数学入門公開講座

昭和59年7月24日 (火) から8月2日 (木) まで

時間＼日	7月24日(火)	25日(水)	26日(木)	27日(金)	28日(土)	29日(日)	30日(月)	31日(火)	8月1日(水)	2日(木)
13：15～15：00	一松	一松	一松	一松	休講		廣中	廣中	廣中	廣中
15：00～15：15	休憩						休憩			
15：15～17：00	松浦	松浦	松浦	松浦			岩井	岩井	岩井	岩井

主催　京都大学数理解析研究所

講師及び内容

1. ゲームの理論をめぐって(7時間)

京都大学数理解析研究所教授 一松 信

ゲームの理論には，いろいろの側面がある。ここでは主に2人の純戦術ゲームの具体例について，必勝戦術を解説し，合せてConway-Knuthの超現実数とゲームの関連を論ずる。

2. メビウスの問題をめぐって(7時間)

京都大学数理解析研究所教授 松浦重武

凸n角形($n \geqslant 3$)のn個の頂点のうちで，隣接する三頂点からなる三角形の面積をすべて知って，もとの凸n角形の面積を求める問題を考える。$n=3$ の場合，$n=4$ の場合は問題がやさし過ぎるが，$n=5$ の場合は，そう簡単にはゆかない。この $n=5$ の場合がメビウスの問題である [興味ある人は，解答を試みよ]。 n が一般の場合($n \geqslant 6$)には，どうなるか？ これらを含めて，種々の問題を取り扱う予定である。

3. 結び目と特異点(7時間)

京都大学数理解析研究所教授 廣中平祐

トポロジーの一分野として結び目はその理論の美しさと難しさで多くのトポロジストがいどんだ課題である。一方代数曲線論も同様の魅力があるが，特にその特異点と結び目の両理論の関係は深く面白い。

4. 多次元立方体を切る(7時間)

京都大学教養部助教授 岩井齊良

立方体を平面で切ると，切り口には，三角形から六角形までのいろんな形が現れる。それでは，四次元や五次元の立方体(?)を切ると，切り口の図形はどんなものになるか。

四次元立方体の切り口は三次元だから，実物をお目にかけることができる。五次元立方体の切り口は四次元であるが，これは三次元的展開図で示すことができる。

日 / 時間	7月24日(火)	25日(水)	26日(木)	27日(金)	28日(土)	29日(日)	30日(月)	31日(火)	8月1日(水)	2日(木)
13：15～15：00	一松	一松	一松	一松	休講		廣中	廣中	廣中	廣中
15：00～15：15	休憩						休憩			
15：15～17：00	松浦	松浦	松浦	松浦			岩井	岩井	岩井	岩井

昭和59年度(第8回)数学入門公開講座テキスト(京都大学数理解析研究所, 昭和59年7月30日～8月2日開催)

4. 多次元立方体を切る (7時間)

京都大学教養部助教授 岩 井 齊 良

1984, JULY 30, 31 AUGUST 1, 2 15:15-17:00

1. はじめに

昭和57年, 京都大学の入学試験で, 次の問題が出た。

4 (30点)

$0 \leqq x$, $0 \leqq y$, $0 \leqq z$ で定まる空間の部分をAとし, $0 \leqq x \leqq 1$, $0 \leqq y \leqq 1$, $0 \leqq z \leqq 1$ で定まる立方体をCとする。t が $0 < t < 3$ の範囲で動くとき, 平面 $x+y+z=t$ による, AおよびCの切り口の面積を, それぞれ $T(t)$ および $S(t)$ とする。

(i) $T(t)$ を求めよ。

(ii) $S(t)$ の最大値を求めよ。

そもそも, これが物語の発端であった。

こういう問題を見て, 特別な反応を示す数学者が京都大学には少くとも2人いる。

松浦教授は, この問題を, 多次元立方体について考えたら, 数量的にどんな結果になるかを考え, 解決された。

一方, 僕は, この問題を, 多次元立方体について考えたら, 図形的にどんな結果になるかを考えた。

数学者はものごとをすぐ多次元化して考えるが, それは何のためであるか, また, 多次元というのはそんなにやすやすと考えることができるものか, どんなセンスを育てると多次元世界をのぞくことができるのであろうか。

