数学入門公開講座

昭和62年8月11日（火）から8月20日（木）まで

日／時間	8月 11日（火）	12日（水）	13日（木）	14日（金）	15日（土）	16日（日）	17日（月）	18日（火）	19日（水）	20日（木）
13:15～15:00	齋藤	齋藤	笠原	齋藤	休講		一松	一松	一松	一松
15:00～15:15	休憩						休憩			
15:15～17:00	笠原	笠原	笠原	齋藤			南	南	南	南

主催　京都大学数理解析研究所

講師及び内容

1. 曲面の位相幾何 (7時間)

京都大学数理解析研究所助教授　齋　藤　恭　司

曲面には球面・トーラスやクラインのつぼ等々いろいろあるが、その上にどの様な多角形を敷きつめられるか、という問題をオイラー数等の位相幾何を用いて考えてみる。

2. 微分できない連続関数のお話し (7時間)

京都大学教養部教授　笠　原　晧　司

至るところ微分できない連続関数についての歴史を述べ、今までに考えられた数多くの例について、そのグラフを描き性質を調べる。また、このような関数がどれだけ多数あるかについても考察する。

3. 計算機による数式処理 (7時間)

京都大学数理解析研究所教授　一　松　　信

計算機に数式の計算をさせることは、近年漸く実用になってきた。数値計算と比べて、難しかった原因を中心に、近年開発された因数分解算法などを解説する。

4. 対称性(及び反対称性)は自然界にどのように遍在するか (7時間)

京都大学数理解析研究所助手　南　　政　次

自然界に存在する対称性を概観したあと、特に左右対称の問題に戻り、その意味及び反対称性の働きをロジェ・カイヨワに従って論じ、スピノール表示による電子・陽電子の関係などで例証する。次にアイソスピン空間とリー代数の関係、更に一般にリー代数が素粒子の対称性を如何に支配するかを述べる。時間があれば、その対称性の破れと宇宙初期の問題等に触れたい。

時　間　割

<table>
<tr><th>日
時間</th><th>8月
11日
(火)</th><th>12日
(水)</th><th>13日
(木)</th><th>14日
(金)</th><th>15日
(土)</th><th>16日
(日)</th><th>17日
(月)</th><th>18日
(火)</th><th>19日
(水)</th><th>20日
(木)</th></tr>
<tr><td>13:15～15:00</td><td>齋藤</td><td>齋藤</td><td>笠原</td><td>齋藤</td><td colspan="2" rowspan="3">休講</td><td>一松</td><td>一松</td><td>一松</td><td>一松</td></tr>
<tr><td>15:00～15:15</td><td colspan="4">休憩</td><td colspan="4">休憩</td></tr>
<tr><td>15:15～17:00</td><td>笠原</td><td>笠原</td><td>笠原</td><td>齋藤</td><td>南</td><td>南</td><td>南</td><td>南</td></tr>
</table>

2.　微分できない連続関数のお話し（7時間）

京都大学教養部教授　笠　原　晧　司

1987, AUGUST 11, 12　　15:15 - 17:00

AUGUST 13　　13:15 - 15:00, 15:15 - 17:00

微分できない連続関数のお話

京都大学教養部教授　笠　原　晧　司

1。話題の提示

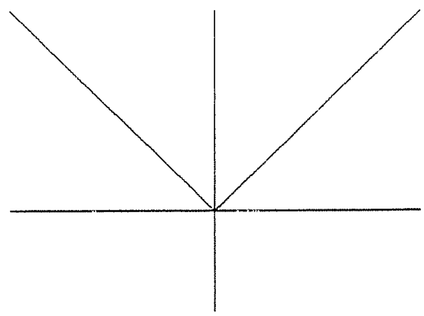
$y = f(x)$ はR上の関数とする。その x_0 での微分係数とは、

（1）　$f'(x_0) = \lim_{h \to 0}\{f(x_0 + h) - f(x_0)\}/h$

であることは周知の通りである。右辺が有限確定値をもつとき、$f(x)$ は x_0 で微分可能というのであった。幾何学的にいうと、$f(x)$ のグラフに、点 $(x_0, f(x_0))$ で y 軸に平行でない接線が引けることを意味する。

次ぎの定理はやさしい。

定理。$f(x)$ が x_0 で微分可能なら、$f(x)$ は x_0 で連続である。



ところで、

問題１。この逆は成立するだろうか？

この答も簡単で、

答。逆は成立しない。反例：$y = |x|$.

しかしこんな反例は面白くない。１点や２点、いや有限個位なら微分不可能な連続点などすぐ作れる。そこで、

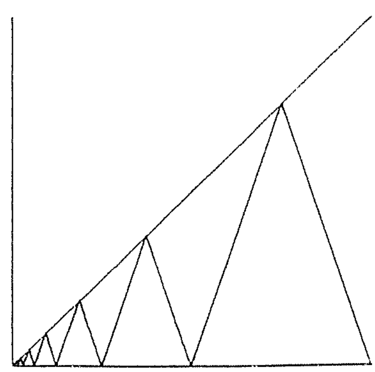
問題２。連続だが、微分不可能な点が無限個あるような関数を作れ。

これも少し考えると容易に作れる。例えば、

（２）　$$\phi(x) = \begin{cases} 3(x - 1/2) & (1/2 \leqq x \leqq 3/4) \\ -3(x - 1) & (3/4 \leqq x \leqq 1) \\ 0 & (\text{その他の } x) \end{cases}$$

と置き、

（３）　$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(1/2^n)\phi(2^n x)$$



と置けばよい。この和は形式的には無限和だが、どの x についても一つの項を除いてあとは 0 ばかりであることがすぐわかる。このような例も大して面白くない。そこで、

問題３。Rのすべての点で微分不可能な連続関数の例を作れ。

これがこれからの話のテーマである。

2。歴史。

この問題は19世紀に遡る。18世紀には、数学や自然科学で扱う連続関数は、微分可能か、高々前節で述べたような程度の微分不可能性しか持たないであろうと思われていた。また、これを証明しようとした人もいた（Ampère, Journal Ecole Polyt., 1806)。勿論、そのような企ては失敗に終わる。1861年（これよりもうすこし早かったかもしれないが）Riemann はこの問題について

$$(4) \qquad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(1/n^2)\sin(n^2x)$$

は、連続だが、微分不可能である、と弟子にいったという。しかし Riemann はこのことについて証明はしていない。そして、Berlin の大ボス Weierstrass は 1870 年代に到る所微分不可能な連続関数の例を作って、「當時の學界を驚倒せしめた。」（藤原松三郎の評言）のであった。Weierstrass はこれを 1872 年のベルリンのロイヤル・アカデミーの講演で口頭発表したが、論文にはしなかった。弟子の du Bois-Reymond が師の許しを得てこれを 1875 年に Journal für Mathematik という数学誌に発表したので初めてこれが全世界に知られるようになった。それは、

$$(5) \qquad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}a^n\cos(b^n\pi x) \qquad (0<a<1,\ b \text{ は奇数、} ab>1+3\pi/2)$$

