数学入門公開講座

昭和60年7月24日 (水) から8月1日 (木) まで

時間＼日	7月24日(水)	25日(木)	26日(金)	27日(土)	28日(日)	29日(月)	30日(火)	31日(水)	8月1日(木)
13：15～15：00	荒木	一松	一松	荒木	休講	松浦	松浦	松浦	松浦
15：00～15：15	休憩					休憩			
15：15～17：00	一松	一松	荒木	荒木		笠原	笠原	笠原	笠原

主催　京都大学数理解析研究所

講師及び内容

1. 四元数の話　（7時間）　京都大学数理解析研究所教授　荒木不二洋

実数から複素数へという数の概念の拡大の延長線上にある四元数。
パスカルの定理の証明や剛体の回転などへの応用を解説する。

2. 四元数の整数論　（7時間）　京都大学数理解析研究所教授　一松　信

ハミルトン（Hamilton）が導入した四元数は，当初期待された程には有用でなかった。しかしフルヴィッツ（Hurwitz）が考察した四元数整数は，乗法が可換でないという点を除いて，普通の整数とよく似た性質が多い。余り知られていないこの理論を紹介し，整数の性質を反省するとともに，幾つかの応用にも触れたい。

3. 金太郎飴と有平糖（アルヘイトウ）　（7時間）　京都大学数理解析研究所教授　松浦重武

上記表題のもとに，Brunn-Minkovski の不等式とその応用について述べる。

4. 磁針のずれの幾何学　（7時間）　京都大学教養部教授　笠原晧司

北極と北磁極のずれを見込む角が一定である点の軌跡について考察する。

時間割

時間＼日	7月24日(水)	25日(木)	26日(金)	27日(土)	28日(日)	29日(月)	30日(火)	31日(水)	8月1日(木)
13：15～15：00	荒木	一松	一松	荒木	休講	松浦	松浦	松浦	松浦
15：00～15：15	休憩					休憩			
15：15～17：00	一松	一松	荒木	荒木		笠原	笠原	笠原	笠原

4.　磁針のずれの幾何学　(7時間)

京都大学教養部教授　笠　原　晧　司

1985, JULY 29, 30, 31, AUGUST 1　15:15-17:00

磁針のずれの幾何学

地球の北極、南極と、北磁極点、南磁極点はずれている。理科年表による３つの等偏角線図を示そう。(次頁参照)

もし、地球が完全な磁石で、単に北磁極と南磁極がずれているだけと仮定すると、この等偏角線はどのように分布するであろうか？　これが、これから考えようとする問題である。

南北両磁極の近くでは、この分布は平面の場合とよく似た形をとるであろう。しかし、赤道付近ではかなりちがってくるはずである。Ｎを北極点、Ｎ'を北磁極点とし、点Ｐから見るとき、磁針のずれの角度を計算してみよう。それには、Ｐ、Ｎを通る大円と、Ｐ、Ｎ'を通る大円を考え、Ｐでの交角を求めればよい。これを線形代数の初歩的知識だけを前提として考えることにする。