こういう問題点を加味して, 多次立方体の切り口について語りたいと思う。

皆さんの理解を助けるために，自明と思われることがらでも，できるだけおしゃべりを重ねて，問題意識や直観的イメージをふくらませていきたい。

図形を理解するには，つねに絵を描いてみることが必要である。絵を描くという作業を通して，問題点が鮮明になり，さらに，図形的なセンスが養われるものである。

問1　立方体，四面体の絵を描け。

問2　立方体の頂点を1つおきにとると，正四面体ができる。このようすを絵に描け。

問3　立方体の各面の中心を結ぶと，正八面体ができる。このようすを絵に描け。

2. 立方体を切る

立方体を，対角線に垂直な平面で切ったときの，切り口の形を調べてみよう。

ここで，対角線というのは，立方体の最も遠い2つの頂点を結ぶ線のことである。

問4　立方体の対角線は，全部で何本あるか。

立方体の容器に水を入れる(ていく)，あるいは，立方体を水の中に

少しずつ浸していくことによって，実験的に切り口の形を観察することができる。

立方体を1つの頂点の近くで切ると，切り口は三角形である。対角線に垂直な面で切っていないから，正三角形である。（図1）

切断面をずらしていくと，正三角形は少しずつ大きくなっていき，最大の正三角形に達する（図2）。

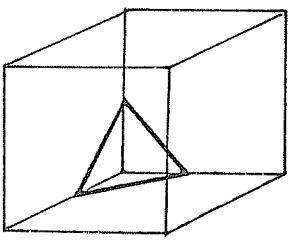


図1

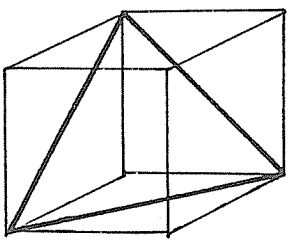


図2

もう少し進化したようすを，次の図で示す。

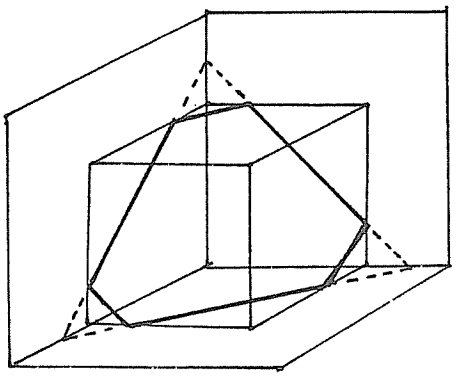


図3

（部屋の隅に立方体が置かれたようす。）

切り口は六角形であるが，たんなる六角形ではない。大きな正三角形の三隅から，同じ大きさの小さい正三角形を切り

落とした形である。

さらに、切り口の形は次のように変わっていく。

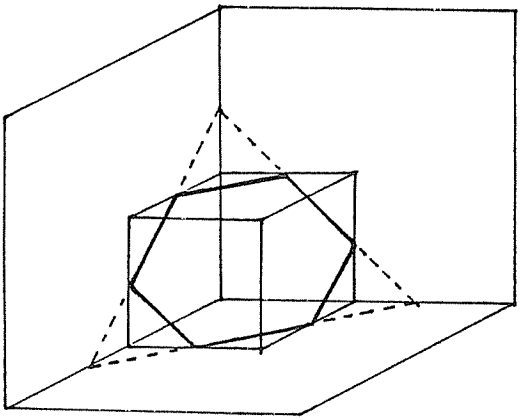


図4

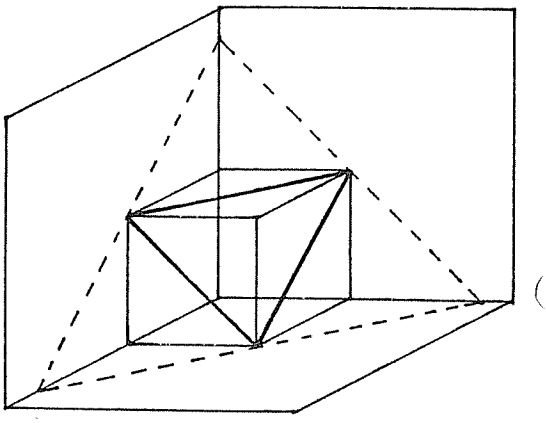


図5

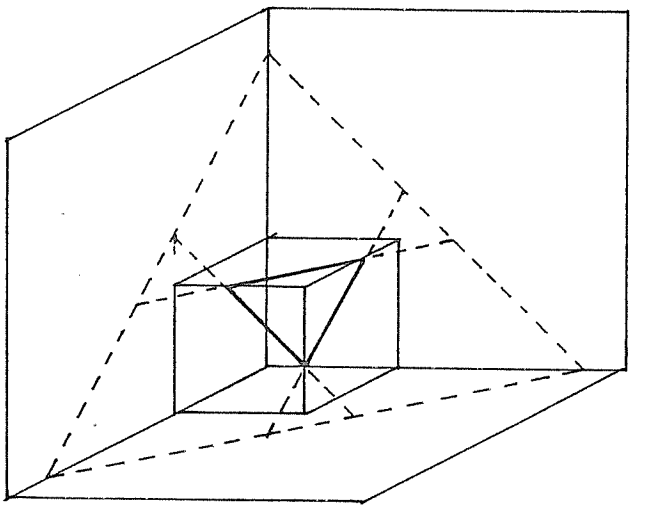
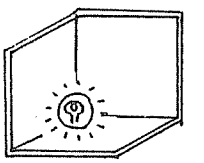


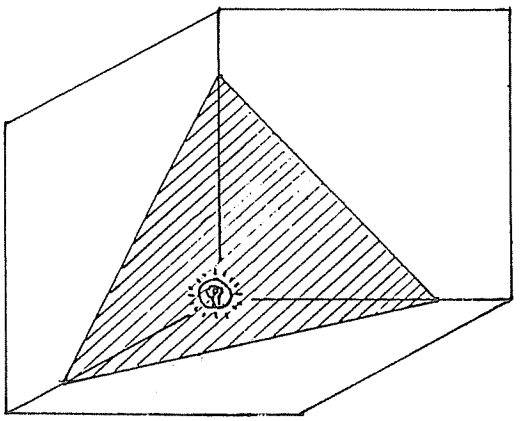
図6

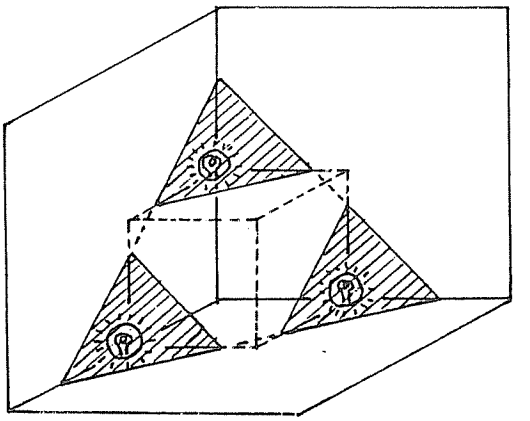
右のような反射面をもつうつわがあったとする。

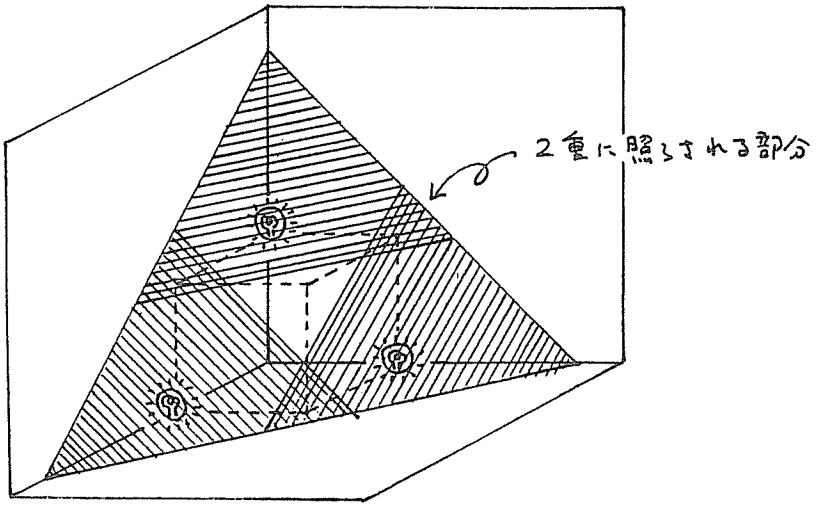


上の図3～6の切り口の形を理解するのに、これを使って説明したい。

ランプで照らされる部分





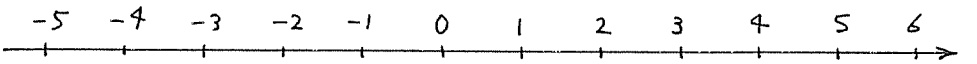


3. 座標空間

1次元の世界とは直線のことであり, 2次元の世界とは平面のことであり, 3次元の世界とは我々の住む空間のことである ――― ということを, 知識として御存じの方は多いであろう。