というものであった。この関数が知れわたってヨーロッパでは大騒ぎになり、Schwarz, du Bois-Reymond, Darboux, Dini 等がこの関数およびこれに類似した関数について多くの研究をしている。

Weierstrass は du Bois-Reymond への手紙の中で例（5）を作ったきっかけとして Riemann の関数を引き合いに出し、Riemann の関数が微分できないことの証明を Riemann 自身が持っていたかどうかわからず、Weierstrass 自身も証明できず、できたとしても難しいだろうから、もっと易しい例を考えたのだといっている。

実は、Riemann の関数（4）は

$$(6) \qquad x = \frac{2A+1}{2B+1}\pi$$

の形の点において微分可能で、

$$f'(x) = -1/2$$

となるのである！　これは Gerver により 1970 年に発見された。

つまり 110 年後に Riemann はまちがっていたことがわかったのである。もっとも、Riemann は（4）が”到る所微分不可能”といったかどうかはわからない。当時の気分では、どんな小区間をとってもその中に微分不可能な点がある、つまり稠密な点において微分不可能ということを Nichtdifferenzierbarkeit とよんでいた形跡があるからである。

なお、Weierstrass の例についての最良の結果は、1916 年に Hardy が発表し

たものであろう。それは、（５）が到る所微分不可能であるには、単に

（７）　　$0<a<1, \quad ab \geqq 1$

であればよい、というものである。Hardy はこの論文の中で Riemann の関数についても詳しく研究している。

それとは別に、日本が生んだ世界的大数学者高木貞治は 1903 年に同じ性質をもつ全く別種の関数を発表した。それは、

（８）　　$\phi(x) = |x-[x+1/2]|$

とおいて、

（９）　　$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \phi(2^n x)$

とするものである。この関数はヨーロッパでは知られなかったとみえ、その約３０年後、1930 年に van der Waerden が、これとは独立に同じ $\phi(x)$ を使って、

（１０）　　$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^n} \phi(10^n x)$

がやはり同じ性質を持つことを証明している。ヨーロッパではこの関数や高木の関数をひっくるめてファンデルベルデン関数と呼んでいるが、最近日本の学者の強硬な主張により高木関数という名が広がりつつある。

２０世紀初頭には微分不可能な関数の系列として、以上述べた２系列、Ｗ－系列とＴ－系列があったのだが、1921 年、チェコスロバキアの数学者 Jašek がボヘミア・アカデミーに衝撃的な報告を行った。それによると、有名なチェコの数学者 Bolzano は既に 1834 年に、到る所微分不可能な連続関数の例を得ていたというのである。Bolzano の例は「幾何学的」というべきもので、その後その変種も数多く知られるようになった。

そのほか、Weierstrass 以前にこの種の例を得ていたとみられる人が一人いる。それは、スイスの Genève 大学教授の Cellérier という人である。彼は多分 1860 年以前に

（１１）　　$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^n} \sin(a^n x)$　　　（aは整数で十分大）

が微分不可能であることを証明していたらしい。ただ、この論文の原稿は「黄ばんだ紙に手書きしてあるが、不幸なことに日付がない」ので、「これが果して、Weierstrass, Schwarz, du Bois-Reymond, Darboux, Dini 等より前に得られたかどうかを知ることは不可能であろう」と、Cellérier の遺稿を 1890 年に出版した人は註で述べている。ただ、文章の具合からみて、Cellérier がこれらドイツ一派の研究の流れとは全く独立に問題を定式化しそれを解いていたことは間違いないようだ。従って、Riemann の例などで「世間」が騒がしくなる以前のことと推察できるのである。これは全くの想像だが、Cellérier はそのうちに発表しようとして忘れてしまい、”世間が騒がしく”なってきて、発表の機会を失ったのではなかろうか。

３。W－系列の関数

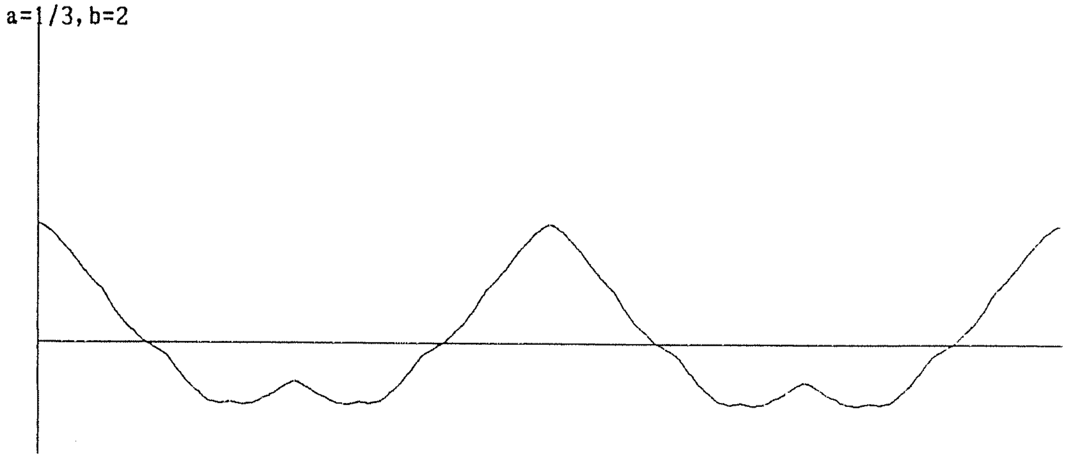
0<a<1 のとき、

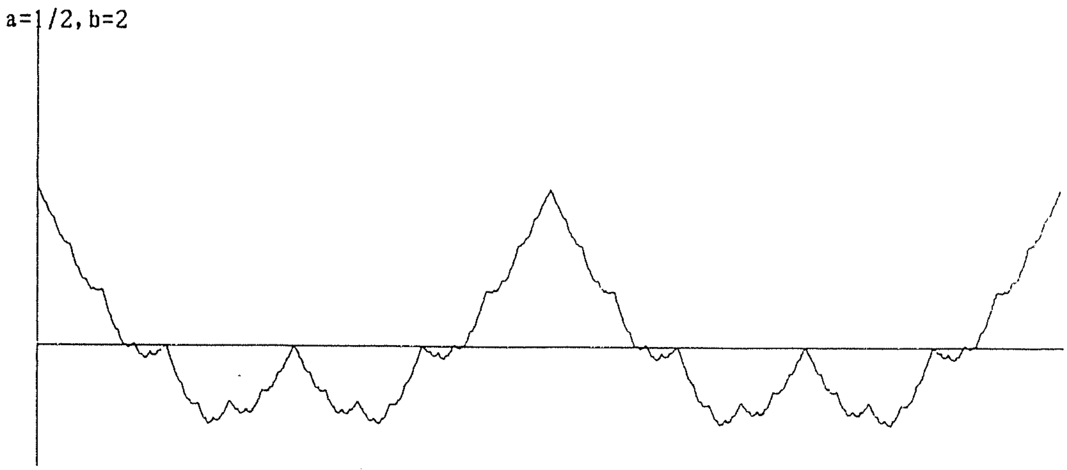
（１２）　　$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi x), \quad \sum_{n=1}^{\infty} a^n \sin(b^n \pi x)$