１．地球を半径１の球面Ｓとし、その上の一点 x を R^3 の単位球面上の点とみる。すると、極座標表示で

$$x = \cos\varphi\cos\theta$$
$$y = \cos\varphi\sin\theta$$
$$z = \sin\varphi$$

となる。

２．Ｓ上の２点 x、x を通る大円の、x での接ベクトル v は次の条件を満たしている。

v は x_0と x で張る平面に乗る。

v は x と直交する。

これを書き直すと

$$v \perp x_0 \times x$$
$$v \perp x$$

一般に、２つのベクトル a、b と直交するベクトルは $a\times b$ である。従って、

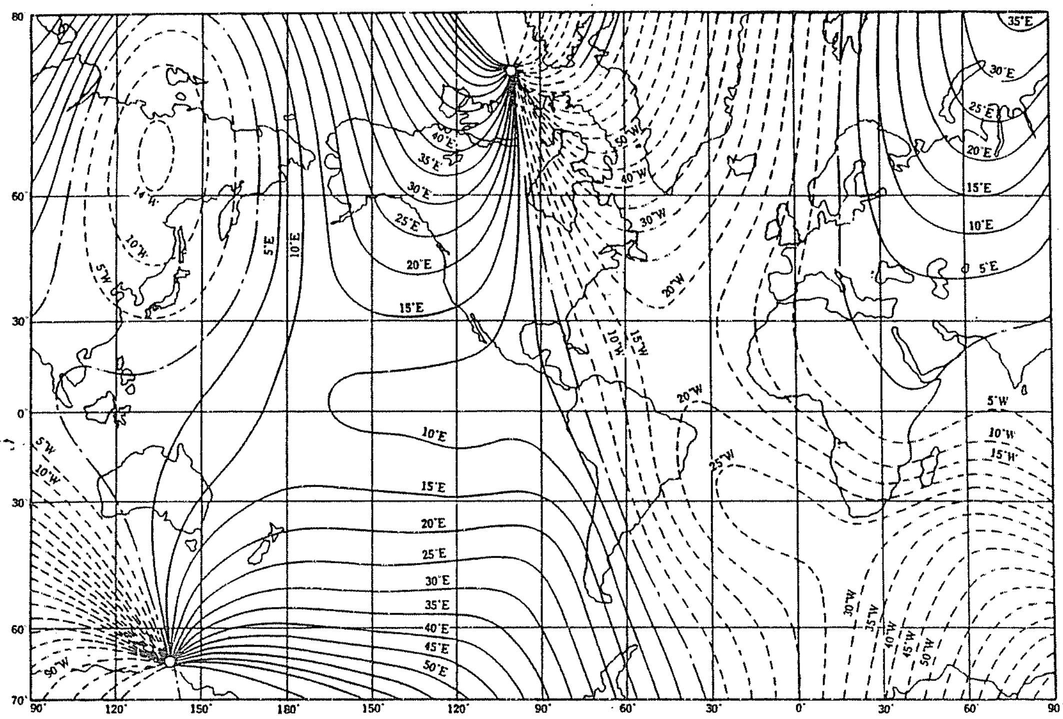
$$v = c(x_0 \times x)\times x \qquad (c \text{ は任意定数})$$

今、$x = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$、$x_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ とすると、

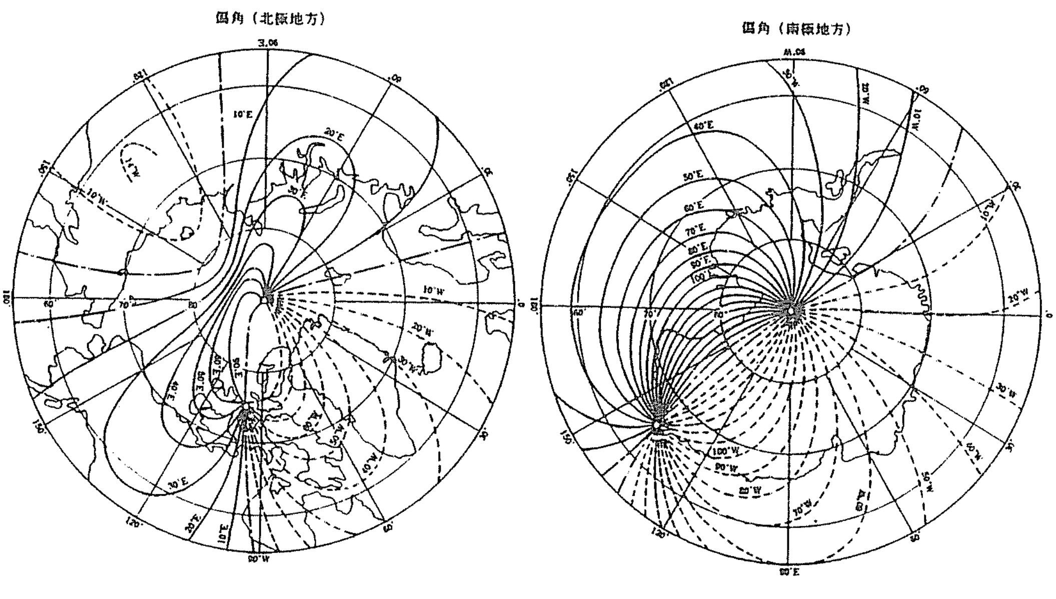
$$v = c\begin{pmatrix} (y^2 + z^2)x_0 - (y_0 y + z_0 z)x \\ (z^2 + x^2)y_0 - (z_0 z + x_0 x)y \\ (x^2 + y^2)z_0 - (x_0 x + y_0 y)z \end{pmatrix}$$