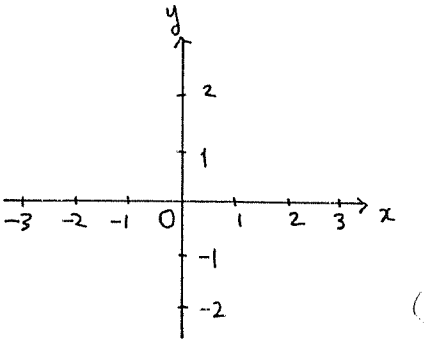
このことをはっきりさせるために, 座標について, とりまとめておこう。

● 数直線



点 ····· $P(x)$

● 座標平面



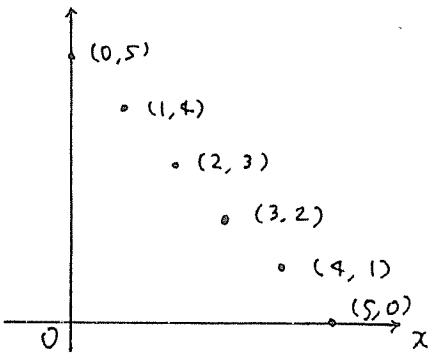
点 ····· $P(x, y)$

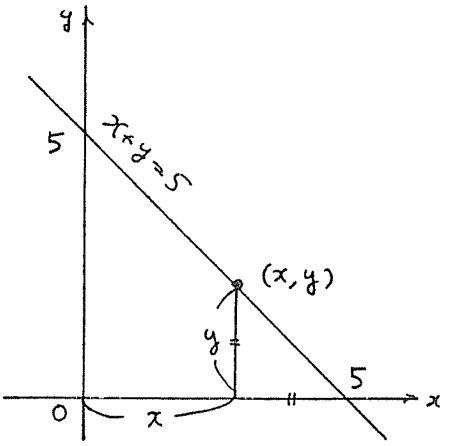
2点間の距離

····· $\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

$y = 2x+3$ や $x+y=5$ のような

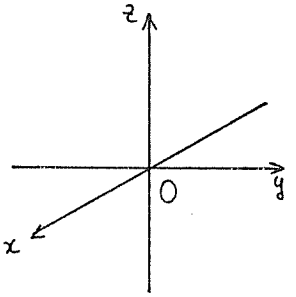
一次方程式は直線を表す。

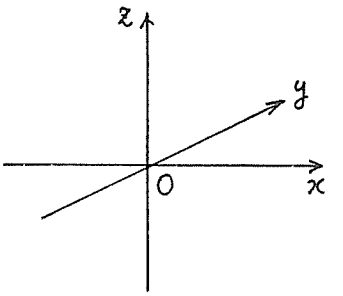




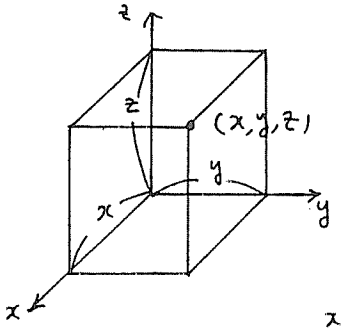
● 座標空間

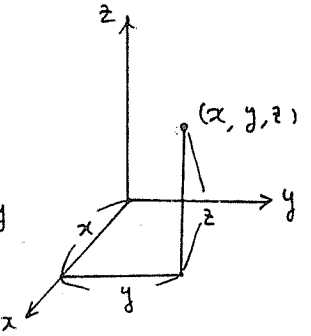
座標空間は直交する3本の直線を基準にして定義される。

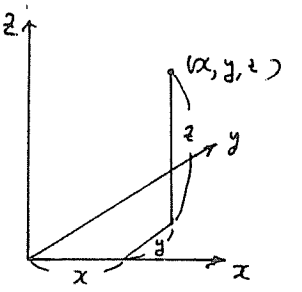




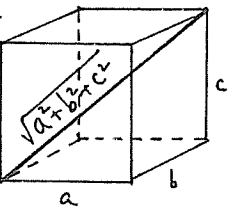
点 …… P(x, y, z)





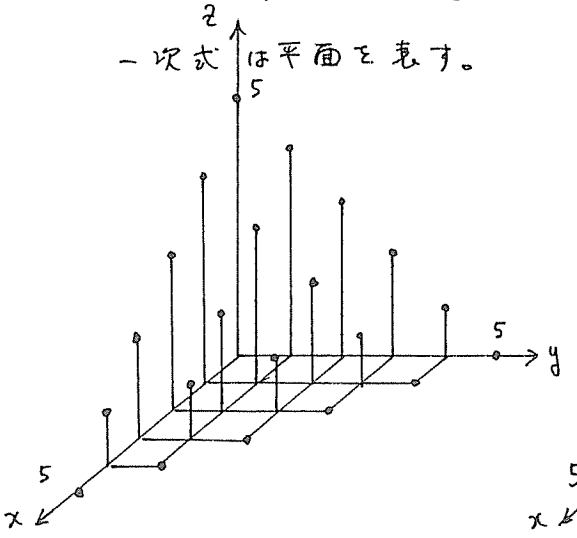


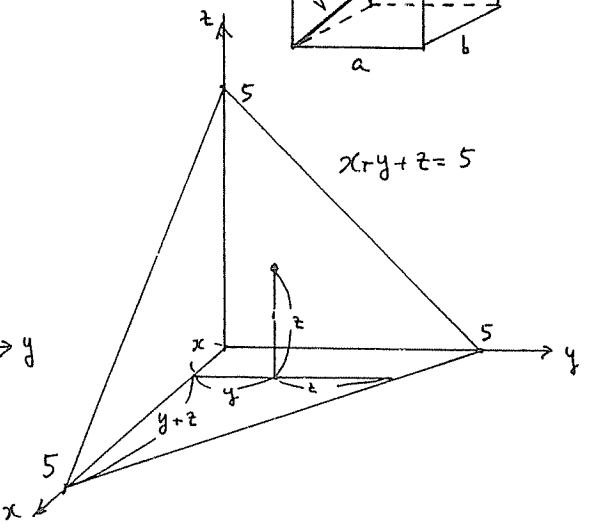
2点間の距離 …… $\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$



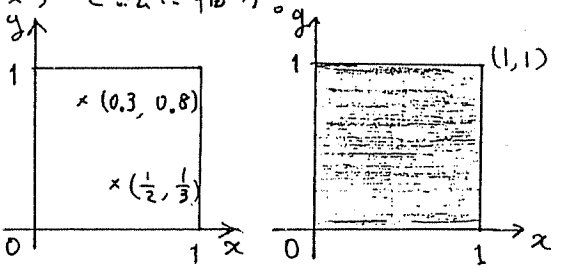
$z = 2x+3y+4$ や $x+y+z=5$ のような

一次式は平面を表す。





問5　点 (1, 1, 1), 点 (2, 3, 4) を絵に描け。



x, y が 0 と 1 の間の数のとき, 点 (x, y) は右の正方形に含まれる。

座標平面で, 不等式

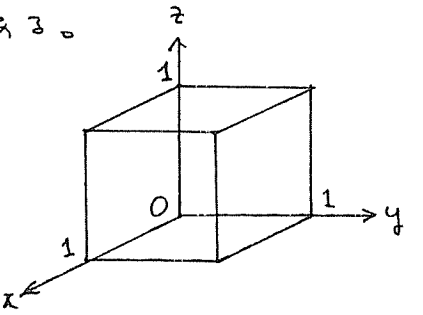
$$0 \leqq x \leqq 1, \quad 0 \leqq y \leqq 1$$

が表す図形は右上図のような正方形である。

これと同様に, 空間内で, 不等式

$$0 \leqq x \leqq 1, \quad 0 \leqq y \leqq 1, \quad 0 \leqq z \leqq 1$$

が表す図形は右のような立方体である。

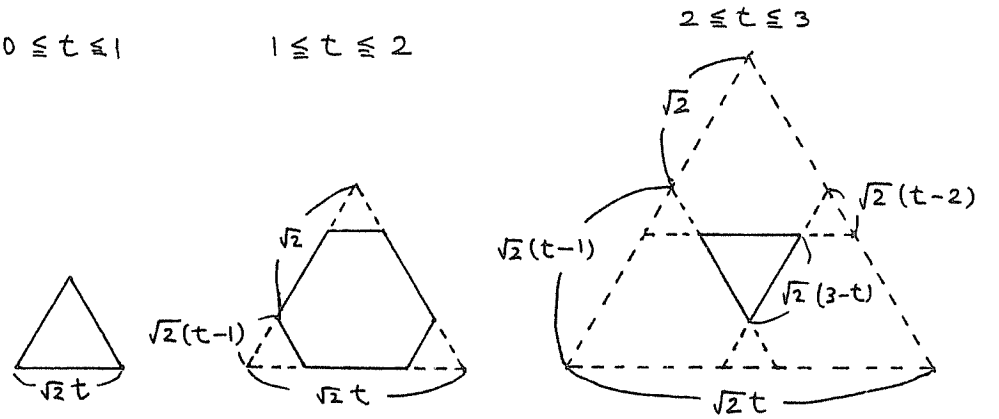


これを, 単位立方体と呼ぼう。

問6　単位立方体の頂点の座標をいえ。

単位立方体を, 平面 $x+y+z=t$ で切ったときの切り口の形は, 次のようになる (図1, 3, 6参照)。

$0 \leqq t \leqq 1$　　$1 \leqq t \leqq 2$　　$2 \leqq t \leqq 3$



4. 4次元の空間

4次元を理解するには，次の2つの方法がある。

(1) 計算を通して理解する

(2) 図形的に理解する

2つの方法があるといっても，これらは車の両輪にたとえられる。この2つの方法を併行して進めることにより，真の理解が得られるであろう。

図形について議論するときの世界を考えると，直線，平面，空間という系列がある。

これらを，座標の側面から眺める。

	次元	基準	点の座標
直線	1次元	1本の直線	数 x
平面	2次元	直交する2本の直線	2数の組 (x, y)
空間	3次元	直交する3本の直線	3数の組 (x, y, z)
ア	イ	ウ	エ

