昭和58年度(第7回)数学入門公開講座テキスト(京都大学数理解析研究所, 昭和58年7月26日～7月29日開催)

数学入門公開講座

昭和58年７月26日（火）から８月４日（木）まで

<table>
<tr><th>日
時間</th><th>7月
26日（火）</th><th>27日（水）</th><th>28日（木）</th><th>29日（金）</th><th>30日（土）</th><th>31日（日）</th><th>8月
1日（月）</th><th>2日（火）</th><th>3日（水）</th><th>4日（木）</th></tr>
<tr><td>13:15～14:45</td><td>一松</td><td>一松</td><td>一松</td><td>一松</td><td colspan="2" rowspan="3">休講</td><td>中西</td><td>中西</td><td>中西</td><td>中西</td></tr>
<tr><td>14:45～15:00</td><td colspan="4">休憩</td><td colspan="4">休憩</td></tr>
<tr><td>15:00～16:30</td><td>宇敷</td><td>宇敷</td><td>宇敷</td><td>宇敷</td><td>松浦</td><td>松浦</td><td>松浦</td><td>松浦</td></tr>
</table>

主催　京都大学数理解析研究所

講師及び内容

1. 暗号の数理 (6時間)

京都大学数理解析研究所教授　一　松　　信

近年電気通信や計算機内部の情報保護のために、暗号の活用が情報科学の重要な課題となり、数学的に興味ある問題が続出している。こうした動向をふまえて、特に近年急激に発展してきた数学上の話題を中心に、計算機犯罪に対する対策を含めて論ずる。

2. カオスとフラクタル (6時間)

京都大学教養部助教授　宇　敷　重　広

簡単な数学的アルゴリズムから生成されるにもかかわらず、極めて複雑な構造をもつものとして、カオスやフラクタルがある。その生成のメカニズムとダイナミクスについて実例をあげて解説する。

3. グラフの理論と素粒子 (6時間)

京都大学数理解析研究所助教授　中　西　　襄

線とその端点から構成される図形で、線の接合関係以外の相違を無視して得られる概念をグラフという。この単純な対象を研究するのがグラフの理論であるが、その体系は深遠かつ巧妙であり、応用範囲は極めて広い。ここでは、素粒子物理学において現れるファインマン・グラフへの応用について、面白そうな話題をいくつかとりあげてみたい。

4. 接図形と無限小解析 (6時間)

京都大学数理解析研究所教授　松　浦　重　武

勝手な平面図形、空間図形（一般には、n次元空間の部分集合）の任意の点における接図形の定義を述べる。図形の滑らかさについては、何も仮定しない。
図形が関数のグラフになっているときには、それらがどのようなものになるかは、無限小解析の問題となる。

時　間　割

日 / 時間	7月 26日 (火)	27日 (水)	28日 (木)	29日 (金)	30日 (土)	31日 (日)	8月 1日 (月)	2日 (火)	3日 (水)	4日 (木)
13:15～14:45	一松	一松	一松	一松	休		中西	中西	中西	中西
14:45～15:00	休憩						休憩			
15:00～16:30	宇敷	宇敷	宇敷	宇敷	講		松浦	松浦	松浦	松浦

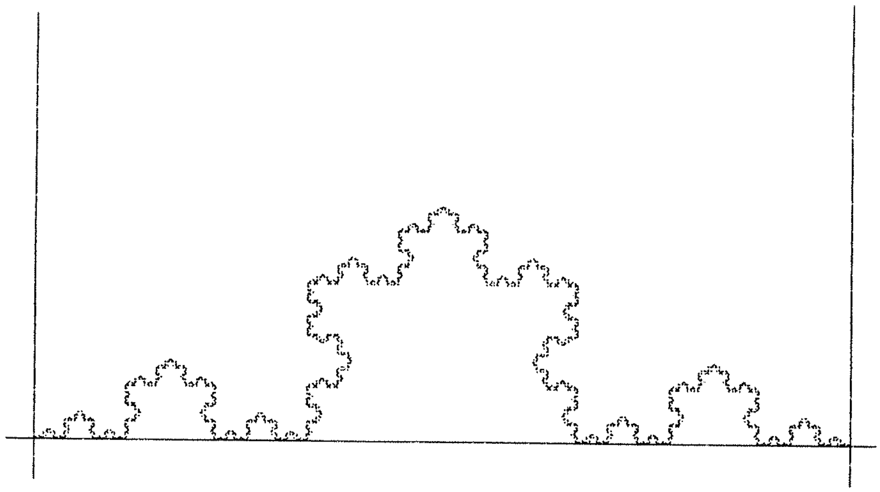
2. カオスとフラクタル (6時間)