であることがわかる。特に、x_0が北極のときの v を v_nと置くと

地第24図　　偏　角（1975.0年）　　単位：度



地第25図　　極地方の地磁気分布（1975.0年）　　単位：度



$$v_n = c\begin{pmatrix} -zx \\ -yz \\ x^2+y^2 \end{pmatrix}$$

となる。

3. 一般に２つのベクトル v_1 と v_2 の間の角度 Φ の cosine は

$$v_1 \cdot v_2 = |v_1||v_2|\cos\Phi$$

で与えられる。従って、

$$\cos\Phi = \frac{v_1 \cdot v_2}{|v_1|\cdot|v_2|}$$

4．2．で考えた２つのベクトル v と v_n のなす角を考えるのだが、

(i) v_n は Nの方向を向いているように向きをとる。それには $c>0$ ととる必要がある。

(ii) x_0 は磁北極にとりたいから、北半球にあるものと仮定して一般性を失わない。従って $z_0>0$。また、回転によって、x_0 はいつでも東経 0 度にとれるから、$y_0=0$、$x_0>0$ として一般性を失わない。

(iii) v は x_0の方向を向いているような向きをとるから、$c>0$ でなければならない。

5．以上により $\cos\Phi$ を求めると、

$$v\cdot v_n = z_0(x^2+y^2)-x_0xz$$
$$|v_n|^2 = x^2+y^2$$
$$|v|^2 = 1-(x_0x+z_0z)^2$$

より

$$\cos\Phi = \frac{z_0(x^2+y^2)-x_0xz}{\sqrt{1-(x_0x+z_0z)^2}\sqrt{x^2+y^2}}$$

を得る。

6．等偏角線は5．で得た $\cos\Phi$ = 一定 = k という曲線に他ならない。これを考えよう。

$$(z_0(x^2+y^2)-x_0xz)^2 = k^2(1-(x_0x+z_0z)^2)(x^2+y^2)$$

ここで、極座標を採用することにし、

$$\begin{aligned} x &= \cos\varphi\cos\theta, & x_0 &= \cos\varphi_0>0 & & \\ y &= \cos\varphi\sin\theta, & y_0 &= 0 & & (0\le\varphi_0<\tfrac{\pi}{2}) \\ z &= \sin\varphi, & z_0 &= \sin\varphi_0>0 & & \end{aligned}$$

と置く。

そのため、$\cos\varphi=c$、$\sin\varphi=s$、$\cos\theta=x$、$\cos\varphi_0=c_0$、$\sin\varphi_0=s_0$ とかく。すると、

$$(s_0 c - c_0 s x)^2 = k^2(1-(c_0 c x + s_0 s)^2)$$

これを整理すると、

$$c_0^2(s^2+k^2c^2)x^2 - 2c_0 s_0 cs(1-k^2)x + s_0^2c^2 + k^2 s_0^2 s^2 - k^2 = 0$$

従って、

$$x = \frac{s_0 cs(1-k^2) \pm k\sqrt{s^2+k^2c^2-s_0^2}}{c_0(s^2+k^2c^2)}$$

7．これをもとにして、グラフをかいたのが下の図である。