の形の関数を、W－系列の関数と呼ぶ。これに関しては、上述したように Hardy の結果が最良である。

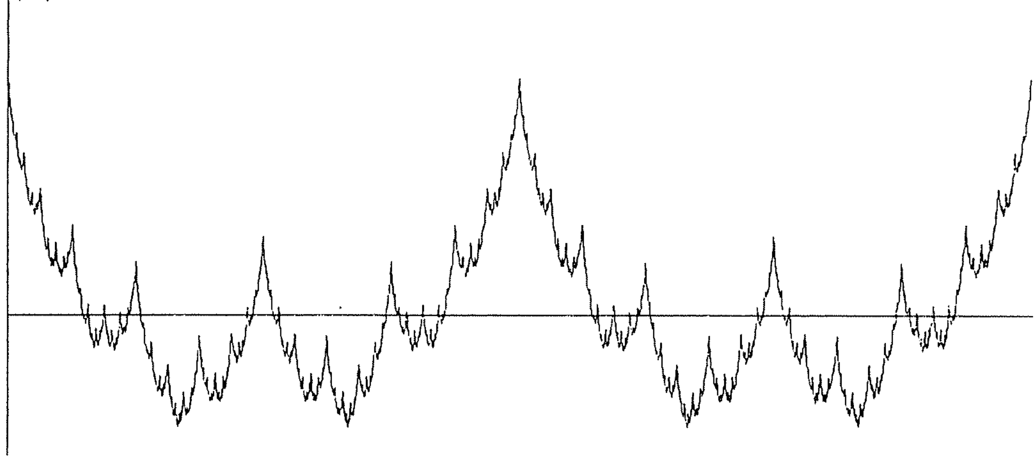
定理。(Hardy) 関数（１２）は 0<a<1, ab≧1 のとき到る所微分不可能である。

この定理の証明はかなり専門的な知識を要するし、そうでない部分も、非常にテクニカルな計算を長く続けねばならない。そこで、計算は省略して、この関数のグラフを画いて、その様子を見ることにする。

