数学入門公開講座

昭和57年7月27日（火）から8月5日（木）まで

日 / 時間	7月 27日（火）	28日（水）	29日（木）	30日（金）	31日（土）	8月 1日（日）	2日（月）	3日（火）	4日（水）	5日（木）
13:15～14:45	広中	広中	一松	一松	休講	休講	荒木	荒木	荒木	荒木
14:45～15:00	休憩	休憩	休憩	休憩	休講	休講	休憩	休憩	休憩	休憩
15:00～16:30	一松	広中	一松	広中	休講	休講	松浦	松浦	松浦	松浦

主催　京都大学数理解析研究所

講師及び内容

1. ひまわりの渦（うず）（6時間）

京都大学数理解析研究所教授　広　中　平　祐

自然の中にみられる対数的渦と黄金比、その分数近似に現れる数列フィボナッチ数について解説する。

2. ユークリッド"原論"を読む（6時間）

京都大学数理解析研究所教授　一　松　　信

ユークリッドの"原論"は典型的な論証体系であり、永らく精密科学の記述の代表と考えられていた。もちろん現代の目から見れば不備もあるが、このような論証体系は他の文化圏では発展しなかつた。数学教育の現代化は「ユークリッドの追放」から始まつたが、特にその伝統のなかつた日本では、少々追放されすぎて差し支えが生じ始めている。今回、日本語訳によつてではあるが古典を読む一つの試みをしてみたい。第1巻の初等幾何学のほか第5巻の比例論、第7～9巻の整数論、第12巻の取りつくし法などにも重点を置いて論ずる予定である。

予定内容　1.）ユークリッド"原論"の構成と伝承
　　　　　2.）平行線の公理をめぐつて
　　　　　3.）比例論・整数論
　　　　　4）取りつくし法

3. ミクロの論理（6時間）

京都大学数理解析研究所教授　荒　木　不二洋

私達の日常経験から得られたマクロの世界の論理は、ミクロの世界に通用しない。マクロの論理とミクロの論理はどこが違うのか？ミクロの論理は射影幾何学と深い関連を持つ。デザルグの定理やパップスの定理の意味するものは？

4. 転（ころ）と団子（だんご）（6時間）

京都大学数理解析研究所教授　松　浦　重　武

上記表題のもとに、定幅曲線と定幅立体の話をする。

切り口が全て定幅曲線になるような立体は球に限ることを証明する。

時　間　割

時間＼日	7月 27日（火）	28日（水）	29日（木）	30日（金）	31日（土）	8月 1日（日）	2日（月）	3日（火）	4日（水）	5日（木）
13:15～14:45	広中	広中	一松	一松	休講		荒木	荒木	荒木	荒木
14:45～15:00	休憩						休憩			
15:00～16:30	一松	広中	一松	広中			松浦	松浦	松浦	松浦

2. ユークリッド“原論”を読む（6時間）

京都大学数理解析研究所教授　一　松　　信

1982, JULY 27, 29, 30　　13:15-14:45　　15:00-16:30

ユークリッドの"原論"を読む.

京大・数理研　一松 信

(1982年7月27日 ―30日)

0. はじめに

ユークリッドの"原論"は, ヨーロッパ文化圏においては, "聖書"に次ぐ best seller (むしろ long seller) といわれる. これはヨーロッパの知識人の教養の根柢に, キリスト教神学と, ギリシヤの精密科学の論証精神があることを示す言である. 日本においては, ユークリッドは明治以降の輸入品であり, 指導要領の改訂のたびに影が薄くなり, いまやほとんど姿を消してしまった.

近年日本が経済的に余裕が生じたせいか, 各地で"古典を読む"運動が盛になってきた. 本来ならばギリシヤ語を学び, 原典を"読む"べきであるが, 幸い優れた訳(共立出版)や対訳(部分; 共立出版)があるので, それに従って"原論"の意図を読む試みをしてみたい. 原論の成立, 伝承は, 数学史の重要な話題だが, 今回は軽く触れるのにとどめる.

1. 原論の大体の内容

1巻・ 平面幾何。ピタゴラスの定理を目標

2巻・ 幾何代数。(古来"面積論"とよばれた)

3巻・ 円論(円周角, 円の接線など)

4巻… 円に正多角形を内外接させる。

5巻‥ エウドクソスの比例論

6巻・ 比例, 相似形(平行線による比の移動が基礎)

7巻・ 初等整数論 互除法に始まる

8巻‥ 7巻の続き, 主に比の理論

9巻‥ 前巻の続き, 素数の性質など

10巻‥ テアイテトスによる二次の無理数論

11巻‥ 立体幾何の基礎

12巻‥ しぼりだし法による面積, 体積

13巻‥ 正多面体論 ┘以上がユークリッドの"原論"

14巻(後世の追加)‥黄金分割その他比例に関する話題

15巻(後世の追加)・正多面体の追加

16巻(遙か後世の付加; 普通は問題にされない)

"正多面体が5種あって5種に限る"という有名な注意は"第15巻"の末尾にある。(従って後世の付加。)

2. 原論の伝承 ― 略年表

（＿＿＿は特に重要なもの）

B.C. 400頃	エウドクソス(比例論), テアイテトス(無理数論)
B.C. 300頃	エウクレイデス(ユークリッド) "原論"の編集
B.C. 250頃	アルキメデスの引用
B.C. 200頃	アポロニウスの引用, 改良
B.C. 100頃	ポセイドニオス, 平行線の公準の"証明"の試み
〃	ヒュプシクレス "原論第14巻"を作る.
A.D. 200頃?	ヘロンが詳細な注解を書いたという.
A.D. 300頃	パッポスの注釈
〃	"原論第15巻".
A.D. 390頃	テオンの"改作"　テオン版（後世のは主としてこの系列）
A.D. 450頃	プロクロスの"原論第1巻注釈"(現存)
A.D. 470頃	ボエティウスがラテン語訳をしたと伝えられる.
800頃	アル・ハジャージが初めてアラビア語訳をした.
870頃	サービット・イブン・クッラのアラビア語訳(現存)
1250頃	アル・トゥースィーのアラビア語訳, 編集版(現存)
	上記三者がアラビア語訳の主系統とされる.
(年代的には先) 1100頃	バース(イギリス)のアデラード, アラビア語よりラテン語への全訳(現存; ただし系統は複雑)
1170頃	クレモナ(イタリヤ)のゲラルドの全訳 (20世紀初め写本再発見; 全巻が復元されている; 名訳)
1300頃	無名(不明)の大学者による注釈つきの総合ラテン語版. (伊東俊太郎教授の有名な研究がある.)

