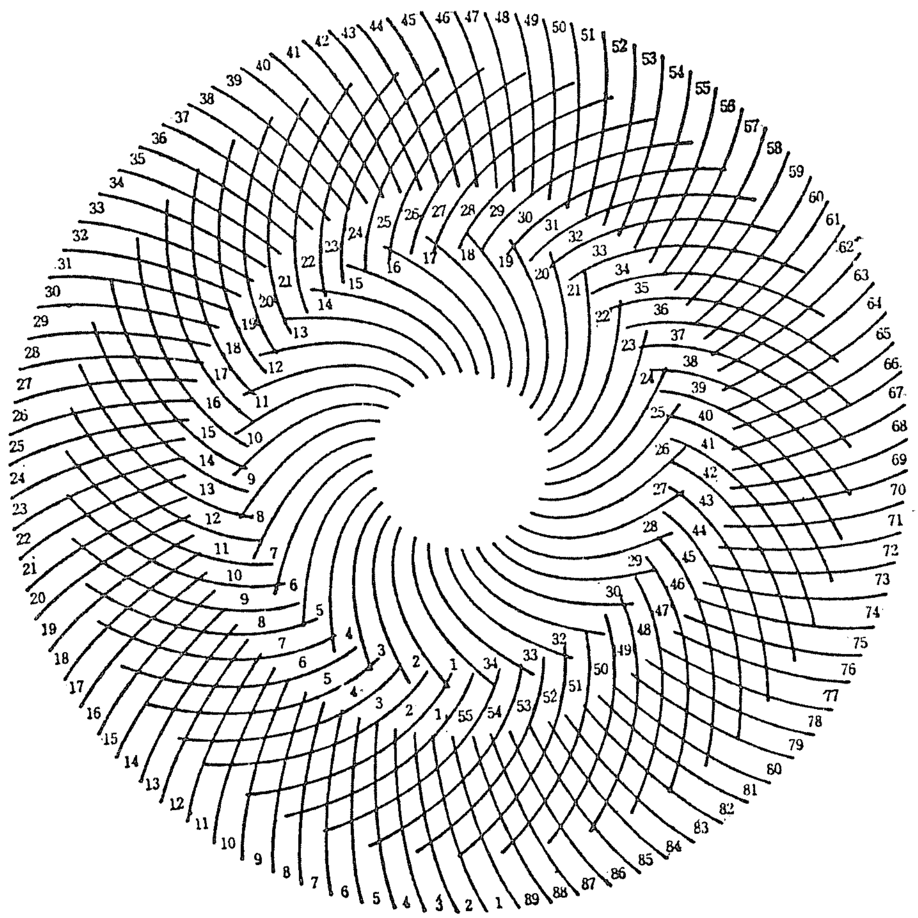
広中平祐

コロンブスのアメリカ大陸発見後，スペイン人によって，中央アメリカ原産のヒマワリはヨーロッパに伝えられ〈インディアンの太陽の花〉とか〈ペルーの黄金の花〉などの名で呼ばれたという。アポロンに恋したクリスティという海のニンフが恋に破れてこの花になったという伝説まで伝えられているそうだが，そういったフィクションの神秘はさておいても，ヒマワリの花には実に不思議な数の神秘がひめられている。

ヒマワリの花は，その円周が一列の鮮黄色の舌状花でかこまれているが，その内側には黄色また紫かっ色の管状花が見事な配列をなして密集している。花びらが散って灰白色の種子が見えだすと，その種子の配列はもっとはっきり観察できて見事である。

【1】 花ビラを除いたヒマワリの写真をみればわかるように，種子の配列が左まわりと右まわりの渦を描いていることがわかる。それも，中心





の周辺と外枠の近くとでは様子がちがい，また左巻きと右巻の様子もよくみればちがいが発見される。この様子をみやすく，また渦巻きの数をかぞえやすく描いた図案を見て下さい。中心から外周に向って流れる渦状の種子の列は，中心に近い方で左巻きに34本出ている。右巻きには55本でており，外周に近いところでは左巻きに89本出ているのが観察される。

この34，55，89という数は実はフィボナッチ数列と呼ばれる数列の三つ続きの数である。フィボナッチ（Fibonacci）はレオナルド・ピサーノ（Leonardo Pisano，約1170－約1250）という数学者のニックネームである。彼はイタリヤのピサの商人ボナッチ（Bonacci）の息子（filius）だったのでその様な通称をもっていた。彼はやはり商人として広くエジプト，シリヤ，ギリシャ，シチリヤの各地を旅行し各地様々の計算法を学び，さらに当時特に優れていたインドの計算法を学んで，イタリヤに持ち帰り，独自の研究も加えてアラ

ビヤ数学がヨーロッパに広まる上で重要な貢献をした。ピザに帰ってフィボナッチは Liber Abaci（算盤の書）と題する計算法の書物を著した。その中で数字と記数法，整数と分数の加減乗除その他について詳しく解説している。全体の三分の一をしめる十二章ではいろいろの数の演算の応用問題，数列の問題をだしているが，その中の一つに例の有名なフィボナッチ数列の問題がある。

フィボナッチ数列というのは 0，1 から始まって $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ の式で次々に計算される数列 $\{a_n\}$ のことである。即ち