この系列をもっと伸ばすことを考える。一目で［　］が埋められるわけはないので，攻めやすい個所を探して埋めていく。

［イ］にあてはまるものは，意味はともかく，4次元であろう。［エ］は，4つの数の組を考えればよい。

［ウ］は困った。直交する4本の直線といっても，現実にはそんなものは無いからである。

この「現実には無い」というのが我々の感覚であるが，ここが曲者である。そこで，「現実にある」というのはどういうことか反問してみよう。

これまで，我々は「直線」とか「平面」という言葉を使って来たが，我々が思っているような完璧な直線，完璧な平面というのは，この世のどこに存在するのだろうか。また，我々が住んでいるこの世界は，本当に座標が入るような世界なのであろうか。

つきつめて考えると，直線，平面，空間といったものも，存在するのやら存在しないのやらあやしくなってくる。

以下，独断と偏見を恐れずに言おう。

存在というこの大きな課題を，ある人は哲学的に，ある人は宗教的に考える。それはともかく，数学では

論理的に構成できるものは存在する

存在すると仮定しても矛盾のないものは存在する

という姿勢をとる。

それゆえ，数学では［エ］を拠点にして，第4番目の世界［ア］を構成する。

● 4次元空間

点は4つの数の組 (x, y, z, w) で表される。

2点 (x_1, y_1, z_1, w_1), (x_2, y_2, z_2, w_2) の間の距離は

$$\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2+(w_2-w_1)^2}$$

で定義される。

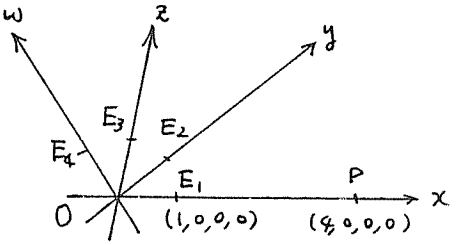
問7 次の2点の距離を求めよ。

(1) $(1, 0, 2, 2)$, $(0, 2, 4, 6)$

(2) $(a, 0, 0, 0)$, $(0, b, 0, 0)$

この空間では, $(x, 0, 0, 0)$ という形の点全体は直線をなすと考える。たとえば,

原点 $O(0, 0, 0, 0)$, 点 $E_1(1, 0, 0, 0)$, 点 $P(4, 0, 0, 0)$



についてみると, 点Pは原点Oを中心として点E_1を4倍の遠くへおしやった点と考えるのである。

上で考えた直線がx軸である。

y軸, z軸, w軸も同様に理解する。

一般に, 直線は, ベクトル方程式

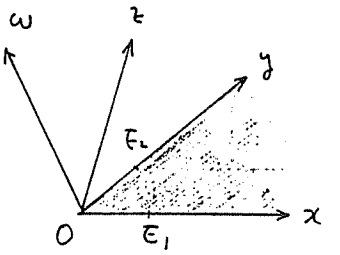
$\vec{x} = \vec{x}_0 + t\vec{a}$ (点$\vec{x}_0$を通り, $\vec{a}$の方向をもつ直線)

で定義する。

問8 方程式 $\dfrac{x-x_0}{x_1-x_0} = \dfrac{y-y_0}{y_1-y_0} = \dfrac{z-z_0}{z_1-z_0} = \dfrac{w-w_0}{w_1-w_0} = t$ を,

ベクトル $\vec{x} = (x, y, z, w)$, $\vec{x}_0 = (x_0, y_0, z_0, w_0)$, $\vec{x}_1 = (x_1, y_1, z_1, w_1)$ を用いて表せ。

4次元空間の点 $(x, y, 0, 0)$ は平面上の点 (x, y) と対応するから，点 $(x, y, 0, 0)$ の全体は平面をなすと考える。これは，3点 O, $E_1(1,0,0,0)$, $E_2(0,1,0,0)$ できまる平面である（右図）。



一般に，平面は，ベクトル方程式

$$\vec{x} = \vec{x}_0 + t\vec{a} + s\vec{b} \quad (\vec{x}_0 \text{を通り，} \vec{a}, \vec{b} \text{に平行な平面})$$

で定義する。

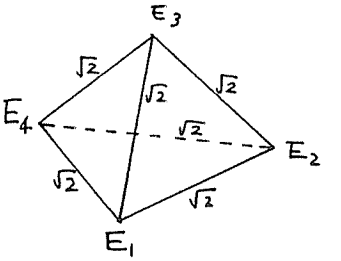
4次元空間内に3点 $A(a_1, a_2, a_3, a_4)$, $B(b_1, b_2, b_3, b_4)$, $C(c_1, c_2, c_3, c_4)$ をきめると，この3点を含む平面がきまり，線分 AB, BC, CA の長さもきまるから，$\triangle ABC$ がきまってくる。

問9　$A(1,0,2,1)$, $B(2,2,6,5)$, $C(3,0,6,5)$ を頂点とする三角形 ABC の各辺の長さを求め，$\triangle ABC$ と同じ三角形を紙の上に作図せよ。

三角形が直角三角形であるかどうかは，ピタゴラスの定理で判定できる。

問10　4点 $E_1(1,0,0,0)$, $E_2(0,1,0,0)$, $E_3(0,0,1,0)$, $E_4(0,0,0,1)$ から2点をとり出す。この2点と原点 O の3点できまる三角形は，直角二等辺三角形であることを証明せよ。

◦超平面



問10で考えた4点 E_1, E_2, E_3, E_4 は，どの2点間の距離も $\sqrt{2}$ だから，これらは正四面体の頂点になっているといえる。

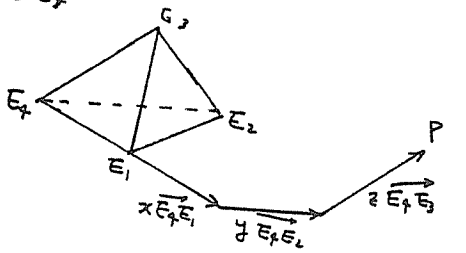
この4点を含む空間は方程式 $x+y+z+w=1$ で与えられる。実際，$x+y+z+w=1$ をみたす点 $P(x, y, z, w)$ に対し，

$$(x, y, z, w) = (x, y, z, 1-x-y-z)$$

$$= x(1,0,0,-1) + y(0,1,0,-1) + z(0,0,1,-1) + (0,0,0,1)$$

$$\overrightarrow{OP} = x\overrightarrow{E_4E_1} + y\overrightarrow{E_4E_2} + z\overrightarrow{E_4E_3} + \overrightarrow{OE_4}$$

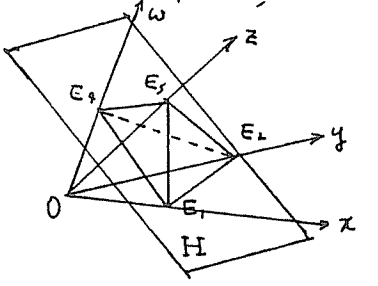
$$\overrightarrow{E_4P} = x\overrightarrow{E_4E_1} + y\overrightarrow{E_4E_2} + z\overrightarrow{E_4E_3}$$



が成り立つ。この式は，点 E_4 を出発点として E_4E_1 に平行に何がしか進み，E_4E_2 に平行に何がしか進み，最後に，E_4E_3 に平行に何がしか進めば，点Pに行きつくことを示している。

方程式 $x+y+z+w=1$ が定める空間は $\overrightarrow{E_4E_1}$, $\overrightarrow{E_4E_2}$, $\overrightarrow{E_4E_3}$ の3つの方向に拡がる空間だから3次元の空間である。