1482 ベネチアのラートドルト版（最初の活字本；ラテン語訳）

1505 ザンベルティによるギリシャ語からの直接訳出版

1533 グリュナエウス版（ギリシャ語で印刷された最初）

1572 ピサでコンマンディーノ版（ラテン語）

1543 タルタリアのイタリア語訳（各国語訳の最初）

1558 ショイベルのドイツ語訳（7−9巻）

1562 クシュランダーのドイツ語訳（1−6巻）

1564 フォルカデールのフランス語訳（1−9巻）

1608 マテオ・リッチ（利瑪竇）の中国語訳

1570 ビリングスリの英訳（全訳 "16巻" まで含む）

1615 アンリオンによるフランス語全訳

1739 ロシア語訳

1756 シムソンの英訳（1~6，11~12巻のみ）彼自身の編集書であるが，永らく"原論そのもの"として，教科書に使われた。日本にも影響している

1814~18 ペイラール版，テオン以前の"原原論"復元の第一歩.

1883~1916 ハイベルク＝メンゲによる最も完全な復元版

1884 長沢亀之助訳『宥克立』，最初の日本語訳，ただしトドハンター（1862）の訳.

1908 ヒースの英訳版，最も入手しやすい.

1963 田中正夫，『ユークリッドの本』，1~6巻，ヒースに基く編集書

1971 『ユークリッド原論』（共立出版），ギリシャ語からの全訳.

3 平行線の公準 ― 略年表

B.C. 100頃	ポセイドニオスのいいかえ：平行線を等距離線と定義し直し．
A.D. 150頃	プトレマイオスの"証明"：（等価な公理の密輸）
A.D. 450頃	プロクロスの"注釈"中の研究
1000頃	アラビア文化圏におけるいくつかの研究
1650頃	ウォリス（イギリス）：相似形の存在を基礎とする案
1700頃	サッケリ（イタリア）の研究（心ならずも(?)非ユークリッド幾何学の先駆者となる）
1750頃	ランベルト（ドイツ）の研究．三角形の面積は角過剰あるいは角不足に比例する．
1793	プレイフェア（スコットランド）の公理（平行線の一意性）実質的にはプロクロスにある．
1800頃	ルジャンドルの研究（12"連敗"）
1800頃	ボヤイ（父）の研究，ガウスの批判
1815頃	ガウスが非ユークリッド幾何を発見したといわれる．
1823	ロバチェフスキーの最初の原稿（1909に再発見）
1826	ロバチェフスキーの発表（ドイツ語訳が1840）
1832	ボヤイ(子)の研究発表
1854	リーマンの幾何学，非ユークリッド幾何は定曲率曲面上の幾何
1870年代	ポアンカレとクラインによるモデル(無矛盾性)
1898	ヒルベルト：幾何学基礎論

4. 原論の周辺

・ユークリッドの人となり

資料はごく僅か：パッポスのシナゴーグ（集成）、ストバイオスのアントローギオン（精華集）、プロクロスの第1巻注釈のみ。――

"ユークリッドについて確実なことは『原論』を書いたことだけ"

・原論の著者？

メガラのユークリッドとの混同

ユークリッドは古代の Bourbaki（集団のペンネーム）？

アポロニウスという"大工"の作品という伝承

原論は編纂書であり、強い個性の下に統一する方針をとらなかった。

・ユークリッドの著作

ギリシア語原典現存：原論、与件、光学、反射光学、音楽原論、天文現象論

アラビア語訳のみ：図形分割論、天秤；ラテン訳のみ：重さと軽さ

失われたもの：誤謬推理論、ポリスマタ、円錐曲線論、曲面軌跡論

・原論形成史（略述）

I, II, VII〜IX, XI ← ピタゴラス学派より

III, IV ← キオスのヒポクラテス

V, VI, XII ← エウドクソス

X, XIII ← テアイテトス

{ プラトン
アリストテレス
エレア学派 }
などの影響

・原論は教育的でない？

(注) 原論は中学の教科書ではなく、最高の学術専門書である。
古代には多数の注解書があった。

本文の要約

1. 定義

α'. Σημεῖόν ἐστιν, οὗ μέρος οὐθέν.

β'. Γραμμὴ δὲ μῆκος ἀπλατές.

γ'. Γραμμῆς δὲ πέρατα σημεῖα.

1. 点は部分のないものである．
2. 線は幅のない長さである．
3. 線の端は点である．
4. 直なる線は，その上の点に対して一様に横たわる線である．

5. 面は長さと幅だけをもつものである．
6. 面の端は線である．
7. 平らな面は，その上の直線に対し一様に横たわる面である．

8. 平面上の角とは，一つの平面上の二つの線のなす傾きである．ただし，それらの線は，互いに交わり，一方が他にまっすぐにつながってはいないものとする．

9. それらの線が直線であるときは，その角は直線角であるという．

10. 直線が直線の上に立ち，そこにできる二つの接角が相等しいときは，それらの角のおのおのは直角であるといい，それらの直線のおのおのは他の直線の垂線であるという．

11. 鈍角は直角より大きい角である．
12. 鋭角は直角より小さい角である．

13. 境界は何かの端である．

14. 図形は一つまたはいくつかの境界で囲まれたものである．

15. 円は［その周囲とよばれる］一つの線で囲まれた次のような平面図形である．すなわち，その図形の中にある1点があって，その点からその線［円の周囲］までの線分がすべて互いに等しいようなものである．

16. その点は，円の中心とよばれる．

17. 円の直径は，その中心を通り，両方の側で円の周囲によって境される線分で，それは円を2等分する．

18. 半円は，直径と，それによって(円の)周囲から切りとられた部分によって囲まれた図形である．半円の中心は円の中心と同じである．

19. 直線図形は，線分によって囲まれた図形で，三辺形は三つの，四辺形は四つの，多辺形は四つより多くの線分によって囲まれたものである．

20. 三辺図形のうち，等しい3辺をもつものは等辺三角形，等しい2辺をもつものは二等辺三角形，等しくない3辺をもつものは不等辺三角形である．

21. また三辺図形のうち，直角をもつものは直角三角形，鈍角をもつものは鈍角三角形，三つの鋭角をもつものは鋭角三角形である．

22. 四辺図形のうち，4辺がみな等しく直角をもつものは正方形，直角をもつが辺がみな等しくないものは長方形，4辺がみな等しいが直角をもたないものはひし形，対辺が等しく，対角も等しいが，4辺がみな等しくはなく，直角をもたないものはロムボイド (rhomboid)[1)] である．それ以外の四辺形はトラペジオン (trapezion)[2)] とよぼう．

註1) 今日の rhomboid (菱形) の語源だが，意味は平行四辺形である

註2) 今日の trapezium (台形) の語源だが，むしろ不等四辺形である

ただしこの両語は本文中に使われていない。

23. 同じ平面上にあって，どちらへどこまで延ばしても，どちらでも交わらない直線は平行である．

2. 要 請

1. 次のことを要請しよう．任意の点から任意の点まで直なる線がひけること．

2. また，限られた直線をそれに続いてまっすぐに延長できること．

3. また，任意の中心と距離をもった円をかくことができること．

4. また，すべての直角は互いに等しいこと．

5. また，一つの直線が二つの直線と交わり，その一方の側にできる二つの角を合わせて2直角より小さくなるときは，それらの二つの直線をどこま

でも延長すれば，合わせて２直角より小さい角のできる側で交わること.
（5. がいわゆる"平行線の公準"）

3. 共通概念*)

1. 同じものに等しいいくつかのものは互いにも等しい.
2. また，等しいものに等しいものを加えれば，全体は等しい.
3. また，等しいものから等しいものをとり去れば，残りは等しい.