京都大学教養部助教授 宇 敷 重 広

1983, JULY 26, 27, 28, 29 15:00-16:30

カオスとフラクタル

京大・教養部　宇敷　重広



上の図は，Van Kochの曲線と呼ばれている。この曲線はちゃんと定まった長さをもっていない。しいて長さを求めようとすると長さが無限大になってしまうのである。この集合は1次元である直線やなめらかな曲線と，2次元の平面や曲面の中間にあたる，約 1.2618595…次元である。正確にいえば，この集合の次元（ハウスドルフ次元）は

$$\frac{2\log 2}{\log 3}$$

で与えられる。このように，整数でない次元をもった集合をマンデルブローはフラクタルと名づけて，実に様々な例を，

コンピュータを使ってつくり出した。フラクタルと彼が呼ぶものの中には，奇妙な形をしたものがたくさんあり，その生成原理も様々である。自然界にも，限りなく凸凹し，ギザギザしたような形態は，たとえばリアス式の海岸であるとか，月面など，フラクタル的と考えられるものも数多い。

とくに，そうしたものの中で，数学的にとらえることのできるものの大部分は，自己相似性を持っている。自己相似性とは，その集合の一部分がその集合全体と相似であるという性質である。Van Kochの曲線では，この曲線の右半分を拡大して裏がえせば全体にぴったり重ね合わせることができる。左半分についても同様である。

自己相似性をうまく利用して，この他にも色々な曲線や図形を作りだすことができるのである。

つぎに，カオスについて考えよう。　カオスとは，「決定論的過程から生成される不規則挙動」と言ってよい。ひとつの例を示す。フランスのグモフスキーとミラによって発見されたものである。平面から平面への写像　$\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ を

$$\varphi(x, y) = \left(-y + f(x),\ -x + f(-y + f(x))\right),$$

ただし　$f(t) = \mu x + 2(1-\mu)x^2/(1+x^2)$，によって定義する。パラメータ$\mu$を適当に定める。平面$\mathbb{R}^2$内の点　$P_0 = (x_0, y_0)$に対して，$P_1 = \varphi(P_0)$，$P_2 = \varphi(P_1)$，…，$P_k = \varphi(P_{k-1})$，…

と，次つぎに写像による行き先を求めると，点列 $P_0, P_1, \cdots$ $\cdots$ ができる。これを P_0 の φ による軌道という。下の図は，パラメータ μ の値がそれぞれ $\mu=0.27$ と $\mu=0.24$ の場合について，いくつかの軌道をコンピュータで計算して図示したものである。極めて複雑な構造が見える。この写像は，平

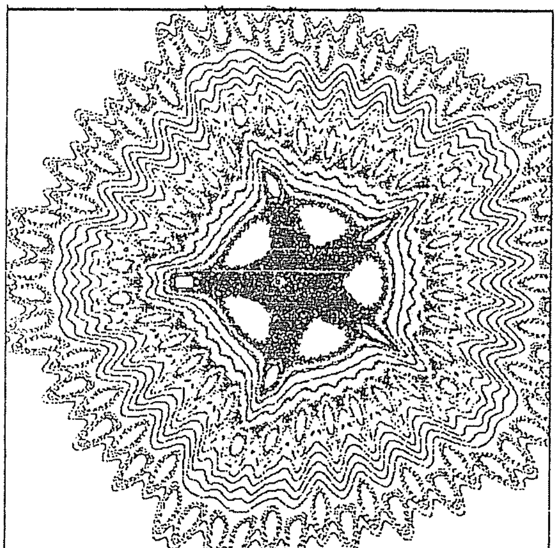
```
PARAMETERS
 A =   .00000000D+00
B =  .00000000D+00
RMU =   .27000000D+00

INITIAL VALUE
X =   .17638836D+00
Y = -.65674500D-01

ITERATIONS

WINDOW
XS = -.20000000D+02
XE =   .20000000D+02
YS = -.20000000D+02
YE =   .20000000D+02


  0:END 1:CONT
 IOPT =
```