一般に，方程式 $ax+by+cz+dw=e$ が定める空間を，超平面という。



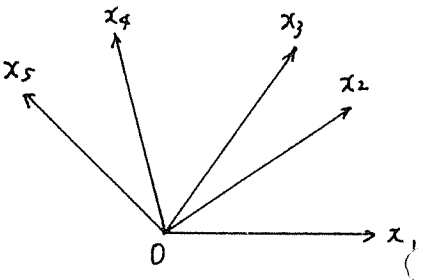
4次元空間では，超平面は3次元である。

問11　上の四面体 $E_1E_2E_3E_4$ に対し，次の点はどんな点か。

$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0\right)$，$\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0\right)$，$\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$

● 5次元の空間

4次元の空間が理解できれば，5次元の空間も同様に理解できよう。



5次元空間の点は5つの数の組 $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ で表される。

2点間の距離もこれまでと同様に定義できる。

ここでも，1次方程式 $a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+a_4x_4+a_5x_5=b$ で定まる空間を超平面という。

5次空間では，超平面は4次元である。

5　多次元立方体

点がまっすぐ動くと線分ができる。

線分が，それと垂直な方向に動くと，正方形ができる。

正方形が，それと垂直な方向に動くと，立方体ができる。

立方体を多少デフォルメして描くと，左下図のようになる。

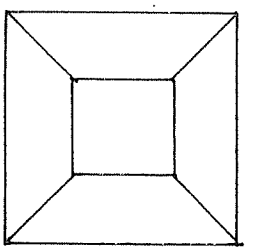
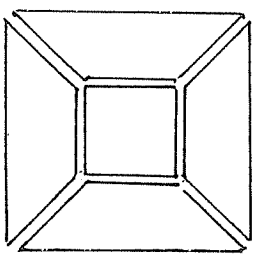


図7



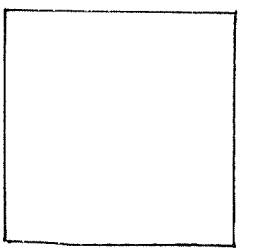
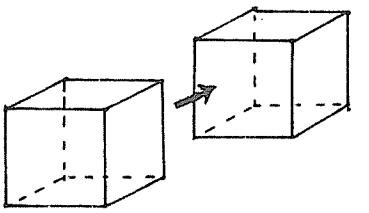


図8

図7と図8のように分解してみると，立方体が6つの正方形の面をもつことがわかる。このように平面的な図6をよく観察することにより，立方体を構成している次の要素を見出すことができる。

点	8
辺（線分）	12
面（正方形）	6
立方体	1

平面上に図7の図形を描き，まん中の正方形をつまんで上へ引っぱると立方体ができる。



立方体が，それと垂直な方向に動いてできるのが4次元の立方体である。もちろん，この操作ができるのは，4次元空間においての話である。

これを直観的に理解するために，右のような，立方体の中に立方体が入っている形を考える。

ここで，まん中の立方体をつまんで，外への方向に引っぱると4次元の立方体

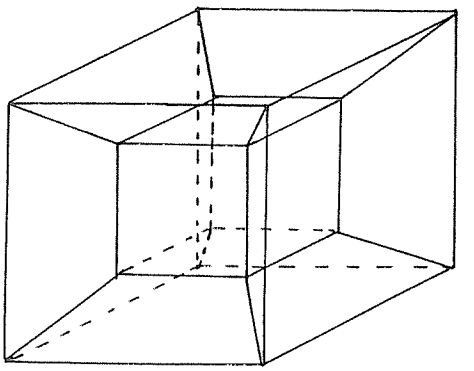


図9

ができる。

この図を観察することにより，4次元立方体を構成する次の要素を見出すことができる。

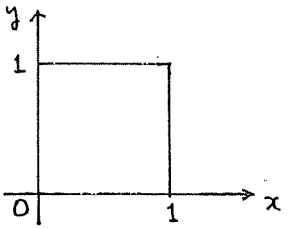
点	16
辺（線分）	32
面（正方形）	24
超平面（立方体）	8
4次元立方体	1

● 立方体の構成要素

上の表を，別の観点から検討してみたい。このために，話を前の前の段階，つまり正方形に戻して考えよう。

右図の正方形の頂点は

(0, 0), (1, 0), (0, 1), (1, 1)

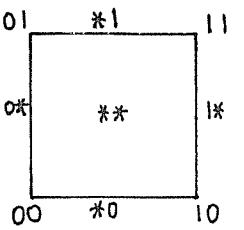


である。これらを 00, 10, 01, 11 と記号化して表そう。

頂点(0,0)と(1,0)を結ぶ辺は，座標

(*, 0)　*は0から1までの数

の点全体である。これを *0 と記号化して表そう。他の辺についても同様である。



正方形自身は (*, *) と表される点の全体（*は0～1）だから，** と表す。

立方体の頂点は,

□□□　　□は0または1

と表されるから, 個数は $2\times2\times2=8$

辺は

＊□□　　□＊□　　□□＊

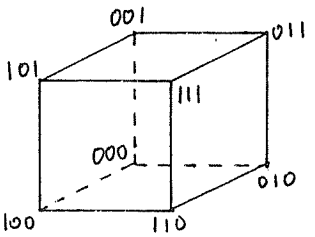
のどれかの形で表されるから, 個数は $3\times2\times2=12$

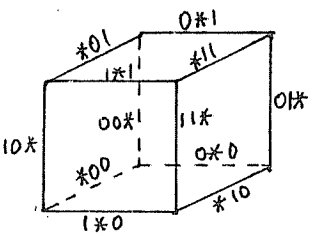
面は,

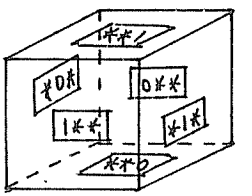
＊＊□　　＊□＊　　□＊＊

のどれかの形で表されるから, 個数は $3\times2=6$

立方体自身は ＊＊＊ と表される。







4次元立方体については,

頂点	□□□□	$2^4=16$ 個
辺	＊□□□ など	${}_4C_1\times2^3=32$
面	＊＊□□ など	${}_4C_2\times2^2=24$
立方体	＊＊＊□ など	${}_4C_3\times2=8$
4次元立方体	＊＊＊＊	1

問12　5次元立方体について, 上と同様のことを調べよ。

4次元立方体の構成要素を調べるのに、これまで、2通りの方法を示した。図9で見る方法と、座標の観点から見る方法である。ああいう見方もあれば、こういう見方もあるといった語り口が、僕は好きだ。どちらの見方が好きかは、人によってまちまちであろう、しかしそれは問題ではない、いろいろな見方をすることによって、他方の見方が強化されイメージは拡がっていく、それが言いたい。

ものごとを一般化、抽象化しようとするとき、ある見方ではできないが、他の見方ではできることがある。あるいは、今までとは違った観点を発見することによって、一般化に成功することもある。

6　4次元立方体を切る

4次元立方体を超平面で切ったときの切り口の形を調べてみよう。

4次元空間における単位立方体

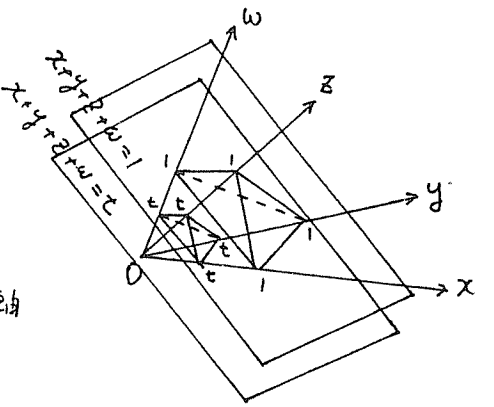
$$0 \leq x \leq 1,\quad 0 \leq y \leq 1,\quad 0 \leq z \leq 1,\quad 0 \leq w \leq 1$$