[4. また，等しいものに等しくないものを加えれば，全体は等しくない.
5. また，同じものの２倍は，互いに等しい.
6. また，同じものの半分は，互いに等しい.]
7. また，重なり合うものは，互いに等しい.
8. また，全体は部分より大きい.

[9. また，二つの直線は面分を囲まない.]

*). プロクロスでは公理（Αξιώματα）
タンヌリ（1884）は後世の付加といったが，ヒースは否定している.
プロクロスは 8 を採り，9 を捨てている。近年の教科書では 9 を
"二つの異なる点を通る直線はただ一つしかない"
という形に述べることが多い.

上記の公理のみでは，論理的に不完全なことは多々ある．第1巻第1命題ですでに密輸入がある。

4. 第1巻本文(1) 基本作図

1

与えられた有限直線*)の上に等辺三角形をつくること.

与えられた有限直線を AB としよう.

AB の上に等辺三角形をつくることが要求されている.

A を中心とし，距離 AB をもって円 $B\Gamma\Delta$ がかかれ，また B を中心とし，距離 BA をもって円 $A\Gamma E$ がかかれたとし，両円が互いに交わる点 Γ から点 A, B まで直線 $\Gamma A, \Gamma B$ がひかれたとしよう.

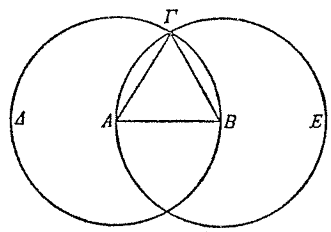


図 2.6

点 A は円 $\Gamma\Delta B$ の中心であるから，$A\Gamma$ と AB は等しい．また点 B は円 ΓAE の中心であるから，$B\Gamma$ と BA も等しい．ΓA と AB が等しいことは，上に示されていた．ゆえに $\Gamma A, \Gamma B$ は両方とも AB に等しい．ところが同じものに等しいものは互いに等しい．したがって，$\Gamma A, AB, B\Gamma$ の三つは等しい.

ゆえに $AB\Gamma$ は等辺三辺形であり，与えられた有限直線 AB の上につくられている.

[与えられた有限直線の上に等辺三角形がつくられた.] これで，作図すべきものが得られた.

2

与えられた点から与えられた直線に等しい長さの直線をひくこと.

3

二つの等しくない直線が与えられたとき，大きい方から小さい方を引き去ること.

*) ここで'有限直線'と訳したのは，比べてみられればすぐにわかるように，'要請2'で'限られた直線'と訳したのと同じ原語である．何度も注意したとおり，『原論』の'直線'が一般に'線分'を意味するのであるから，ここで'有限'あるいは'限られた'というのは冗語のようにも見えるが，'一定の長さの'という意味が含まれているのかもしれない.

命題 2 の図

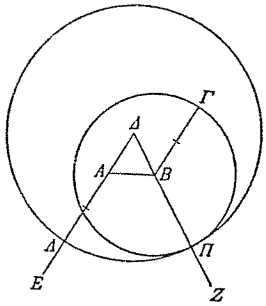


図 2.8

命題 3 の 図

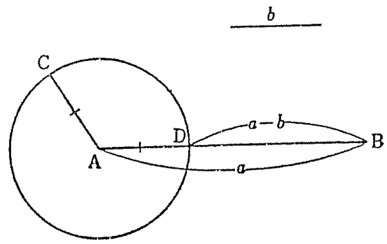


図 2.9

(注) ユークリッドのコンパス、 パズリストとしてのユークリッド？

5. 第1巻本文(2) 三角形の合同定理

4

二つの三角形が，それぞれ互いに等しい二つの辺をもち，それらの等しい2辺のなす角も互いに等しいならば，底辺同士も等しく，三角形同士も等しくなる．互いに等しい辺に対する角がそれぞれ等しくなるのである．

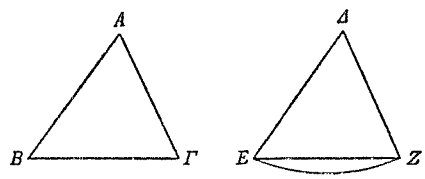


図 2.10

二つの三角形 $AB\Gamma$, ΔEZ において，2辺 AB, $A\Gamma$ がそれぞれ ΔE, ΔZ に等しいとする．すなわち AB と ΔE, $A\Gamma$ と ΔZ がそれぞれ等しいとする．しかも角 $BA\Gamma$ と $E\Delta Z$ が等しいとする．そのとき底辺 $B\Gamma$ は EZ に等しく，三角形 $AB\Gamma$ は ΔEZ に等しい．しかも残りの角 $AB\Gamma$ は ΔEZ に，$A\Gamma B$ は ΔZE にそれぞ

れ等しい. (前者は等しい辺 $A\Gamma$, ΔZ に, 後者は等しい辺 AB, ΔE にそれぞれ対する角である.)*)

実際, 三角形 $AB\Gamma$ を ΔEZ に重ね, 点 A を Δ に, 直線 AB を ΔE に重ねてみれば, 辺 AB と ΔE が等しいから点 B は E に重なる. AB と ΔE が重なると角 $BA\Gamma$ と角 $E\Delta Z$ が等しいから, 直線 $A\Gamma$ と ΔZ も重なる. そうすると, 辺 $A\Gamma$ と ΔZ が等しいから, 点 Γ と Z も重なる. 点 B と E, Γ と Z が重なるのであるから, 底辺 $B\Gamma$ と EZ も重ならねばならない. もし重ならないとすれば, 二つの線分が面分を囲むことになるが, それは不可能であるからである.

こうして三角形 $AB\Gamma$ 全体が ΔEZ 全体に重なるから, 両三角形は等しくなり, 残りの角 $AB\Gamma$ と ΔEZ, $A\Gamma B$ と ΔZE も互いに等しくなる.

ゆえに二つの三角形が, それぞれ互いに等しい辺をもち, それらの辺のなす角が互いに等しいならば, 底辺同士も等しく, 三角形同士も等しくなる. また残りの角もそれぞれ互いに等しくなる. それは互いに等しい辺に対する角がそれぞれ等しくなるのである. それが証明さるべきことであった.