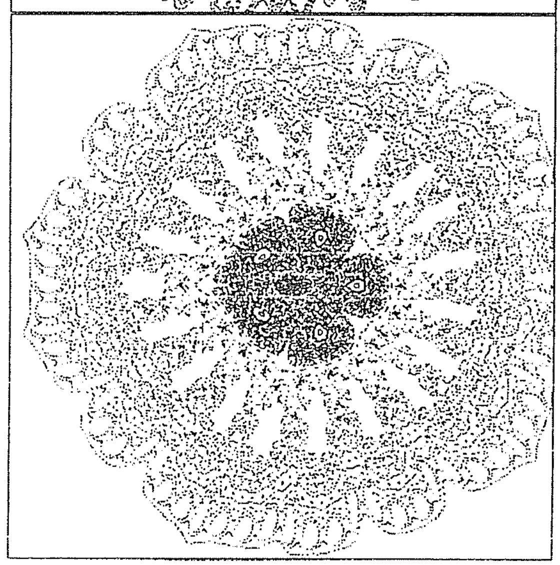
```
PARAMETERS
 A =   .00000000D+00
B =  .00000000D+00
RMU =  .24000000D+00

INITIAL VALUE
X =  .70000000D+00
Y =  .90000000D+00

ITERATIONS

WINDOW
XS = -.20000000D+02
XE =   .20000000D+02
YS = -.20000000D+02
YE =   .20000000D+02


  0:END 1:CONT
 IOPT =
```



面から平面への写像として，平面内の面積を保つ。この写像はそのため，保存系と呼ばれる。

つぎに，この写像の面積保存の性質をこわすために，少し項を追加して，$\Psi(x,y): \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ をつぎのように定義しよう。

$$\Psi(x,y) = (-y + a(1+by^2)y + f(x),\ -x + f(-y + a(1+by^2)y + f(x))).$$

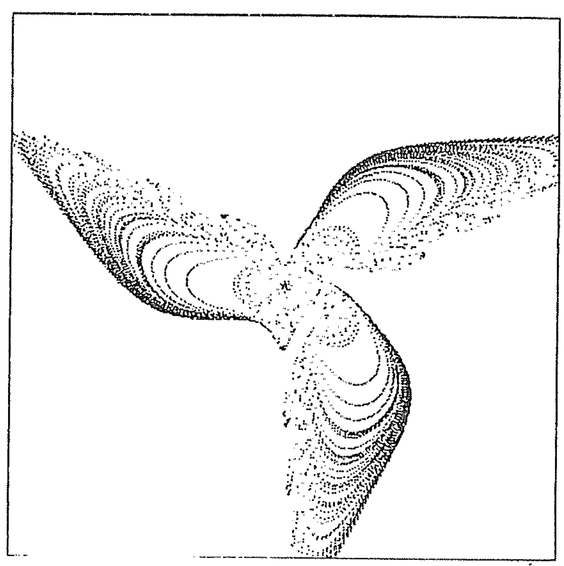
こうすると，面積保存性がこわれ，面積が縮小されるような領域では，小さな集合に軌道は近づいて行く。場合によっては，この極限集合が複雑な構造をもつことがあり，そうしたものは一般に<u>ストレンジ・アトラクタ</u>と呼ばれている。下にそうしたものの例を示す。パラメータの値は $a=0.002$，$b=-0.05$，$\mu=-0.495$ である。

```
PARAMETERS
A =  .200000D-02
B = -.500000D-01
RMU = -.495000D+00

INITIAL VALUE
X0= .651230D+01
Y0= .822973D+01

ITERATIONS
    1
NUMBER OF POINTS
  10000

WINDOW
X: -.200000D+02
  to .200000D+02
Y: -.200000D+02
  to .200000D+02
  0:END 1:CONT
 IOPT =
```

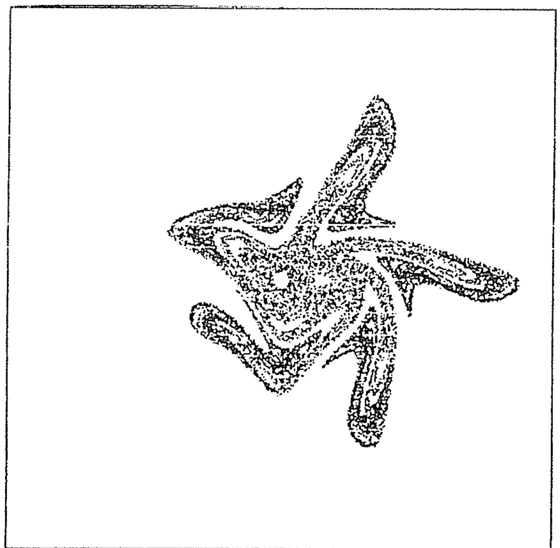


```
PARAMETERS
A =  .500000D-02
B = -.800000D+00
RMU =  .124000D+00

INITIAL VALUE
X0= .267197D+01
Y0=-.199064D+01

ITERATIONS
       1
NUMBER OF POINTS
    5000

WINDOW
X: -.700000D+01
   to .700000D+01
Y: -.700000D+01
   to .700000D+01
   0:END 1:CONT
 IOPT = 1
```