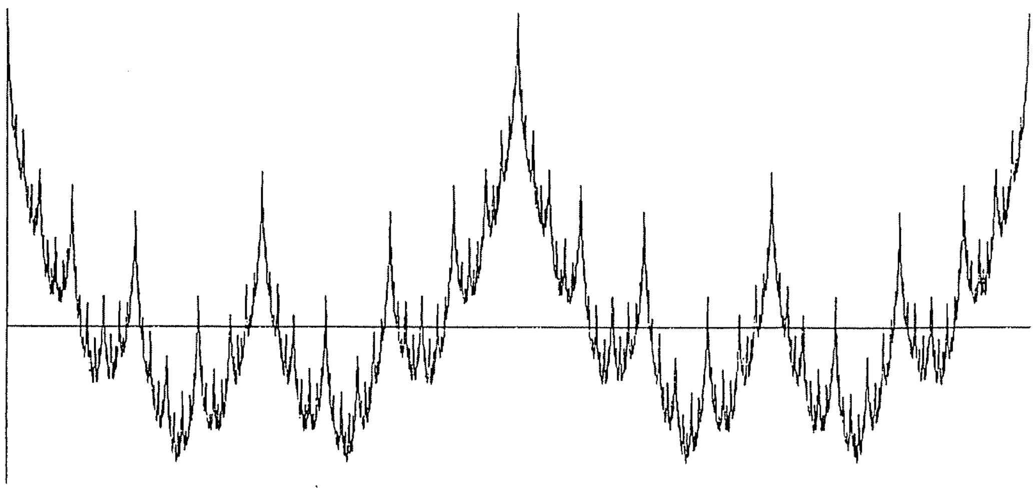




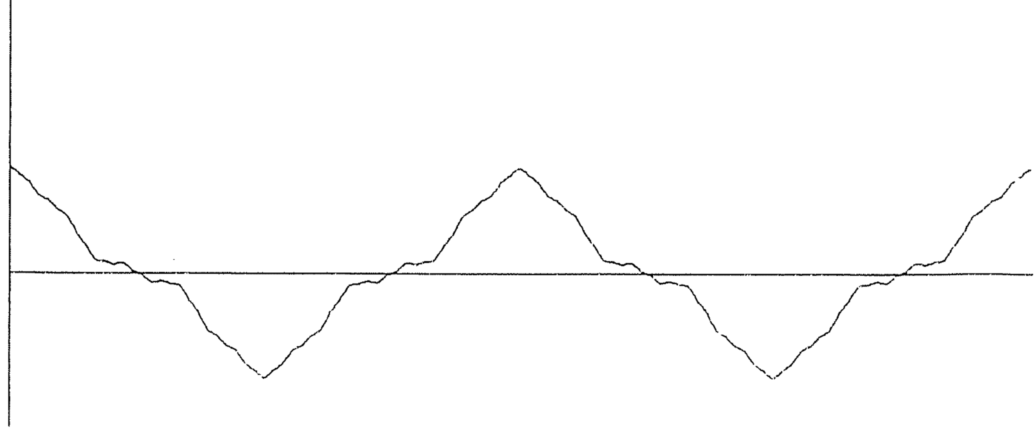
a=2/3, b=2



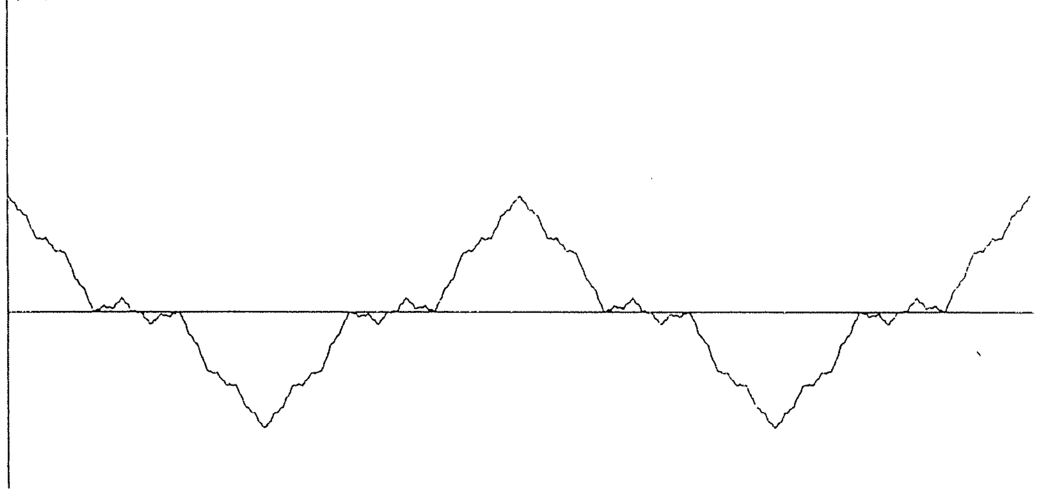
a=3/4, b=2



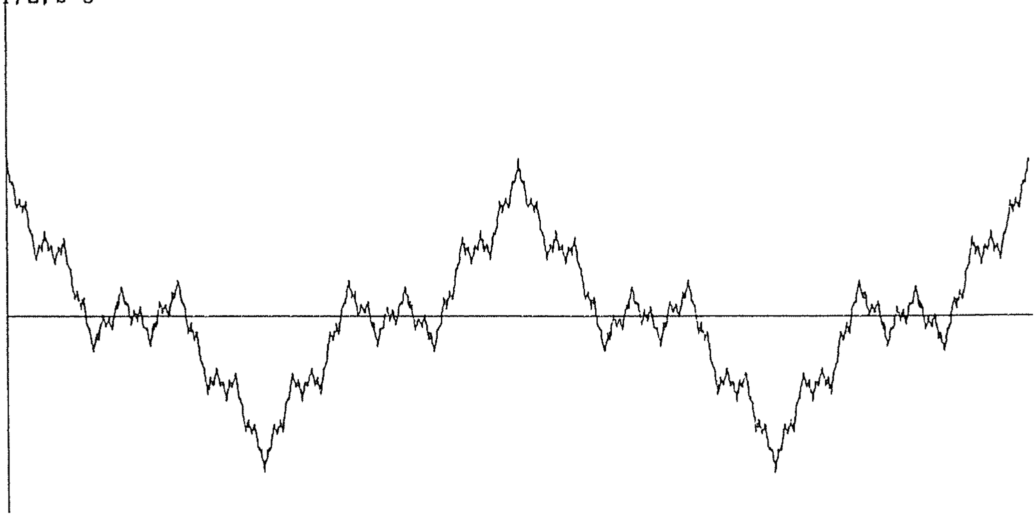
a=1/4, b=3



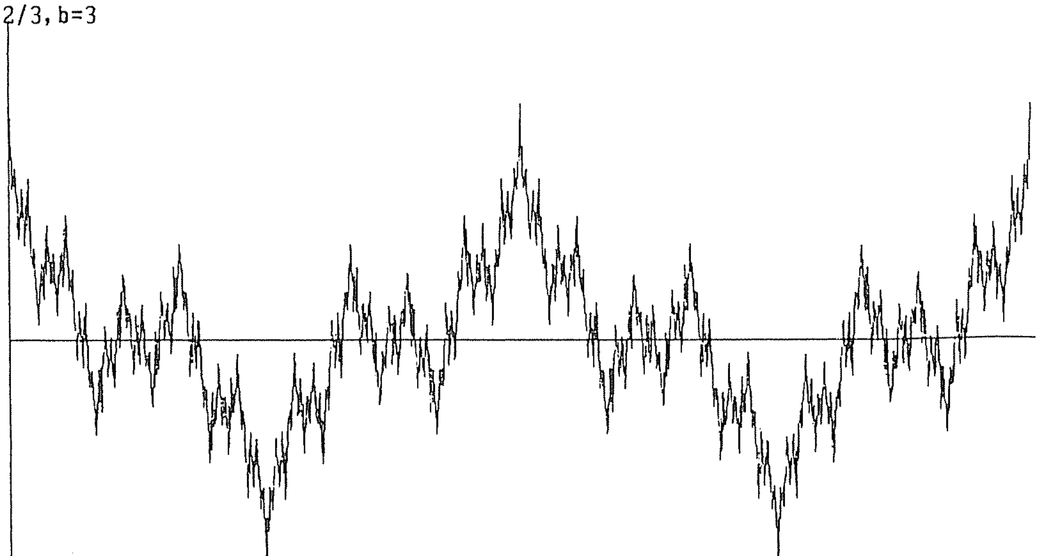
a=1/3, b=3



a=1/2, b=3



a=2/3, b=3



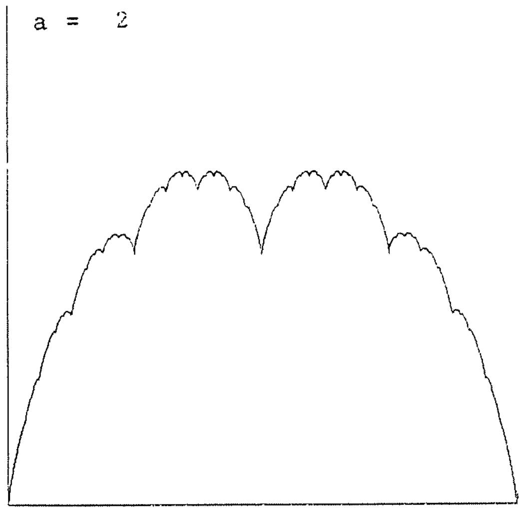
4。T－系列の関数

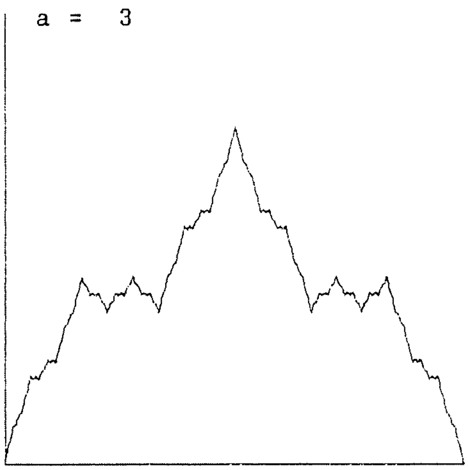
一般に、a を２以上の整数として、

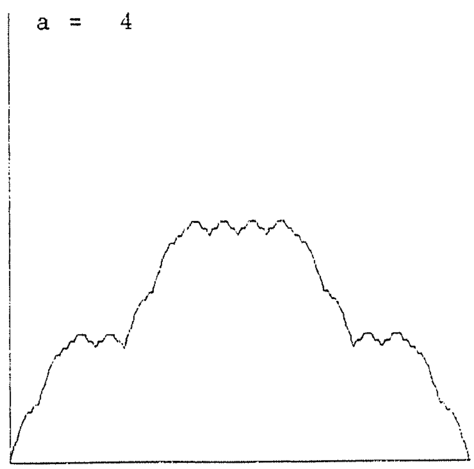
$$\phi(x) = | x - [x + 1/2] |,$$

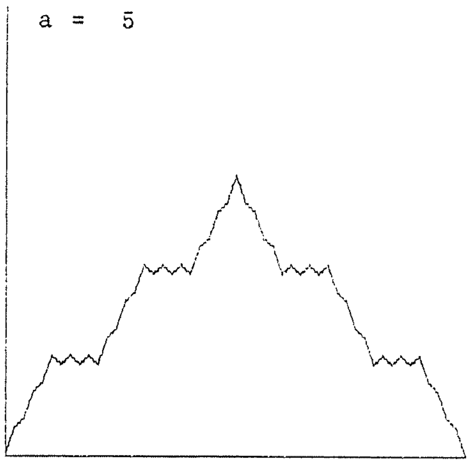
$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^n} \phi(a^n x) \qquad \text{（aは整数で十分大）}$$