*) ここのところは, わかりやすいように意訳した. 'しかも' (原文 $\kappa\alpha i$) 以下を直訳すれば: しかも, 残りの角は残りの角に, 等しい辺に対するもの同士がそれぞれ互いに等しい. すなわち, $AB\Gamma$ は ΔEZ に, $A\Gamma B$ は ΔZE にそれぞれ等しい. ――原文には訳文のように括弧はなく, 辺 $A\Gamma$, ΔZ なども書かれていない. また原文には $\lambda\acute{\varepsilon}\gamma\omega$ (英語ならば I say 主張する) という動詞が, 'そのとき' の前 (仮定と結論の間) に入っているが, 訳文では省略した.

5

二等辺三角形の底辺のところにある両角は互いに等しい．また，等しい辺を延ばすとき，底辺の下にできる角は，互いに等しい．

6

三角形において，二つの角が互いに等しいならば，それらの等しい角に対する2辺も互いに等しい．

命題5の図 (俗称"ろばの橋")　　命題6の図

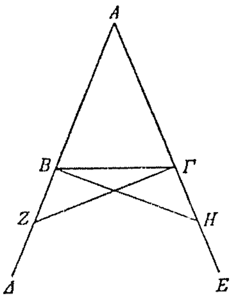


図 2.11

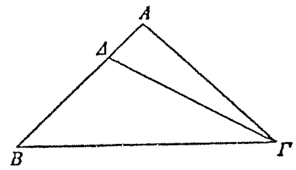


図 2.12

7

一つの線分を底辺として，三角形をなす二線分にそれぞれ等しく，同じ側に異る点で交わり，最初の二線分と同じ端をもつ他の二線分を作ることはできない．

8

もし二つの三角形において，二辺が二辺にそれぞれ等しく，底辺も底辺に等しければ，等しい辺に夾まれた角もまた等しいであろう．

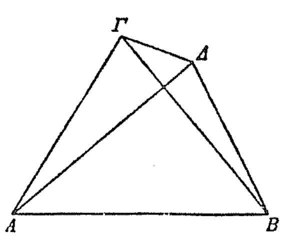


図 2.13

命題7の図

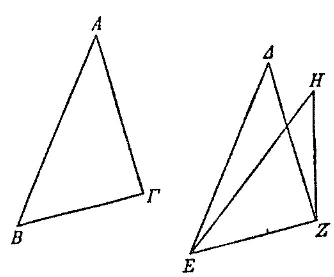


図 2.14

命題8の図

6. 第1巻本文(3) 諸作図

9

与えられた直線角を2等分すること.

10

与えられた有限直線を2等分すること.

命題9の図

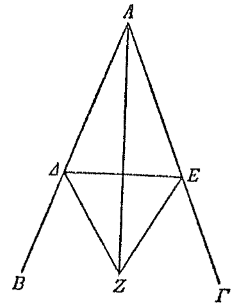


図 2.15

命題10の図

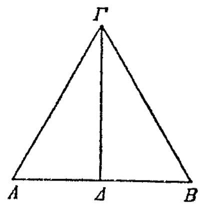


図 2.16

命題11の図

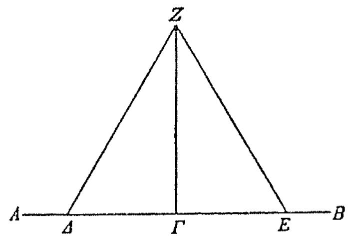


図 2.17

11

与えられた直線に, その上に与えられている点から垂直な直線をひくこと*).

12

与えられた無限直線に, その上にない与えられた点から, 垂線をひくこと.

13

1直線が他の1直線の上に立ち, 二つの角をつくるならば, それらの角は両方とも直角であるか, または両方の和が2直角となるか, どちらかとなる.

命題12の図

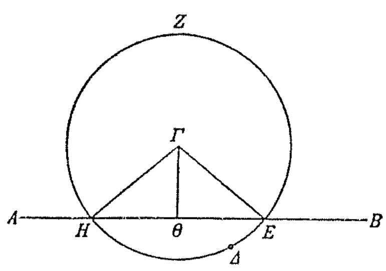


図 2.18

命題13の図

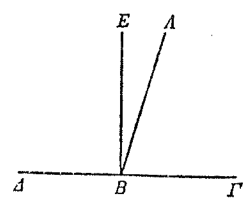


図 2.20

*) 記述の簡単のため '垂直な直線' と訳したが, 原語は '直角をなす直線' となっている. '垂線' (κάθετος) という語は定義 10 で出ているが, ここには使われていない. この語は次の 12 には使われている.

7. 第1巻本文（4）　三角形の辺・角の大小

14

一つの直線と１点で交わる二つの直線がはじめの直線と異なる側にあり，そこにできる隣角の和が２直角になるならば，これらの２直線は互いに他の延長となる．

15

２直線が交わるとき，頂点で対する角は互いに等しい．

16

どの三角形でも，１辺を延ばしてできる外角は，それに対するどちらの内角よりも大きい．

17

任意の三角形で，その二つの角をどのように組み合わせても，その和は２直角より小さい*).

命題14の図

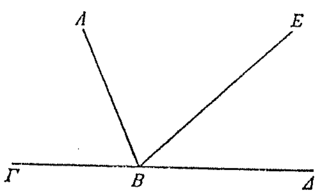


図 2.21

命題15の図

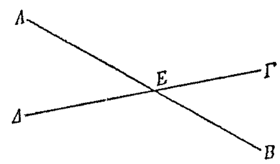


図 2.22

命題16の図

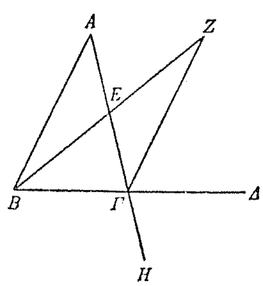


図 2.23

命題17の図

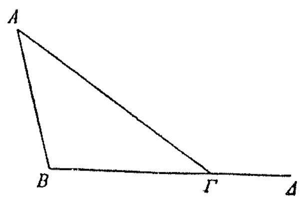


図 2.24

*) 原語には‘和’に当る語は入っていないが，入れた方がわかりよいので訳文には入れた．

18

任意の三角形において，大きい辺に対する角は大きい．

19

任意の三角形において，大きい角に対する辺は大きい．

20

任意の三角形で二つの辺をどのように組み合わせても，その和は残りの辺よりも大きい．

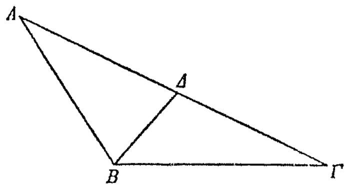


図 2.25

命題18の図

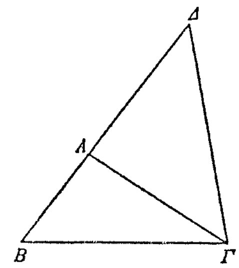


図 2.26

21

三角形の内部に，その1辺の両端から，二つの直線をひくとき，それらの直線の和は，三角形の他の2辺の和よりも小さく，それらの直線の挟む角は，三角形の他の2辺の挟む角より大きい．