を考える。超平面は対角線に垂直な超平面

$$x+y+z+w = t$$

に限定して考える。

$t < 0$ のとき、切り口はない。



$t=0$ のとき,

切り口は1点（原点だけ）。

$0<t\leq 1$ のとき

超平面 $x+y+z+w=t$ と座標軸との交点は

$(t,0,0,0)$, $(0,t,0,0)$, $(0,0,t,0)$, $(0,0,0,t)$

で，これらは立方体の上にある。

切り口は，これらを頂点とする正四面体。

とくに，$t=1$ のときが12ページで考えた正四面体。

$1<t<2$ のとき,

正四面体の隅から，小さい正四面体を落とした形（図10）。

$t=2$ のとき,

正八面体（図11）。超平面は立方体の中心 $(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ を通る。

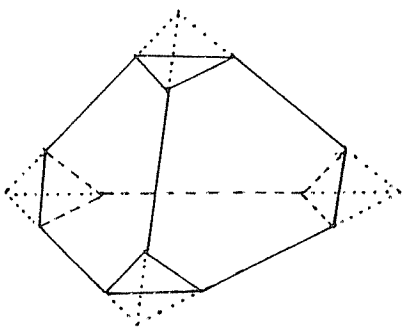


図10

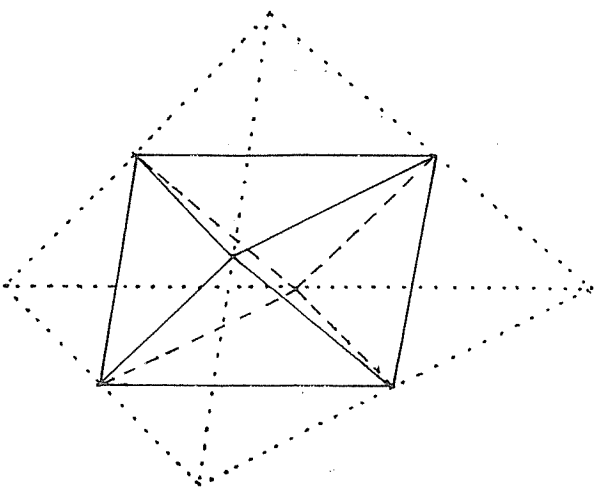


図11

$2 < t < 3$ のとき、(図12)

$t = 3$ のとき、正四面体 (図13)

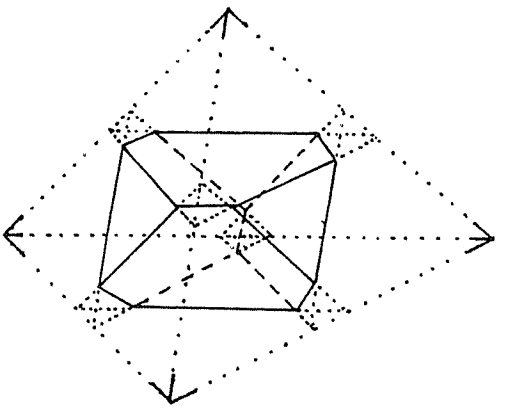


図12

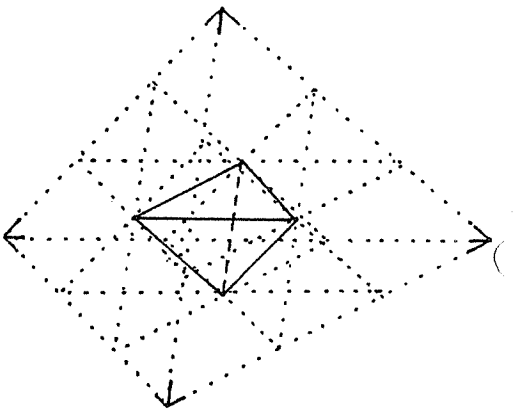


図13

$3 < t < 4$ のとき、正四面体 (図14)

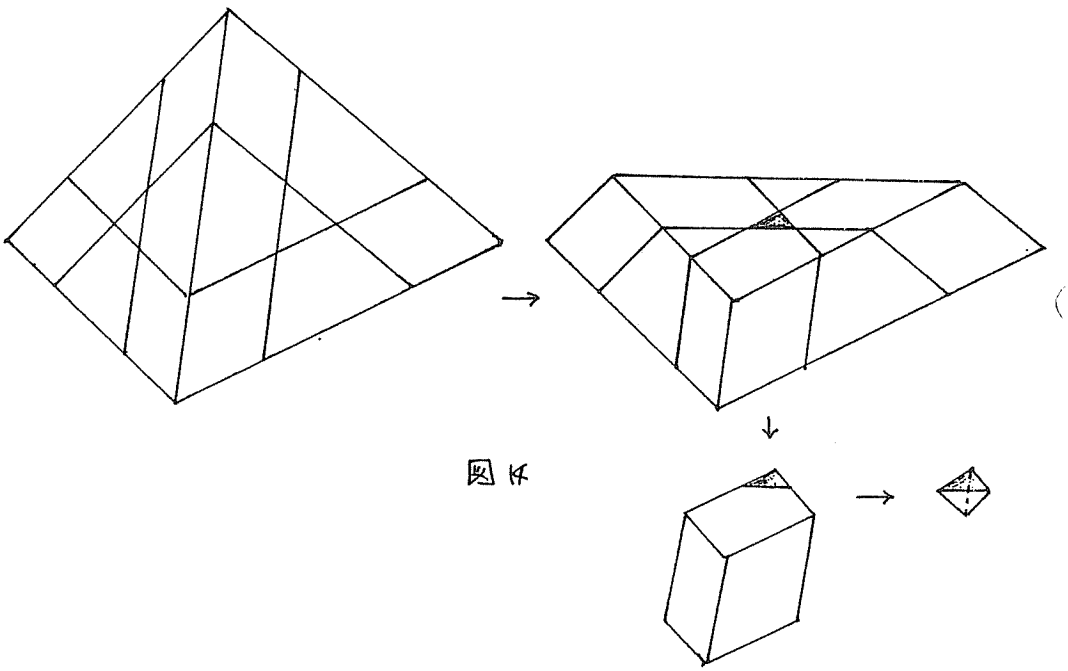


図14

$t = 4$ のとき、1点

$t > 4$ のとき、切り口はなし。

● 切り口の体積

4次元空間において,

$0 \leqq x$, $0 \leqq y$, $0 \leqq z$, $0 \leqq w$, $x+y+z+w = t$

で表される部分 a (四面体) の体積を $T(t)$ とし,

$0 \leqq x \leqq 1$, $0 \leqq y \leqq 1$, $0 \leqq z \leqq 1$, $0 \leqq w \leqq 1$, $x+y+z+w = t$