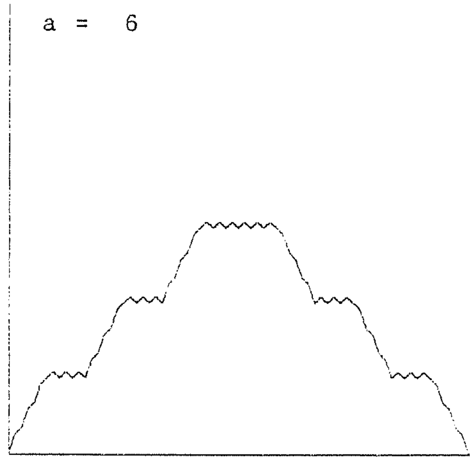
の形の関数をT－系列の関数とよぶことにする。a = 2 の場合が高木関数、a = 10 の場合が van der Waerden 関数である。a = 2, ..., 10 の各場合のグラフを画こう。

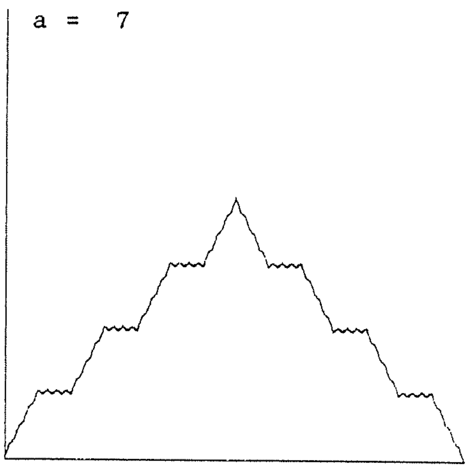


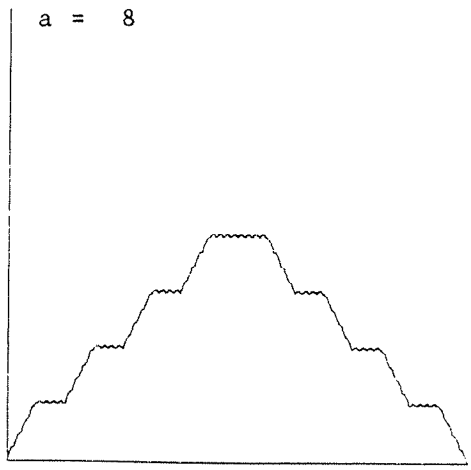


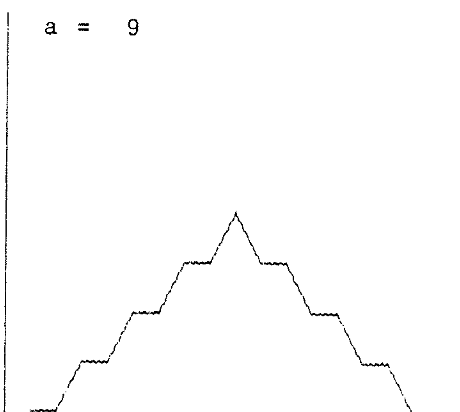


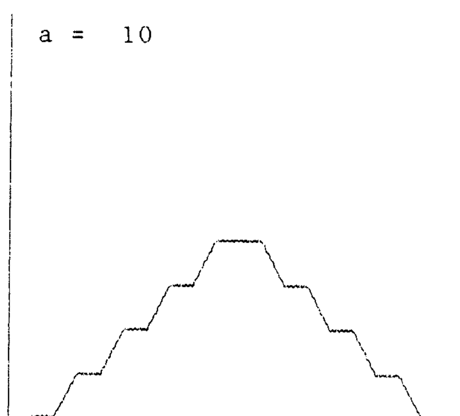

a = 5


a = 6


a = 7


a = 8


a = 9


a = 10

５。Ｂ－系列

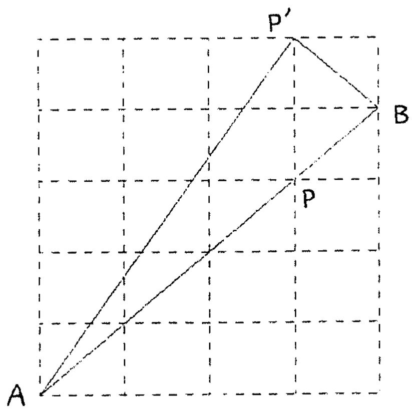
Bolzano 以来多くの人達が考えた幾何学的構成によるものをＢ－系列と呼ぶ。これには統一的な記法はないが、共通しているのはそれが幾何学的に作られていることである。Bolzano 自身の例を次ぎに説明しよう。この関数は区間 $I = [0, 1]$ で作られる。

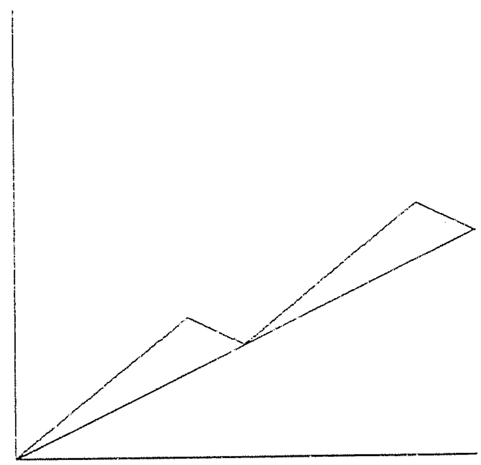
①先ず、点（0,0）と（1,1）を直線で結ぶ。これでできる関数 $y = x$ を $\phi_0(x)$ とおく。