22

与えられた三つの直線に等しい三つの直線から三角形をつくること．ただし（任意の三角形において，どの2辺を組み合わせてもその和は残りの1辺より大きくなるから）それらのどの二つを組み合わせても，その和は残りの一つより大きくなくてはならない．

命題21の図

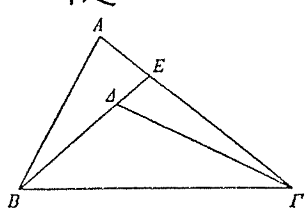


図 2.27

命題22の図

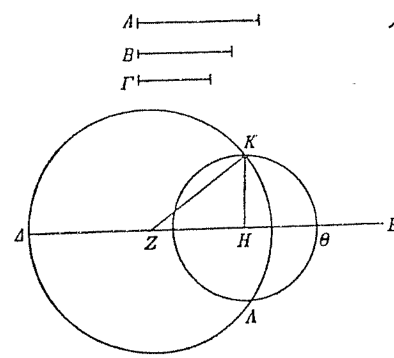


図 2.28

23

与えられた直線と，その上に与えられた点において，与えられた直線角に等しい直線角をつくること．

24

二つの三角形がそれぞれ互いに等しい2辺をもち，その等しい直線のなす角の一方が他方より大きいならば，大きい方の角に対する底辺は，他方の底辺より大きい．

命題23の図

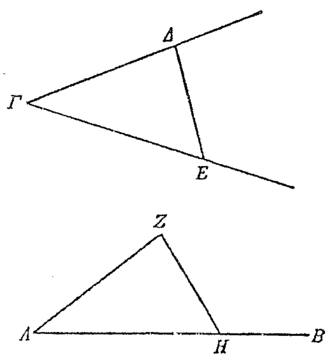


図 2.29

命題24の図

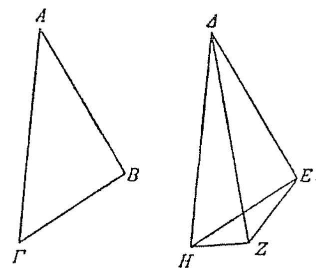


図 2.30

25

二つの三角形がそれぞれ互いに等しい2辺をもち，第3辺の一方が他方より大きいならば，等しい直線のなす角のうち，大きい第3辺に対する方が他方より大きい．

26

二つの三角形がそれぞれ互いに等しい2角をもち，1辺が1辺に等しいならば，すなわち等しい2角に共通な辺か，またはそれらの一方に対する辺が等しいならば，残りの2辺も（互いに）等しく，残りの角も等しい．

命題26の図 →

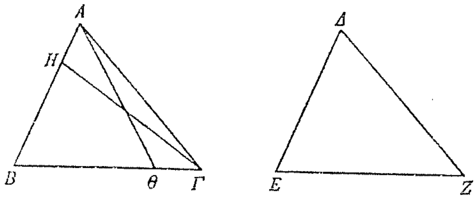


図 2.31

8. 第1巻本文(5) 平行線の諸性質と応用

27

一つの直線が二つの直線と交わって，互いに等しい錯角をなすならば，二つの直線は平行である.

28

一つの直線が二つの直線と交わってできる角のうち，外側にある角が内側にあってそれに対する角に等しいか，または内側にあって初めの直線の同じ側にある二つの角の和が2直角であるならば，二つの直線は平行である.

命題27の図→

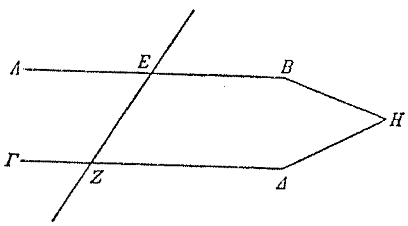


図 2.32

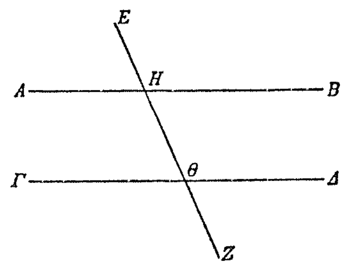


図 2.33

29

一つの直線が平行な二つの直線と交われば互いに等しい錯角をつくる. また外側にある角は内側にあってそれに対する角に等しく，内側にあって初めの直線の同じ側にある二つの角の和は2直角となる.

30

同じ直線に平行な直線は互いに平行である.

31

与えられた点を通り，与えられた直線に平行な直線をひくこと.

命題30の図→

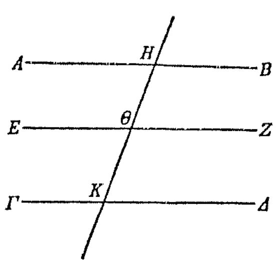


図 2.34

命題31の図

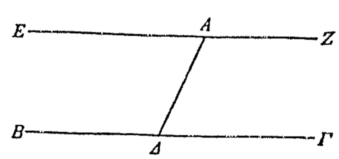


図 2.35

32

どの三角形でも，1辺を延ばしてできる外角は，それに対する二つの内角の和に等しく，三つの内角の和は2直角に等しい．

命題33の図

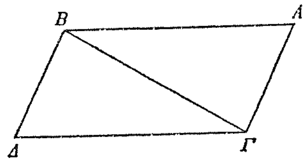


図 2.37

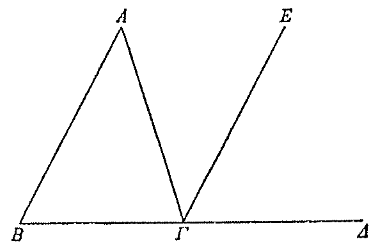


図 2.36

33

等しくて平行な直線を，同じ側で結ぶ直線は，それ自身また等しくて平行である．

34

平行四辺形においては，相対する辺と角はそれぞれ互いに等しく，対角線は平行四辺形を2等分する．

35

同じ底辺の上の，同じ平行線の間にある平行四辺形は，互いに等しい．

命題34の図

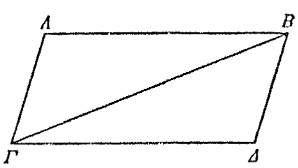


図 2.38

命題35の図

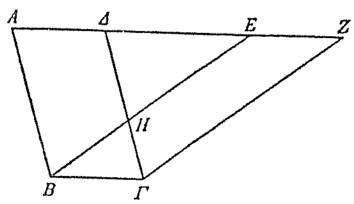


図 2.39

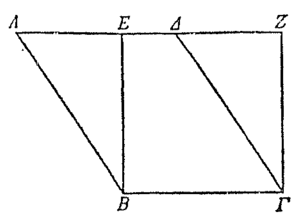


図 2.40

36

等しい底辺の上の，同じ平行線の間にある平行四辺形は，互いに等しい.