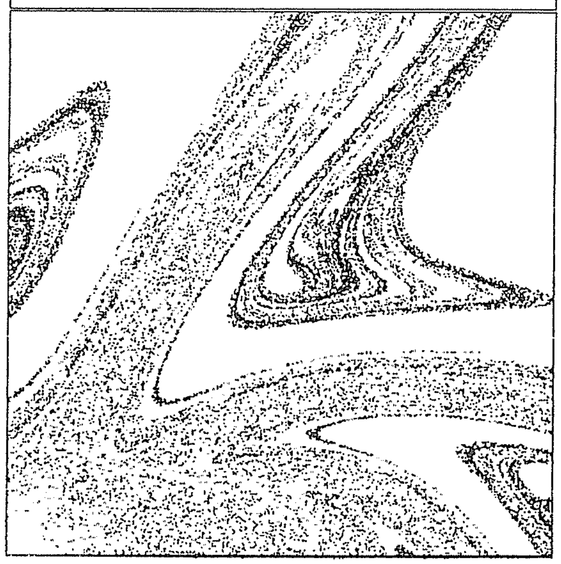


```
PARAMETERS
A =  .500000D-02
B = -.800000D+00
RMU =  .124000D+00

INITIAL VALUE
X0=-.562659D+00
Y0=-.187899D+01

ITERATIONS
       1
NUMBER OF POINTS
  50000

WINDOW
X:  .000000D+00
   to .300000D+01
Y:  .000000D+00
   to .300000D+01
   0:END 1:CONT
 IOPT = 1
```



上の図は，パラメータ $a=0.005$，$b=-0.8$，$\mu=0.124$ の場合である。下の図はその一部分の拡大図である。

もうひとつ，保存系の特殊な例として，チリコフの写像を考えよう。これは，2次元トーラスからそれ自身への面積を保つ写像である。トーラス T^2 を $T^2=\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ としたとき

写像　$\tau : T^2 \to T^2$　を

$$\tau(x, y) = (2x - y + a \sin 2\pi x,\ x)$$

によって定める。計算するときは，$\tau(x, y)$ の値を上式で計算して，できた値の小数部分をとればよい。下に $a=0.2$ の場合と $a=0.15$ の場合の図を示す。

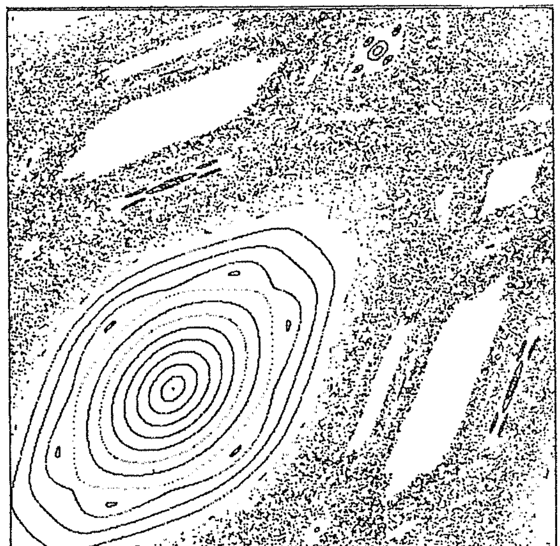
PARAMETERS
A = .20000000D+00

INITIAL VALUE
X = .76397043D+00
Y = .89150368D+00

ITERATIONS

WINDOW
XS = .20000000D+00
XE = .12000000D+01
YS = .20000000D+00
YE = .12000000D+01

0:END 1:CONT
IOPT =



PARAMETERS
A = .15000000D+00

INITIAL VALUE
X = .11901501D+01
Y = .37516781D+00

ITERATIONS

WINDOW
XS = .20000000D+00
XE = .12000000D+01
YS = .20000000D+00
YE = .12000000D+01

0:END 1:CONT
IOPT =