②Ｉを二等分し、その各々の上で、上の直線に、次の” Bolzano の基本変形”（Ｂ－変形と呼ぶことにする）を施したものを、$\phi_1(x)$ とおく。

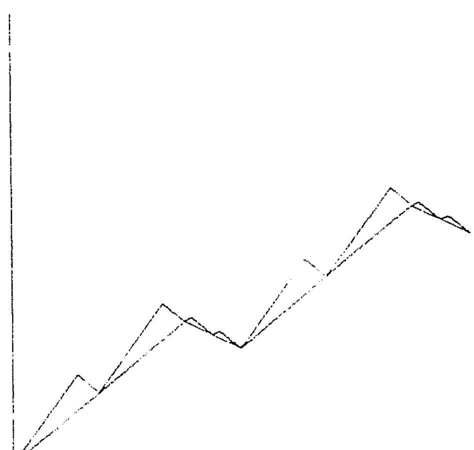
区間 $[a, b]$ 上で直線分が下左図のように与えられたとき、最高点Ｂで引いた x-軸への平行線に関して、図のＰの鏡像点をＰ’とする。Ｐは最高点に近い方の３／４分点である。そして、直線ＡＢを折線ＡＰ’Ｂに変形する。

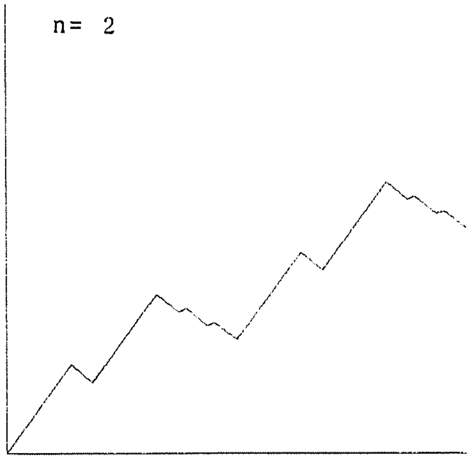
これによって、$\phi_1(x)$ のグラフは下右図のようになる。

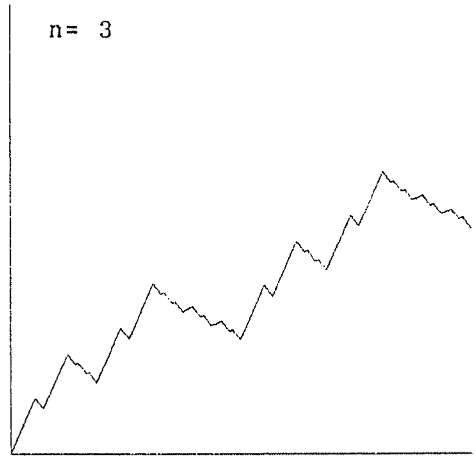


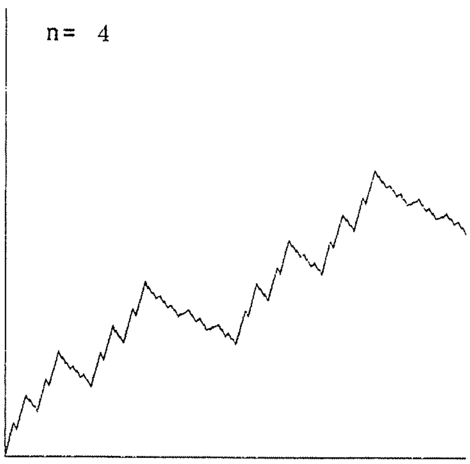


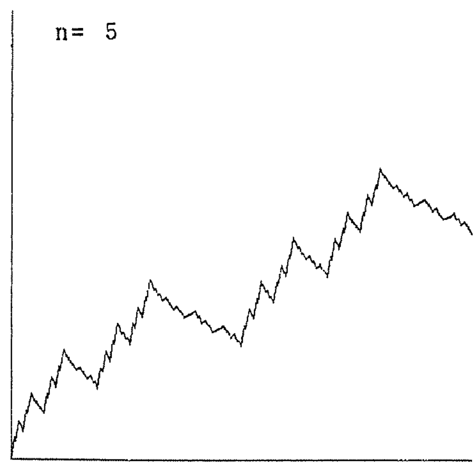
③この４つの線分について上に述べたＢ－変形を行ったものを $\phi_2(x)$ とおく。

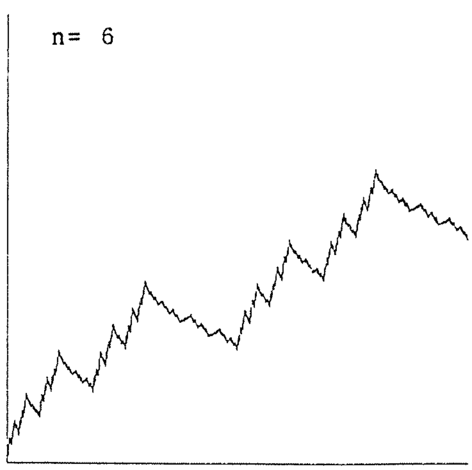


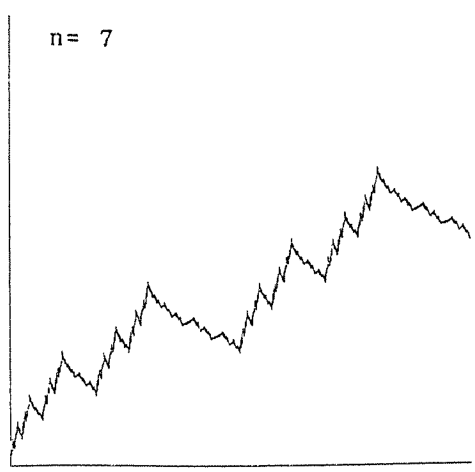

n= 2


n= 3


n= 4


n= 5


n= 6


n= 7

以下次々に、$\phi_3(x), \phi_4(x), \ldots, \phi_n(x), \ldots$ を作る。

④ $f(x) = \lim_{n\to\infty} \phi_n(x)$ は連続関数で到る所微分不可能である。もっと正確にいうと、0 と 1 を除き、すべての点 x で

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

は存在しない。点 0, 1 では

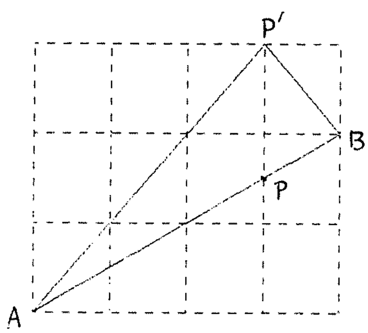
$$\lim_{h\to 0+} \frac{f(h)-f(0)}{h} = +\infty, \qquad \lim_{h\to 0+} \frac{f(1-h)-f(1)}{-h} = -\infty$$