37

同じ底辺の上の，同じ平行線の間にある三角形は，互いに等しい.

命題36の図

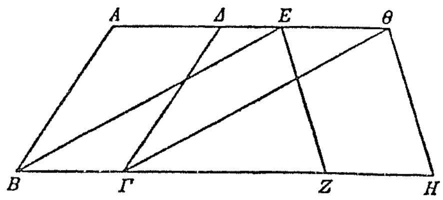


図 2.41

命題37の図

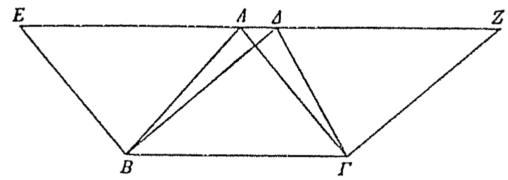


図 2.42

38

等しい底辺の上の，同じ平行線の間にある三角形は，互いに等しい.

命題39の図

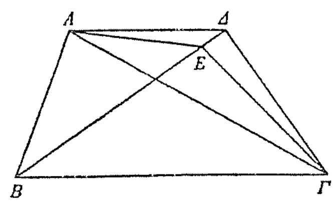


図 2.44

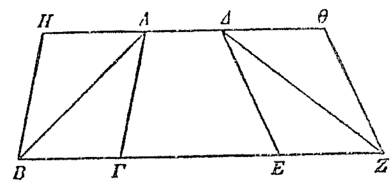


図 2.43

39

同じ底辺の上の，同じ側にある等しい三角形は，同じ平行線の間にある.

40

等しい底辺の上の，同じ側にある等しい三角形は，同じ平行線の間にある.

(注) 40 は後世の挿入とされる。図も左が普通だが，右が正しいらしい。

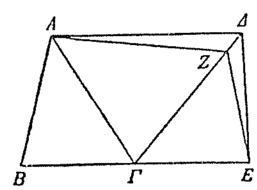


図 2.45

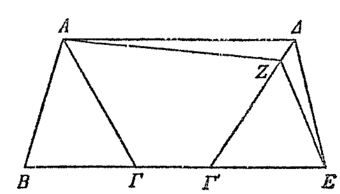


図 2.46

41

平行四辺形と三角形が同じ底辺の上に立ち，同じ平行線の間に挟まれていれば，平行四辺形は三角形の 2 倍である．

命題42の図

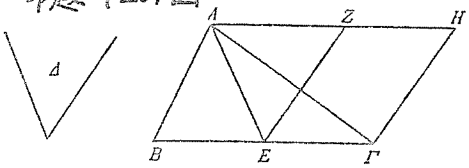


図 2. 48

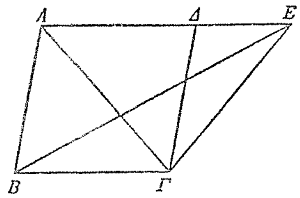


図 2. 47

42

与えられた三角形に等しい平行四辺形を，与えられた直線角の中につくること．

43

任意の平行四辺形で，対角線に沿う平行四辺形の補形は互いに等しい．

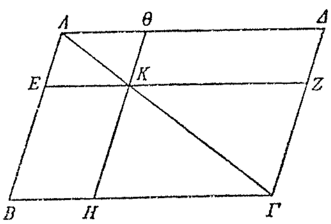
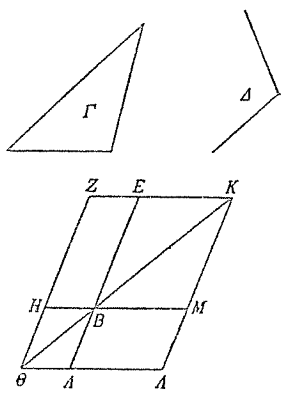


図 2. 49

命題43の図



命題44の図

図 2. 50

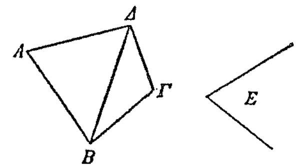
44

与えられた直線を 1 辺とし，与えられた直線角の中に，与えられた三角形に等しい平行四辺形をつくること．

45

与えられた直線図形に等しい平行四辺形を，与えられた直線角の中につくること．

命題45の図↓



9. 第1巻本文(6) 三平方の定理

46

与えられた直線の上に正方形をつくること．

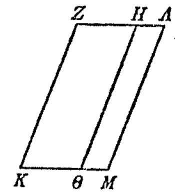


図 2.51

47

直角三角形において，直角に対する辺の上の正方形は，直角を挟む2辺の上の正方形の和に等しい．

$AB\Gamma$ を直角三角形とし，$BA\Gamma$ が直角であるとすれば，$B\Gamma$ の上の正方形は，$BA, A\Gamma$ の上の正方形の和に等しい．

$B\Gamma$ の上に正方形 $B\Delta E\Gamma$ を，$BA, A\Gamma$ の上にそれぞれ正方形 $HB, \Theta\Gamma$ をつくり，A を通って $B\Delta, \Gamma E$ に平行に $A\Lambda$ をひく．また A と Δ，Z と Γ を結ぶ．

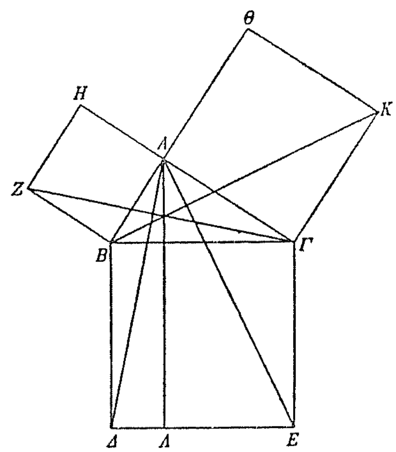


図 2.53

$BA\Gamma, BAH$ のおのおのは直角であるから，直線 BA と同じ点 A で交わる二つの直線 $A\Gamma, AH$ は，その異なる側にあって，和が2直角に等しい接角をなす．したがって $\Gamma A, AH$ は一直線をなす．同じ理由で，$BA, A\Theta$ も一直線をなす．

また $\Delta B\Gamma, ZBA$ のおのおのは直角であるから相等しい．それに共通の角 $AB\Gamma$ を加えれば全体の角 ΔBA と $ZB\Gamma$ が等しくなる．

ΔB は $B\Gamma$ に，ZB は BA にそれぞれ等しいから，(三角形 $\Delta BA, \Gamma BZ$ の) 2辺 $\Delta B, BA$ はそれぞれ $\Gamma B, BZ$ に，角 ΔBA は ΓBZ に等しく，

