数学入門公開講座

昭和60年７月24日 (水) から８月１日 (木) まで

日 / 時間	7月 24日 (水)	25日 (木)	26日 (金)	27日 (土)	28日 (日)	29日 (月)	30日 (火)	31日 (水)	8月 1日 (木)
13：15～15：00	荒木	一松	一松	荒木	休講	松浦	松浦	松浦	松浦
15：00～15：15	休憩					休憩			
15：15～17：00	一松	一松	荒木	荒木		笠原	笠原	笠原	笠原

主催　京都大学数理解析研究所

講 師 及 び 内 容

1. 四元数の話 （7時間）

京都大学数理解析研究所教授　荒 木 不 二 洋

実数から複素数へという数の概念の拡大の延長線上にある四元数。

パスカルの定理の証明や剛体の回転などへの応用を解説する。

2. 四元数の整数論 （7時間）

京都大学数理解析研究所教授　一 松 　 信

ハミルトン (Hamilton) が導入した四元数は，当初期待された程には有用でなかった。しかしフルヴィッツ (Hurwitz) が考察した四元数整数は，乗法が可換でないという点を除いて，普通の整数とよく似た性質が多い。余り知られていないこの理論を紹介し，整数の性質を反省するとともに，幾つかの応用にも触れたい。

3. 金太郎飴と有平糖(アルヘイトウ) （7時間）

京都大学数理解析研究所教授　松 浦 重 武

上記表題のもとに，Brunn-Minkovski の不等式とその応用について述べる。

4. 磁針のずれの幾何学 （7時間）

京都大学教養部教授　笠 原 晧 司

北極と北磁極のずれを見込む角が一定である点の軌跡について考察する。

時 間 割

時間 ＼ 日	7月 24日 (水)	25日 (木)	26日 (金)	27日 (土)	28日 (日)	29日 (月)	30日 (火)	31日 (水)	8月 1日 (木)
13：15～15：00	荒木	一松	一松	荒木	休講	松浦	松浦	松浦	松浦
15：00～15：15	休憩					休憩			
15：15～17：00	一松	一松	荒木	荒木		笠原	笠原	笠原	笠原

3. 金太郎飴と有平糖(アルヘイトウ)　(7時間)

京都大学数理解析研究所教授　松　浦　重　武

1985, JULY 29, 30, 31, AUGUST 1　13:15-15:00

昭和60年度(第9回)数学入門公開講座テキスト(京都大学数理解析研究所，昭和60年7月29日～8月1日開催)

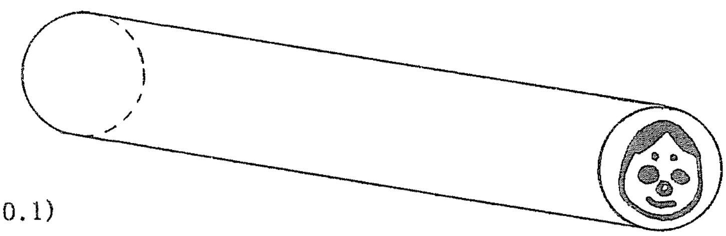
金太郎飴(あめ)と有平糖(アルヘイトウ)

京都大学数理解析研究所　松　浦　重　武

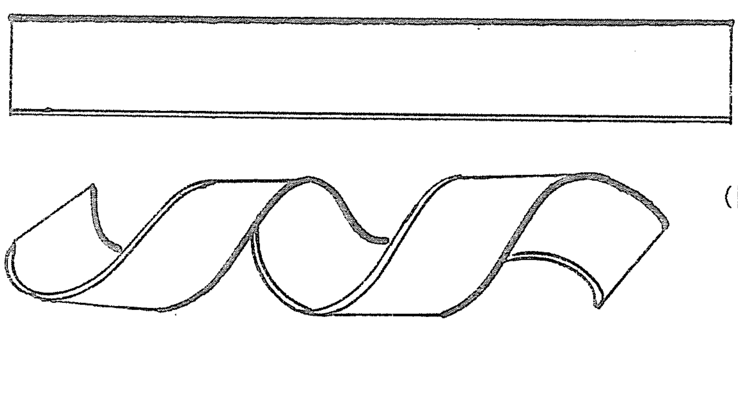
§0.　はじめに

表題に掲げた菓子名は、この頃では、とくに若い人達の間では、なじみの薄いものであろう。これらは、筆者自身も、祭の日にしかお目に掛ったことはない。しかし、今でも大阪では、十日恵比寿(エビス)の祭には、神社の境内の出店において、売られている（という話である）。