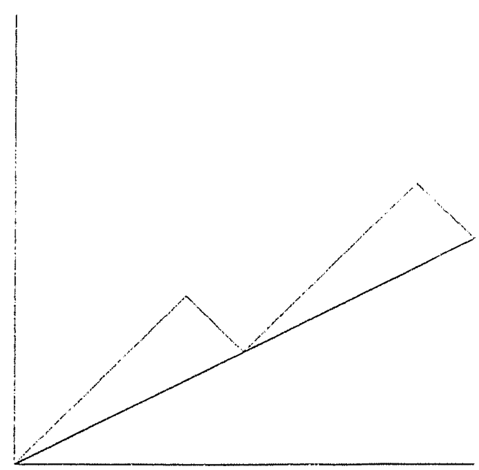
となる。従って、この関数を、y-軸に平行な直線 $x = n$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$)に関して鏡像の位置に写したものを考えると、到るところ微分不可能な連続関数になっている。

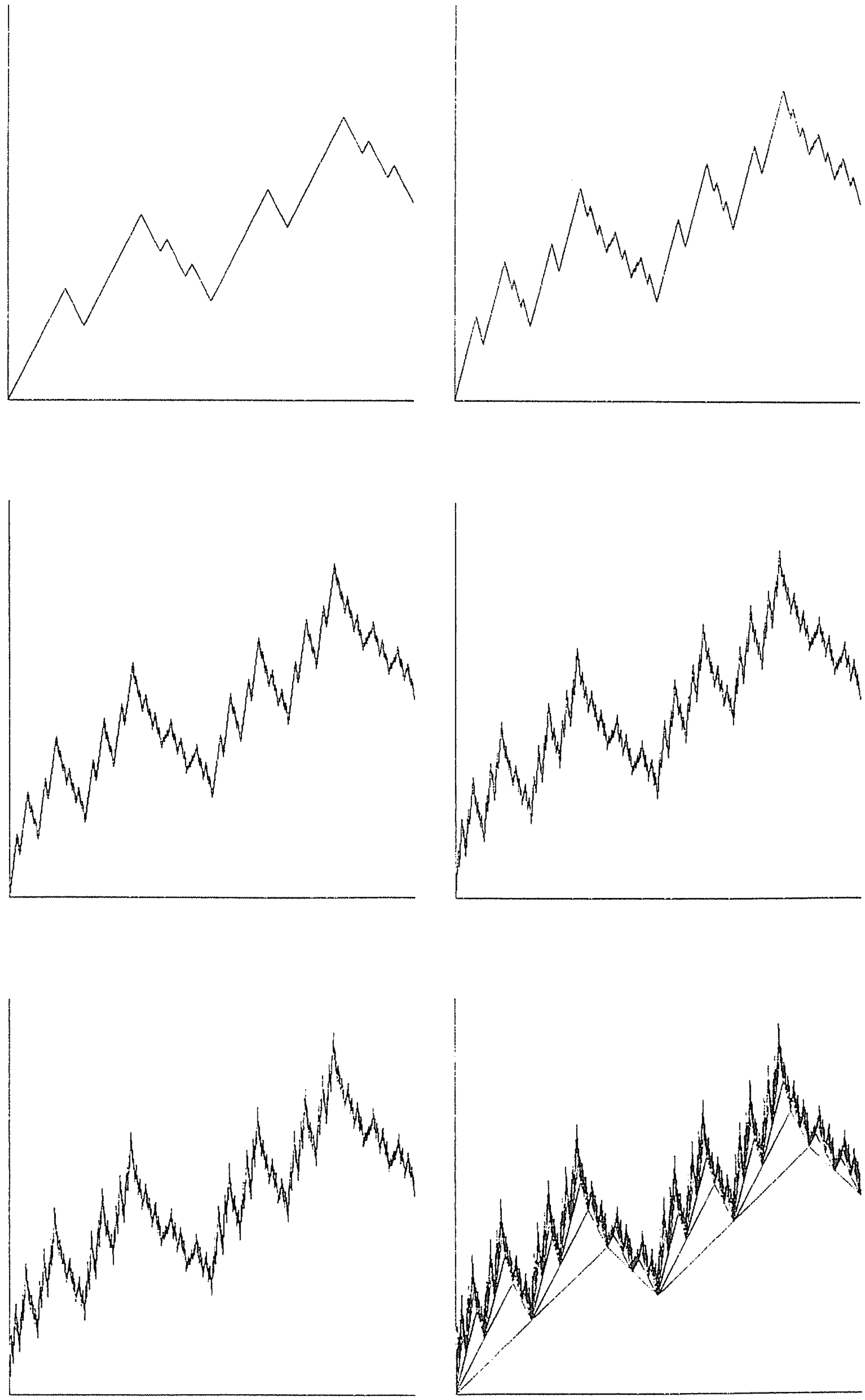
以上が Jašek が報告した Bolzano の関数である。G. Kowalewski は「原理的同じで、もっと考えやすい例」を作った(Acta Math., 1923)。それは、B－変形の代わりに、次の Kowalewski の変形（K－変形と呼ぼう）を行うのである。

　最高点Bに近い３／４分点Pを次の点P’で置き換える。Aを通り、直線ＡＢの２倍の勾配の直線を引き、Bを通り、－２倍の勾配の直線を引く。その交点をP’とする。そして直線ＡＢを折れ線ＡP’Ｂに変える。

このK－変形を、B－変形の代わりに行って得られる関数もまた、同じ性質をもつ。ただ、Kowalewski の例の方が $\phi_n(x)$ の各線分の勾配の絶対値が 2^n と、単純なので、たしかに分かりやすい。その図を下に画く。





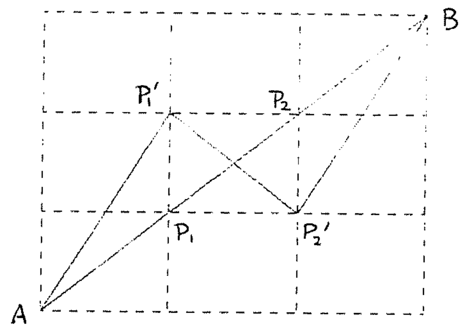


この種の例は N. Bourbaki の有名な教科書 Éléments de Mathématique の「一実変数関数」の第一章§１の問題２にも出ている。それを紹介しよう。やはり区間 I = [0, 1] 上で作る。