したがって底辺 $A\varDelta, Z\Gamma$ も等しくなり，両三角形 $AB\varDelta, ZB\Gamma$ は等しくなる．

また三角形 $AB\varDelta$ の 2 倍が平行四辺形 $B\varLambda$ になっている．それは両方とも同じ底辺 $B\varDelta$ の上にあり，同じ平行線 $B\varDelta, A\varLambda$ の間にあるからである．

また三角形 $ZB\Gamma$ の 2 倍が正方形 HB になっている．それはふたたび両方とも同じ底辺 ZB の上に立ち，同じ平行線 $ZB, H\Gamma$ の間にあるからである．

[同じものの 2 倍は互いに等しい] ゆえに平行四辺形 $B\varLambda$ は正方形 HB に等しい．

同様に A と E, B と K を結べば，平行四辺形 $\Gamma\varLambda$ が正方形 $\Theta\Gamma$ に等しいことがわかる．

したがって正方形 $B\varDelta E\Gamma$ 全体は二つの正方形 $HB, \Theta\Gamma$ の和に等しい．$B\varDelta E\Gamma$ は $B\Gamma$ の上の正方形であり，$HB, \Theta\Gamma$ はそれぞれ $BA, A\Gamma$ の上の正方形であるから，$B\Gamma$ の上の正方形は，$BA, A\Gamma$ の上の正方形の和に等しい．

ゆえに，直角三角形の直角に対する辺の上の正方形は，直角を挟む 2 辺の上の正方形の和に等しい．それが証明さるべきことであった．

48

三角形の 1 辺の上の正方形が他の 2 辺の上の正方形の和に等しいならば，後の 2 辺の挟む角は直角である．

第2巻の定義2の図

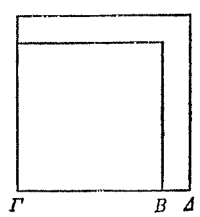


図 2.55

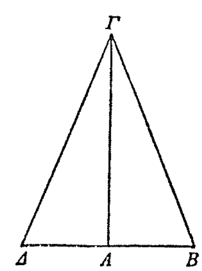


図 2.54

10. 第2巻の大要

定義

1. 直角をもつ平行四辺形は，その直角を挟む直線によって囲まれるという.

2. 任意の平行四辺形において，対角線のまわりのどちらでも一方の平行四辺形と，補形とを合わせたものを，グノーモン（gnomon）とよぼう.

1. 現代流にいうと分配法則

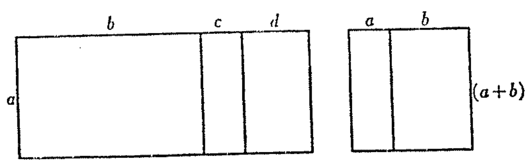
$$a(b+c+d)=ab+ac+ad.$$

2. 同上

$$(a+b)a+(a+b)b=(a+b)^2$$

ただし 1の系でなく，図のような直接証明

命題1の図　　命題2の図



(a)　　(b)

図 2.58

現代流に書き換えた

第3条から第10条までの内容は：

3. $(a+b)a=ab+a^2$,

4. $(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$,

5. $m=\dfrac{a+b}{2}$ とするとき $ab+(m-b)^2=m^2$,

6. $(2a+b)b+a^2=(a+b)^2$,

7. $(a+b)^2+a^2=2(a+b)a+b^2$,

8. $4(a+b)a+b^2=((a+b)+a)^2$,

9. $m=\dfrac{a+b}{2}$ とするとき $a^2+b^2=2(m^2+(m-b)^2)$,

10. $(2a+b)^2+b^2=2(a^2+(a+b)^2)$

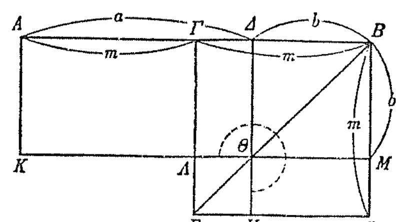


図 2.59

命題5の図

11

与えられた直線を二つに分け，その直線全体と分けられた一部分との囲む長方形が，分けられた他の部分の上の正方形に等しくなるようにすること．

(いわゆる中末比 ― 黄金分割；
VI-30と実質的に同じ)

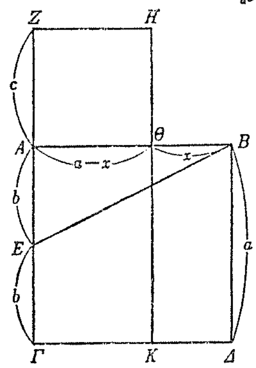


図 2.60

12, 13 (今日の用語で)
第2余弦定理 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$
に相当する内容 (12はAが鈍角，
13はAが鋭角のとき)

14 与えられた直線図形に等しい正方形をつくること．

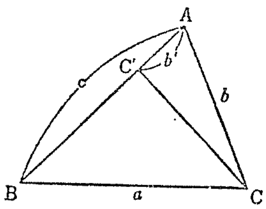


図 2.62

命題12, 13
の図

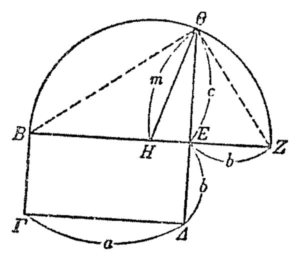


図 2.63

先へゆくと，
(IV-10で"底角が頂角の2倍
であるような二等辺三角形"(正五角形
の補助作図)に，II-11が活用され
ている．

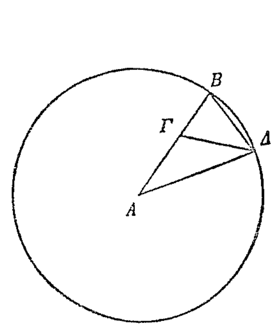


図 2.61

11. 第3, 4巻の大要

3巻"円論". 定義が 1~11 命題が 37

1. 中心を求める; 2,7,8 円の中心, 形; 3,4,5 弦; 5,6 二円の関係; 7,8,9 円と点の距離; 10 2円の交点は最大2点; 11,12,13 二接円; 14,15,16 弦の大小; 17−19 接線; 20−34 円周角関係, 特に 20 円周角一定, 22 円に内接する四角形, 32. 接線と弦のなす角; 35,36,37 方べき定理

4巻"円に内外接する正多角形". 定義が 1~7. 命題が 16

1~5 正三角形の内外接; 6~9 正方形の内外接;

10~14 正五角形の内外接; 15 正六角形; 16 正十五角形

12 第5, 6巻の大要

5巻"エウドクソスの比例論" 定義が 18, 命題が 25

特に重要な定義:

定義 5. 量の比 $a:b$ が $c:d$ に等しいとは, 次の条件が成り立つことである。すなわち任意の整数 M, N に対して

$$Ma > Nb \quad ならば \quad Mc > Nd$$
$$Ma = Nb \quad ならば \quad Mc = Nd$$
$$Ma < Nb \quad ならば \quad Mc < Nd$$