金太郎飴は、円柱状の飴で、円柱の外側は赤い。また断面にはつねに金太郎（坂田金時(サカタノキントキ)）の絵が現われるのが特徴である（図0.1)。もっとも、関西では、金太郎の図柄よりもお多福の図柄の方が多い〔すなわち、「お多福飴」である〕。金太郎飴（あるいは、お多福飴）に対して、有平糖（ポルトガル語 alfeloa）は、もともと板状の飴をねじって作ったものである（図0.2)。



（図0.1)



（図0.2)

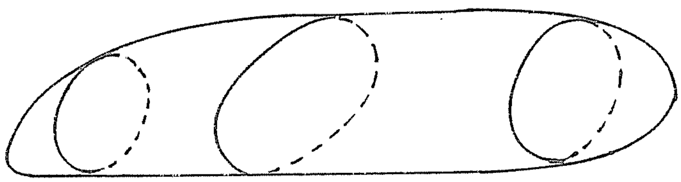
その板の両側は、赤（または赤と青）に色がつけてあるので、ちょっと理髪店の回転式の看板のような工合になっている。

これらを食べる（舐める）とき、見掛けの大きさに比べて、有平糖はすぐになくなる。これは、断面積が小さいことから、理解出来る（全量が小さい）。

金太郎飴と有平糖の幾何学的な形の共通点は、その断面の形が（したがって、断面積も）一定なことである。異なる点は、金太郎飴は立体図形として凸（トツ）なのに、有平糖はそうでないことである。

或る図形が凸（トツ）であるときは、その図形に凹（へこ）んだ部分がないことをいう。

凸なパンを考えてみよう（図0.3）。



（図0.3）

これは凸図形ではあるが、切口の形は一定ではなく、断面積も変化する。

そこで、次の問題を設定する。

問題 0.4

「凸な立体で、（適当にえらんだ）軸に直交する平面で切った断面の面積がつねに一定ならば、それは柱状立体であるか？」

ここで、柱状立体［あるいは、簡単に「柱（チュウ）」（シリンダー cylinder）］とは、一つの平面図形Ａに対して、Ａの各点を通り、その平面に垂直な直線の全体がなす立体図形のことをいう（Ａはこの柱の底面図形）。Ａが円なら「円柱」となり、Ａが三角形なら「三角柱」が出来る。「楕円柱」等々も可能である。

上のように定義すると、円柱はいわゆる「直円柱」となる。もちろん、図形Ａに垂直でなくて、別の角度をなす軸を考えてもよいが、その軸に直交する平面で切った断面をＡ′とすれば、考えた「斜柱」は、別の底面図形をもつ「直柱」となる。（たとえば、「斜円柱」は「直楕円柱」）

上に述べた柱は、無限に伸びた図形であるが、普通には、これを軸に沿って有

限の長さだけを考え、軸に垂直な平面で切り取ったものをいうことが多い。そこで、これも「柱」（詳しくは、「有限柱」）とよぶ。

さて、上の問題の仮定は、断面の形をあたえずに、面積の大きさだけを一定としているところである。もし問題の答えが “yes” ならば、この仮定から断面の形も一定になり、その断面が円でなければ、軸のまわりに回転してもいけないことになる。

金太郎飴は柱である。すなわち、有平糖とパンの性質を兼ねている図形は、金太郎飴のような形にならなければならない。

後に述べる Brunn-Minkowski の不等式を用いれば、上の問題の答えが yes であることを示すことが出来る。

§１．　平均とは何か

前節の幾何の問題は、別にしておいて、この節では、二つの正数ａ，ｂの平均値について考察することにしよう。

ところで、二つの正数ａ，ｂの平均とは何だろうか。大学生のあいだでは、前期試験の成績ａと後期試験の成績ｂの平均の仕方に関心があるだろう。よく知られているのは算術平均（相加平均）

(1.1)　$$\frac{a+b}{2}$$

である。しかし、これがいつでも役立つというのではない。正確でない天秤（テンビン）を用いて物の重さを測るときには、幾何平均（相乗平均）

(1.2)　$$\sqrt{ab}$$

を用いねばならない。また、二つの地点を往復するとき、往路の速度がａで、帰路の速度がｂならば、全路の平均速度は調和平均

(1.3)　$$\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$$

となる。

これらの三つの平均 (1.1),(1.2),(1.3) を統一する方法はある。それは、正の実数の全体 $\mathbb{R}_+$ から、実数の全体 $\mathbb{R}$ の中への、一つの一対一の連続関数 f があたえられるとき、f-平均として

$$(1.4) \qquad f^{-1}\left(\frac{f(a)+f(b)}{2}\right)$$

を考えるとよい。

$f(x)=x$ なら(1.1), $f(x)=\log x$ なら(1.2), $f(x)=1/x$ なら(1.3)が得られる。[しかし、この方法が万能というのではない。有名な Gauss の算術幾何平均（相加相乗平均）

$$(1.5) \qquad 1\Big/\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\frac{d\theta}{\sqrt{a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta}}$$