で表される部分 (四次元立方体の切り口) の体積を $S(t)$ とする。

体積は相似比の3乗に比例するから,

$$T(t) = T(1)\, t^3$$

$T(1)$ は, 1辺が $\sqrt{2}$ の正四面体の体積である。

$0 \leqq t \leqq 1$ のとき,

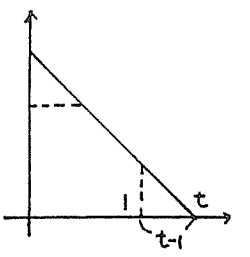
$$S(t) = T(t) = T(1)\, t^3$$

$1 \leqq t \leqq 2$ のとき,

図10のように大きな四面体から, 4つの小さな四面体を切り落す。5ページと同様に考えると, ランプ (ここでは4次元を照らすランプ) を, 点

$(1,0,0,0)$, $(0,1,0,0)$, $(0,0,1,0)$, $(0,0,0,1)$

においたとき照らされる部分が, 4つの小さな四面体である。この四面体の大きさは, 右の平面図からわかる。よって



$$S(t) = T(t) - 4 \times T(t-1)$$

$$= T(1)\{t^3 - 4(t-1)^3\}$$

$2 \leqq t \leqq 3$ のとき,

$t = 2$ のとき超平面は立方体の中心を通る。

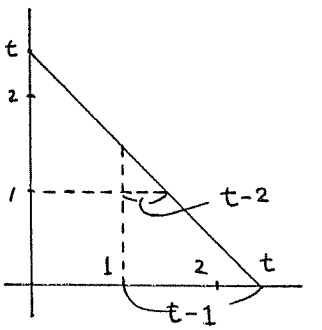
よって, 考えている図形の対称性から, いつでも

$$S(t) = S(4-t)$$

が成り立つ。

だから, $S(t)$ はもう決まったも同然である。しかし, のちのちのために, 図1に基く計算をしてみよう。

図1では, 切り落とすべき四面体が重なり合っている。



だから $S(t) = T(t) - 4 \times T(t-1)$ としたのでは引きすぎになる。引きすぎた分は足してやらねばならない。

重なり合っている部分は6つの四面体で, その大きさは右上の平面図からわかる。

$$S(t) = T(t) - 4 \times T(t-1) + 6 \times T(t-2)$$

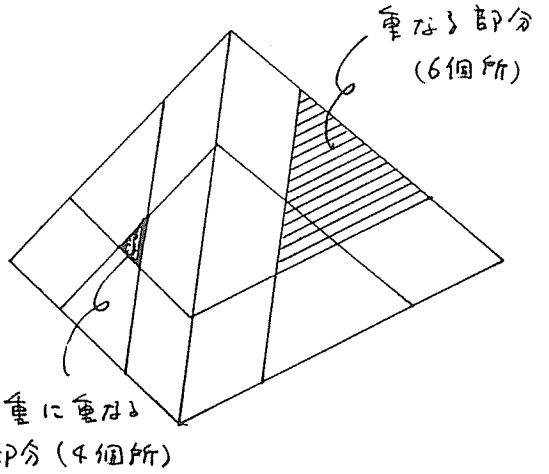
$$= T(1)\{t^3 - 4(t-1)^3 + 6(t-2)^3\}$$

問13　$2 \leqq t \leqq 3$ のとき $S(t) = S(4-t)$ であることを, 計算によって確かめよ。即ち, 次の恒等式を証明せよ。

$$T(t) - 4T(t-1) + 6T(t-2) = T(4-t) - 4T(3-t)$$

$3 \leqq t \leqq 4$ のとき

図14に基く計算をしてみよう。



切り落とすべき四面体が3重に重なる部分が出てくる。

次の計算はいずれも間違いである。

$S(t) = T(t)$　　話にならない

$S(t) = T(t) - 4 \times T(t-1)$　　引きすぎ

$S(t) = T(t) - 4 \times T(t-1) + 6 \times T(t-2)$　足しすぎ

ここで足しすぎというのは，3重に重なる部分を，2倍にして足しているからである。

正しくは

$$S(t) = T(t) - 4 \times T(t-1) + 6 \times T(t-2) - 4 \times T(t-3)$$
$$= T(1)\{t^3 - 4(t-1)^3 + 6(t-2)^3 - 4(t-3)^3\}$$

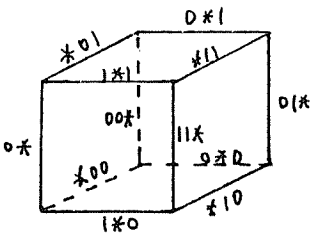
問14　$3 \leqq t \leqq 4$ のとき $S(t) = S(4-t)$ であることを，計算によって確かめよ。

最後に求めた $S(t)$ の式は興味深い形をしている。ここに出てくる係数 1, 4, 6, 4（符号は無視）は，どこかでお目にかかってはいないだろうか。

7 切り口の頂点の座標

単位立方体を平面 $x+y+z=t$ で切ったときの切り口には、正三角形や六角形が現われる。これらの図形の頂点の座標を求めよう。

17ページで調べたように、単位立方体の辺は、右図のように表される。



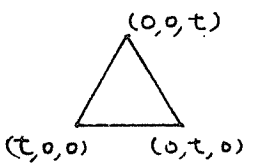
切り口の図形の頂点は、これらの辺と平面 $x+y+z=t$ の交点に他ならない。

だから、切り口の図形の頂点 (x, y, z) を求めるには、

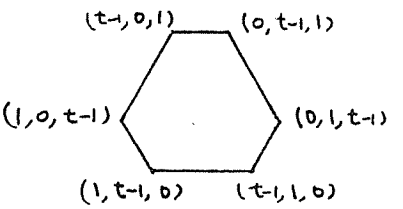
$(0, 0, *)$, $(0, 1, *)$, $(0, *, 1)$ など