定義 7. 量の比 $a:b$ が $c:d$ よりも大きいとは, 適当な整数 M, N が存在して

$$Ma > Nb \quad かつ \quad Mc \leqq Nd$$

となることである。

25 個の命題は, 現代式の記号を使えば次のように書かれる。

1. $Ma+Mb+Mc+\cdots\cdots = M(a+b+c+\cdots\cdots)$
2. $La+Ma+Na+\cdots\cdots = (L+M+N+\cdots\cdots)a$
3. $M(Na) = MNa$
4. $a:b = c:d \Rightarrow Ma:Nb = Mc:Nd$
5. $Ma-Mb = M(a-b)$
6. $Ma-Na = (M-N)a$

7. $a=b \Rightarrow a:c=b:c$ かつ $c:a=c:b$

8. $a>b \Rightarrow a:c>b:c$ かつ $c:b>c:a$

9. (7) の逆

10. (8) の逆

11. $a:b=c:d,\ c:d=e:f \Rightarrow a:b=e:f$

12. $a:b=c:d,\ c:d=e:f \Rightarrow a:b=(a+c+e):(b+d+f)$

13. $a:b=c:d,\ c:d>e:f \Rightarrow a:b>e:f$

14. $a:b=c:d \Rightarrow a \gtreqless c$ に従って $b \gtreqless d$

15. $a:b=Ma:Mb$

16. $a:b=c:d \Rightarrow a:c=b:d$

17. $a:b=c:d \Rightarrow (a-b):b=(c-d):d$

18. $a:b=c:d \Rightarrow (a+b):b=(c+d):d$

19. $a:b=c:d \Rightarrow a:b=(a-c):(b-d)$

20. $a:b=d:e,\ b:c=e:f \Rightarrow a \gtreqless c$ に従って $d \gtreqless f$

21. $a:b=e:f,\ b:c=d:e \Rightarrow a \gtreqless c$ に従って $d \gtreqless f$

22. $a:b=d:e,\ b:c=e:f \Rightarrow a:c=d:f$

23. $a:b=e:f,\ b:c=d:e \Rightarrow a:c=d:f$

24. $a:c=d:f,\ b:c=e:f \Rightarrow (a+b):c=(d+e):f$

25. $a:b=c:d$ で，a が最大，d が最小 $\Rightarrow a+b>b+c$

6巻 "相似形"（比例論の幾何学への応用）

定義 5．命題 33．

1．2 三角形，平行四辺形の面積比； 3．三角形の二等分線が対辺を分つ比；
4～8．二つの三角形の相似条件； 9～13．比例項の作図；
14～17．面積への応用；18～22 相似多角形の性質； 23 比の積；
24～29．平行四辺形の相似，特に27～29は面積設定作図
30．黄金分割；31．三平方の定理の拡張；32 相似中心；33 中心角と底弧の比例

平行線による比の不変性は，2．中で使われているが，明記されていない．

13. 数論の部分(第7~10巻)の大要

第7巻　定義 23, 命題 39　原論中"最古"の部分とされる.

▶1~3　"互減法"による最大公約数の求め方.
4~20　整数比の諸性質　論理的には 5巻に含まれる.
21~32　素数の性質, 特に素因数分解の一意性に関する内容
34~39　最小公倍数を求めること

第8巻　定義なし, 命題 27

ほとんど比に関する諸事実　アルキュタスの著書をそのまま採用し, 論理的整理が十分でない, といわれている.

第9巻　定義なし, 命題 36

1~7　平方数, 立方数
8~17　連比　18~19　第3, 第4比例項の条件

▶20　素数はいくらでもある.
21~36　奇数・偶数論. 目標は最終の次の命題.
▶36　$1+2+\cdots+2^{n-1}=S_n$ が素数なら $S_n\cdot 2^{n-1}$ は完全数

重要なものは, ▶をつけた3個所に限る, といってもよい.

第10巻　無理量論　定義計 16, 命題 115

全体が3部に分れている. "着実な準備なしに読むのは無謀で危険" といわれていたが, 中村幸四郎先生が整理した結果意外に簡単な整合性で組立てられていることがわかった. 難しさは記号のない表現に基づく見通しの悪さに起因し, 数学に適切な記号が不可欠なことを, 改めて認識させたものである.

目標は, 正多面体に関連して現れる $\sqrt{\sqrt{a}\pm\sqrt{b}}$ の型の数を

統一的に扱うことである.

第1部は4定義, 47命題で, 通約不能量の一般論を扱う. いわゆる"アルキメデスの公理"にあたるのが命題1だが, これは12巻で活用される. 35までは"中項面積"を扱う.

36以降は第2部に編入すべきで, 47と48の間に6定義があり, 84まで続くが, 36〜72と73〜110とは一対一に対応し, 前者が$\sqrt{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$, 後者が$\sqrt{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$に関する. 84と85の間に6定義があり, これも対応している.

第3部 85以降のうち110までは, 上記の理論であり, 111〜115は, 全部で13種の"無理線分"の総括にあたる.

第10巻は, "幾何代数"による再整理を初め, 単独に深く研究されている部分であり, 不通約量の発見と合せると, 古代ギリシャの数学の精髄が要約されているといえる.

14. 立体幾何の部分 (第11〜13巻) の大要

第11巻. 定義 28. 命題 39. (立体幾何の基礎)

1〜3. 直線と平面の包含 ; 4〜6, 8, 11〜14 直線と平面の垂直 ; 7, 9, 10, 15〜17 平行な直線と平面 ; 18, 19 垂直な平面 ; 20—23, 26 立体角 ; 24, 25, 27 〜 39 立方体も含めて平行六面体, 体積

第12巻 定義なし 命題18 (とりつくしの方法)

1, 2, 円の面積 ; 3〜9 三角錐の体積 ; 10〜12, 14, 15 円錐の体積 ;

13 円柱の体積; 16~18 球の体積;

第13巻 定義なし、命題18 (正多面体論)

1~6 比の性質(補充); 7~12 正五角形などの計量の諸性質; 13~15 正四面体,正八面体,正六面体の体積; 16~17 正二十面体,正十二面体の構成, 18 正多面体の総括.

∞. むすび

以上ざっと表面だけ眺めてきたが, もちろんこれは皆様が読むための手引きにすぎない.

原論は専門書であって教科書ではない. また論理的にも不備が多い. しかしこのような精密論理体系が, 二千数百年前に構成されていたとは, 考えるほど驚異的である。なぜ古代ギリシヤにのみ, この種の精密な論理体系が現れたのか? いくつかの仮説はあるが, 数学史のみならず, 人類文化史の謎なのかもしれない。

訳にあきたらず, 原典を読み, いろいろの"発見"をすることは, いまからでも可能である. 拙講が, そのための若干の手引きになったのなら望外の幸いである. (完)