は、このようには書けない。]

算術平均 (1.1) を一般化したものとして、一つの数λ（$0<\lambda<1$）をきめて

$$(1.6) \qquad (1-\lambda)a+\lambda b$$

を考える。$\lambda=1/2$ とすれば (1.1) となる。(1.6) は a, b に異なった重みをつけた平均と考えられる。

(1.4) の例として、$p\neq 0$ として

$$f(x) = x^p$$

としたものがいわゆるp乗平均である。a と b の p 乗平均を $M_p(a,b)$ とすれば、

(1.7) $$M_p(a,b) = \left(\frac{a^p + b^p}{2}\right)^{1/p}$$

である。p＝1が算術平均、p＝－1が調和平均である。さらに

(1.8) $$\lim_{p\to 0} M_p(a,b) = \sqrt{ab}$$

(1.9) $$\lim_{p\to \infty} M_p(a,b) = \max(a,b)$$

(1.10) $$\lim_{p\to -\infty} M_p(a,b) = \min(a,b)$$

となる（良い練習問題）。

そこで $M_0(a,b)=\sqrt{ab}$, $M_\infty(a,b)=\max(a,b)$, $M_{-\infty}(a,b)=\min(a,b)$ と定義する。さらに、(1.6)も考慮して一般化すれば、平均

(1.11) $$M_{\lambda,p}(a,b) = \{(1-\lambda)a^b + \lambda b^p\}^{1/p}$$

が考えられる。

これが前節の問題を解くのに役立つのである。なお、このときには

(1.12) $$\lim_{p\to 0} M_{\lambda,p}(a,b) = a^{1-\lambda}b^\lambda$$

(1.13) $$\lim_{p\to \infty} M_{\lambda,p}(a,b) = \max(a,b)$$

(1.14) $$\lim_{p\to-\infty} M_{\lambda,p}(a,b) = \min(a,b)$$

となる。

したがって、前と同様、$M_{\lambda,0}(a,b)=a^{1-\lambda}b^{\lambda}$　$M_{\lambda,\infty}(a,b)=\max(a,b)$, $M_{\lambda,-\infty}(a,b)=\min(a,b)$ と定義する。

§2.　平均 $M_{\lambda,p}(a,b)$ の間の大小関係

a, b と λ ($0<\lambda<1$) は固定しておくことにして、p が変化するときの $M_{\lambda,p}(a,b)$ の変化を考察しよう。

定理 2.1　$-\infty\leqq p\leqq q\leqq+\infty$ に対して、不等式

(2.1) $$M_{\lambda,p}(a,b) \leqq M_{\lambda,q}(a,b)$$

が成立する。

$p<q$ として、(2.1)において等号が成立するのは、$a=b$ のときに限る。

上の定理は、Jensenの不等式として知られている。

この証明には Hölder の不等式を用いる。

§3.　$\mathbb{R}^n$ における凸体、Brunn-Minkowski の不等式

n次元ユークリッド空間を$\mathbb{R}^n$ と書く［座標も入れて考えることが多い］。実際には、$n=2$ または $n=3$ として、平面や、三次元空間を考えるとよい。

$\mathbb{R}^n$ の有界な閉凸集合を。凸体とよぶ。Kを凸体とするとき、n次元体積を V(K) とする。$n=1, 2, 3$ とすれば、それぞれ長さ、面積、体積となる。

定理3.1 K_0 , K_1 を$\mathbb{R}^n$ における二つの凸体とし、実際　λ（0＜λ＜1）に対して

$$K_\lambda = (1-\lambda)K_0 + \lambda K_1$$

とするとき不等式

$$V(K_\lambda)^{\frac{1}{n}} \geqq (1-\lambda)V(K_0)^{\frac{1}{n}} + \lambda V(K_1)^{\frac{1}{n}} \tag{3.2}$$

が成立する。

この不等式において、等号が成立するのは、K_0 とK_1 が相似の位置にあるか、または、それぞれが平行な超平面に含まれている場合であり、そのときに限る。

(3.2)が Brunn-Minkowski の不等式である。

二つの図形K_0 , K_1 が相似の位置にある（homothetic）とは、$\mathbb{R}^n$ の（適当な）一つの点を中心とする相似拡大（または縮小）をK_0 に施せばK_1 に重ね合わすことが、出来るか、またはK_0 を平行移動してK_1 に重ね合わすことが出来ることをいう。

$\mathbb{R}^n$ の超平面とは、その一つの(n-1)次元の部分空間を平行移動して得られる部分集合のことである。

定理 3.1 の証明は、空間の次元nについての帰納法による。