の形をした $x+y+z=t$ の解を求めればよい。

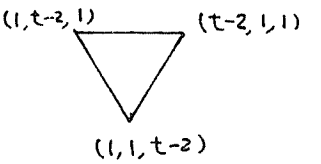
$0 < t \leqq 1$



$1 < t < 2$



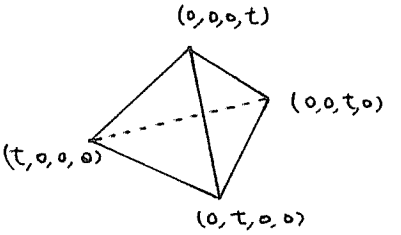
$2 \leqq t < 3$



問15 上の図をもとにして、立方体の切り口の図形の周の長さを求めよ。

次に、4次元の単位立方体を超平面 $x+y+z+w=t$ で切った場合について、上と同様のことを考えてみよう。

4次元の場合でも，切り口の図形の頂点は，立方体の辺と超平面との交点である。



$0 < t \leq 1$ のとき

頂点は $(t, 0, 0, 0)$ など 4個

$1 < t < 2$ のとき

頂点は $(1, t-1, 0, 0)$ など 12個

このうち，$x=0$ となるものは6つあり六角形をなす。

$x=1$ となるものは3つあり正三角形をなす。

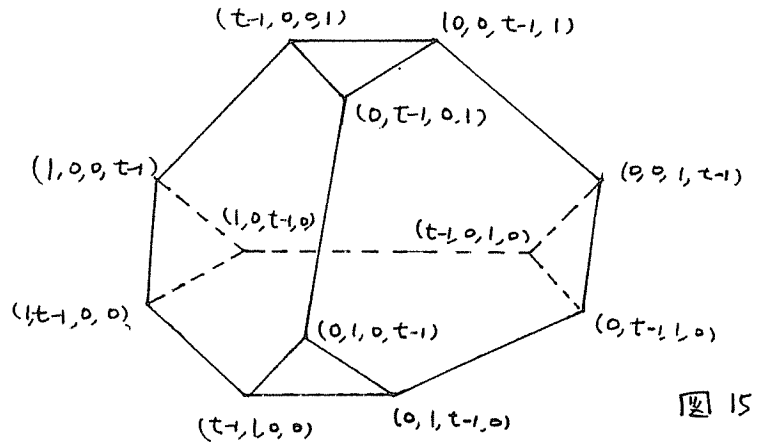


図15

$t = 2$ のとき

頂点は $(1, 1, 0, 0)$ など 6個

$2 < t < 3$ のとき

頂点は $(1, 1, t-2, 0)$ など 12個

このうち，$x=0$ となるものは3つあり 正三角形

$x=1$ となるものは6つあり 六角形

問16 図11に各頂点の座標を書き込め。

8 単体

点，線分，三角形，四面体の系列の図形を単体という。

点，線分，三角形，四面体をそれぞれ，0単体，1単体，2単体，3単体という。接頭辞 0，1，2，3 はそれぞれの図形の次元を表している。

三角形は一般の位置にある3点を結んでできる図形である。

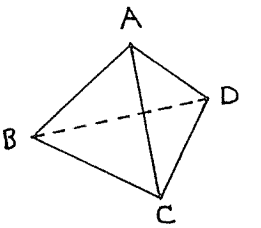
四面体は一般の位置にある4点を結んでできる図形である。

4次元以上の空間で，一般の位置にある5点を結んでできる図形を4単体という。

5単体，6単体は，どう定義したらよいか。

- 単体の面

四面体ABCDでは，



Aの対面は　三角形 BCD

Bの対面は　三角形 ACD

Cの対面は　三角形 ABD

Dの対面は　三角形 ABC

となっている。つまり，語(ワード) ABCD から1つの文字をはずすと，その対面が得られる。

このことは，三角形ABCや線分(AB)についても同様である。

4次元の単体ABCDEについても，ABCDEからAをはずすと，Aの対面である四面体BCDEが得られる。

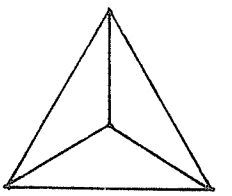
四面体ABCDの構成要素は，たんに語ABCDをいじるだけでわかる。

頂点	(0単体)	A, B, C, D	${}_4C_1 = 4$ 個
辺	(1単体)	AB, AC, AD, BC, BD, CD	${}_4C_2 = 6$
面	(2単体)	ABC, ABD, ACD, BCD	${}_4C_3 = 4$
四面体	(3単体)	ABCD	${}_4C_4 = 1$

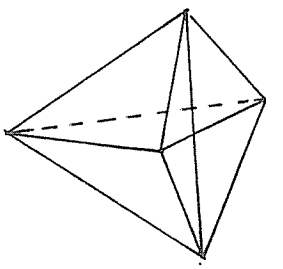
問17　4単体ABCDEの構成要素を調べよ。

• 3単体，4単体の図形的理解

三角形の内部に1点をとり，他の頂点と結ぶ。内部の点を上にもち上げると，四面体（3単体）ができる。

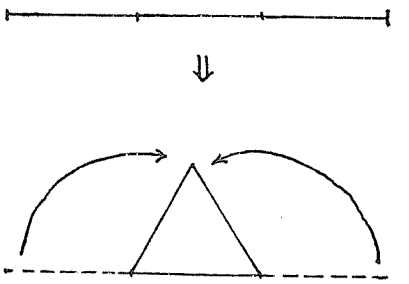


四面体の内部に1点をとり，他の頂点と結ぶ。内部の点をおさえてその方向に引っぱると4単体ができる。

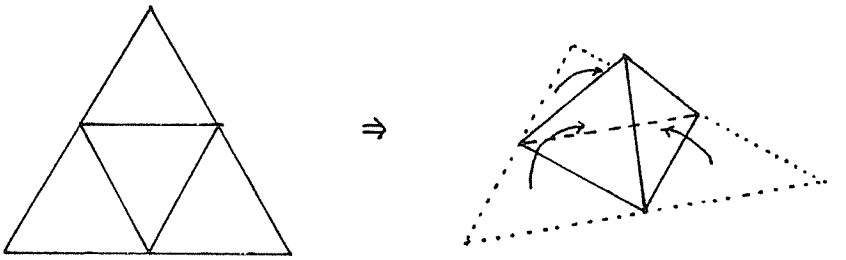


• 単体の展開図

1つの線分の両端に同じ長さの線分をくっつけ，両側の線分を起こしてやると，三角形ができる。



正三角形のまわりに，同じ大きさの正三角形を3つくっつけ，まわりの三角形を起こすと，四面体ができる。



正四面体のまわりに，同じ大きさの正四面体を4つくっつけ，まわりの正四面体を（4次元空間の中で）起こすと，4単体ができる。

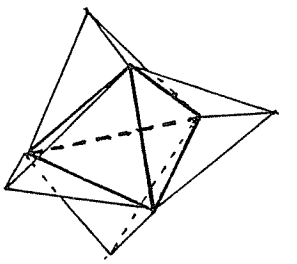


図 16

できるはずである，僕はまだ見たことはないが。

● 標準単体

単体を座標空間に押し込むことを考えよう。

三角形（2単体）は平面内に入れることができる。しかし，正三角形を平面内に押し込むと，頂点の座標毎 $\sqrt{\ }$ を使わないと表すことができない。また，正方形とちがって，正三角形は座標平面内に押し込んでも，座標軸との関係で，どうも座りが悪い。

ところが，次元を1つあげて，座標空間の中に正三角形を入れることにすると，うまく居座ってくれる。

3点

$(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$

は正三角形の頂点になっている。3点の座標がそこひいきなく対称的に表されるのは, うれしいし, また何かと都合がよろしい。

上の3点できまる三角形を標準2単体という。

標準3単体は, 次の4点できまる単体である。

$(1,0,0,0)$, $(0,1,0,0)$, $(0,0,1,0)$, $(0,0,0,1)$

問18 標準4単体, 標準5単体はどう定義したらよいか。

9 5次元立方体を切る

5次元の単位立方体を, 超平面

$$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=t$$

で切ったときの切り口の図形を考える。

この図形の頂点は, 立方体の辺上にあるまら, それを手掛りに考えていこう。

$0<t\leq 1$ のとき,

頂点は $(t,0,0,0,0)$ などの5点である。

したがって, 切り口は4単体である。

展開図でみると, 28ページの図16。

$1 < t < 2$ のとき,

頂点は $(1, t-1, 0, 0, 0)$ などの20点である。

頂点のうち $x_1 = 0$ となるものは25ページの図15に示す位置関係にある。よって, それらは八面体の頂点をなす。

頂点のうち $x_1 = 1$ となるものは4つあって, それらは正四面体の頂点をなす。図15のてっぺんの三角形にぴったり乗る大きさの正四面体(単体)である。

以上により, 5次元単位立方体の各面(4次元立体)と超平面との交わりの形がわかった。

よって, 切り口の形は,

5つの八面体と, 5つの正四面体

を, 4次空間内でうまく貼り合わせた(4次元的)図形である。

貼り合わせただけでは, 中はからっぽなので, 本当は内部も考えに入れないといけない。

$t = 2$ のとき,

頂点は $(1, 1, 0, 0, 0)$ などの10点である。

このうち, $x_1 = 0$ となるものは正八面体の頂点をなす.

また $x_1 = 1$ となるものは正四面体の頂点をなす。

これで, 単位立方体の各面と超平面と交わりの形がわかった。

よって, 切り口の形は,

5つの正八面体と，5つの正四面体

を境界とする四次元的図形である。

ここでは，正八面体と正四面体の一辺の長さは同じである。

$2<t<3$ のとき，

頂点は $(1,1,t-2,0,0)$ など30点

このうち $x_1=0$ となるものは八面体の頂点をなす。

また $x_1=t$ となるものは八面体の頂点をなす。

このことから，切り口の形は

2種類5つづつの八面体

を境界としてもつ。とくに $t=\frac{3}{2}$ のときは，同じ大きさの八面体10個になる。

$t\geq 3$ の場合は，$t\leq 2$ の場合に帰せられる。

(後記)

中学生や高校生にもわかる説明，と思って書きはじめたがそれ程やさしくは書けなかったようである。

しかし，上の話はかなり感覚的なものであるから，話し方次第で理解してもらえると期待している。