① $\phi_0(x) = x \quad (0 \leqq x \leqq 1)$ とおく。

② $\phi_0(x)$ のグラフに次の変形を施す。（N－変形と呼ぼう）

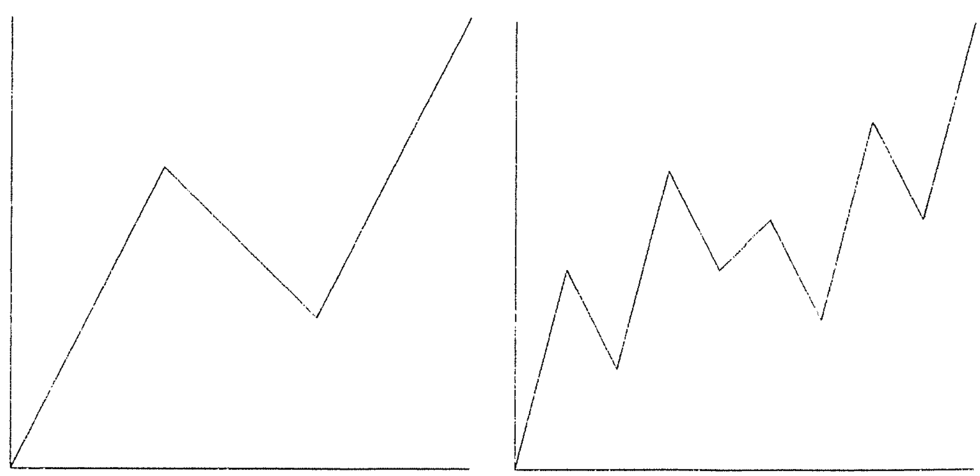
区間 [a, b] 上で直線が与えられているとき、それを３等分し、１／３分点上の値と、２／３分点上の値とを交換する（右図）。このようにしてできた点 P_1'、P_2' をA、Bとそれぞれ結び、折れ線 $AP_1'P_2'B$ によって新しい関数を定義する。

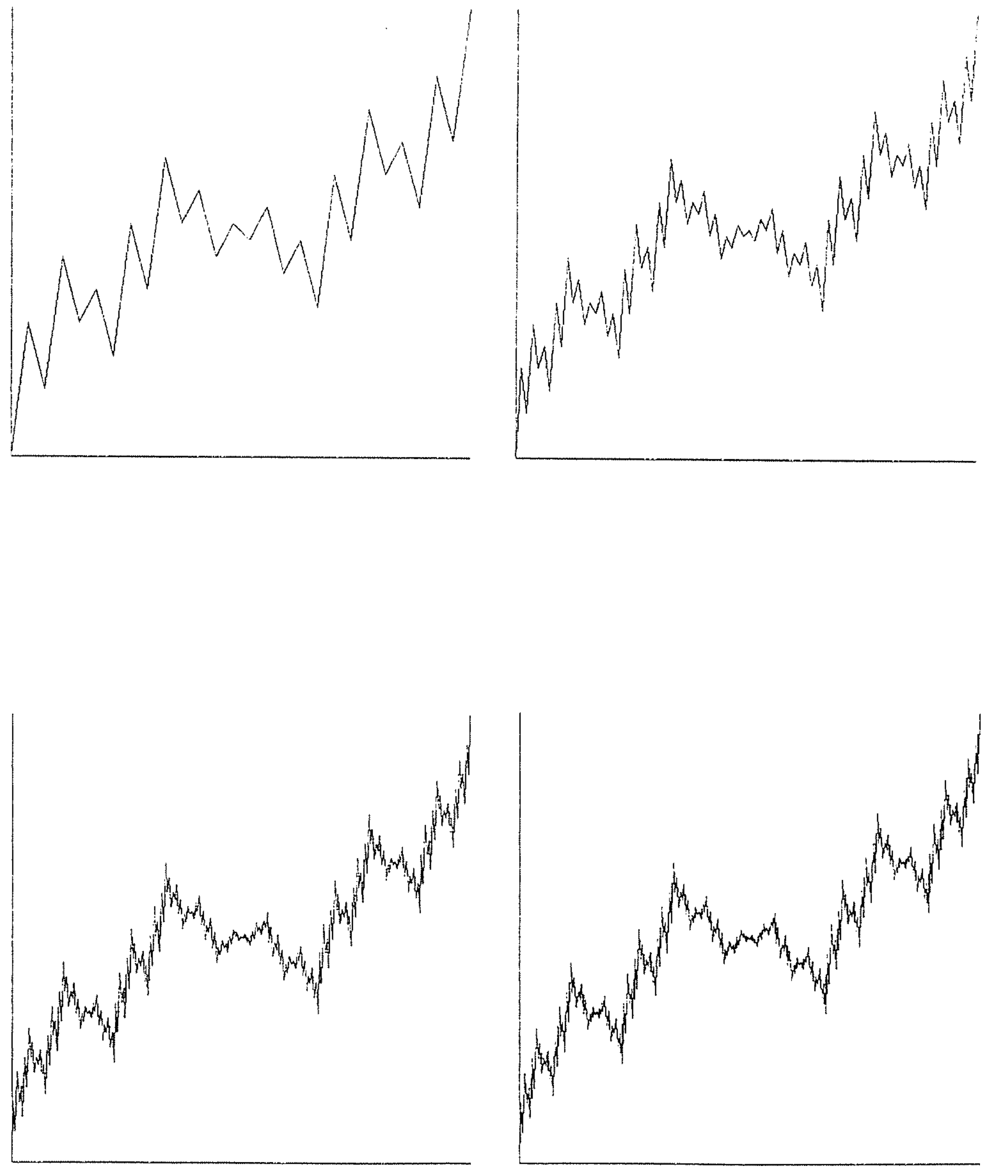


③同様にして $\phi_1(x)$, $\phi_2(x)$, ..., $\phi_n(x)$, ... を作る。

④$f(x) = \lim \phi_n(x)$ は到るところ微分不可能である。

この関数のグラフを下に示そう。





文献。

[1] Ampère, A. M., Recherches sur quelques points de la théorie des fonctions ..., Journal Ecole Polyt., 13,(1806) p.148-181 .

[2] Cellérier, C., Notes sur les principes fondamentaux de l'analyse, Bulletin des Science Math., (2) 14(1890), p.142-160.

[3] Bourbaki, N., Eléments de Mathematique IX, livre 4, Fonctions d'une variable réelle, Hermann, Paris (1949).

[4] du Bois-Reymond, P., Versuch einer Classification der willkürlichen Funktionen reeller Argumente ..., Journal für reine ang. Mathematik, 79(1875) p.21-37.

[5] Gerver, J., The differentiability of the Riemann function at certain rational multiples of π, Amer. Journ. Math., 92(1970) p.33-55.

[6] Hardy, G. H., Weierstrass's non-differentiable function, Trans. Amer. Math. Soc., 17(1916) p.301-325.

[7] Jašek, Sitzungsberichte, Böhmische Akademie, (1921).

[8] Kowalewski, G., Über Bolzanos nichtdifferenzierbare stetige Funktion , Acta Math., 42(1923) p.315-318.

[9] Takagi, T., A simple example of continuous function without derived function, 東京数学物理学会記事、14(1903) p.1-2.

[10] van der Waerden, B. L., Math. Zeits.,32(1930).