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, ……の無限数列である。

同じ公式を用いても最初の二つの数の選び方で色々違った数列が生まれる。例えば

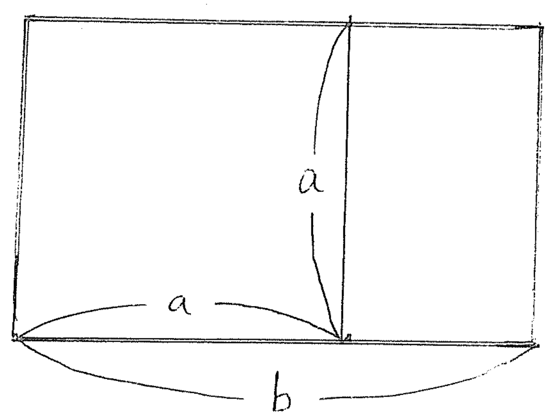
1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, ……

はルーカス（Lucas）の数列と呼ばれ，もう一つの重要な数列として知られている。

【2】 フィボナッチ数列やルーカス数列は19世紀の数学者ルーカスやその後の整数論

学者によって大変詳しい研究がなされた。特にそれ等の数列が黄金比と大変興味ある関係をもつことによって，その研究は20世紀に入ってからもさらに発展した。

黄金比は次のような長方形のたて横の比である。即ち長方形から短い方の一辺を共有する正方形を切り取ったとき残りの長方形がもとの長方形と相似であるように選ぶ。



従って　$a:b=b-a:a$　即ち　$a^2=b(b-a)$
この方程式を解くと

$$\frac{b}{a}=\frac{\sqrt{5}+1}{2},\quad \frac{a}{b}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

となる。これが黄金比である。この a/b は無理数で約 $0.61803\cdots$ である。

黄金比は古代ギリシャの時代から，最も調和のとれた比率として注目されたらしく，ギリシャ美術の中にしばしば黄金比に近い比率が発見されている。レオナルド・ダ・ビンチ（1452－1519）の頃のルネサンス美術や建築や工芸にはさらに意識的に黄金比が用いられているという。

フィボナッチ数列 $\{a_n\}=\{1,1,2,3,\cdots\}$ は黄金比を使って次のように表される。

$$a_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^n-\left(-\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^n\right\}$$

またルーカス数列 $\{b_n\}=\{1,3,4,7,\cdots\}$ は

$$b_n=\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^n+\left(-\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^n$$

【3】　任意の実数 ξ を有理数 p/q（p, q は整数，$q\neq0$）で近似する問題は整数論では歴史も長く，また現代においても活発な研究の課題である。もちろん，どんな実数に対しても，それにい

くらでも近い有理数の存在することはよく知られている。即ち

$\forall \varepsilon > 0, \exists p, q:$

$$\left| \xi - \frac{p}{q} \right| < \varepsilon$$

問題は実数 ξ が与えられたとき，どれだけうまく，または，どれだけ速く有理数で近似できるか，である。より正確に問題を述べると，

ξ は実数，p, q は整数で $q > 0$，γ は実数で $\gamma > 1$ として，不等式

$$\left| \xi - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^{\gamma}}$$

を考える。

問題. γ が与えられたとき，p は q に対して適当に選ぶ（左辺の $|\ \ |$ が最小となるように選ぶ）とき，どのような ξ に対して上の不等式は無数に多くの q について成立するか。また総ての q に対して成立するか。

問題. ξ が与えられたとき，どのような γ（できるだけ大きい γ が望まれる）

をとれば，上の不等式が無数に多くのqに対して成立するか。また総てのqに対して成立するか。

上の問題でrが大きいとき，近似が"うまい"または"速い"と考えられるわけである。上の問題以外にも，有理数近似に関して，それ等に似た問題で多くの重要な問題がある。

このような問題で重要な方法論（テクニーク）の一つに連分数がある。即ち任意の実数$\xi>0$は連分数で

$$\xi = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4 + \cdots}}}}$$

と整数$a_0, a_1, a_2, \cdots$を使って表現される。即ち，a_0はξ（を小数展開したときの）の整数部分。従って$0 \leq \xi - a_0 < 1$。$\xi - a_0 \neq 0$のとき，a_1は$1/(\xi - a_0)$の整数部分，a_2は$1/(1/(\xi - a_0) - a_1)$の整数部分，というように次々と$a_0, a_1, a_2, \cdots$を

求めていくことができる。勿論連分数は有限で終ることがあるが，それは ξ が有理数のときだけである。

ξ は有理数でないとしよう。すると，その無限連分数を有限で切り取った数

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cdots \cfrac{}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}}$$

は有理数で $\dfrac{p_n}{q_n}$ と書ける。この有理数は ξ の"うまい"近似で

$$\left| \xi - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{q_n^2}$$

が成立する。

連分数の例

$$\sqrt{3} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cdots}}}}$$

$$\frac{\sqrt{5}+1}{2} = 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cdots}}}$$

(黄金比)

この場合だけが総ての項の数が1である。

先に連分数を途中で切って作った分数 p_n/q_n を黄金比にあてはめると(p_n と q_n は互に素とする)

$$p_1, q_1, p_2, q_3, \cdots$$

が　ヒマワリにも出て来るフィボナッチ数列を作っていることがわかる。

実数の中で有理数近似が一番難しいものは何だろうか。意外とその答は(本質的には)黄金比だけである。

最も近似の難しい数(無理数)が調和美とされ自然界にしばしば発見される理由は何だろうか?