

# 数学入門公開講座

昭和62年8月11日(火)から8月20日(木)まで

日	8月 11日 (火)	12日 (水)	13日 (木)	14日 (金)	15日 (土)	16日 (日)	17日 (月)	18日 (火)	19日 (水)	20日 (木)
時間	齋藤	齋藤	笠原	齋藤	休  講		一松	一松	一松	一松
13:15~15:00	齋藤	齋藤	笠原	齋藤			休	憩		
15:00~15:15	休 憩						休	憩		
15:15~17:00	笠原	笠原	笠原	齋藤	南	南	南	南		

主催 京都大学数理解析研究所

## 講師及び内容

### 1. 曲面の位相幾何 (7時間)

京都大学数理解析研究所助教授 齋藤 恭 司

曲面には球面・トーラスやクラインのつぼ等々いろいろあるが、その上にどのような多角形を敷きつめられるか、という問題をオイラー数等の位相幾何を用いて考えてみる。

### 2. 微分できない連続関数のお話し (7時間)

京都大学教養部教授 笠原 晴 司

至るところ微分できない連続関数についての歴史を述べ、今までに考えられた数多くの例について、そのグラフを描き性質を調べる。また、このような関数がどれだけ多数あるかについても考察する。

### 3. 計算機による数式処理 (7時間)

京都大学数理解析研究所教授 一 松 信

計算機に数式の計算をさせることは、近年漸く実用になってきた。数値計算と比べて、難しかった原因を中心に、近年開発された因数分解算法などを解説する。

### 4. 対称性(及び反対称性)は自然界にどのように遍在するか (7時間)

京都大学数理解析研究所助手 南 政 次

自然界に存在する対称性を概観したあと、特に左右対称の問題に戻り、その意味及び反対称性の働きをロジェ・カイヨワに従って論じ、スピノール表示による電子・陽電子の関係などで例証する。次にアイソスピン空間とリー代数の関係、更に一般にリー代数が素粒子の対称性を如何に支配するかを述べる。時間があれば、その対称性の破れと宇宙初期の問題等に触れたい。

## 時 間 割

日	8月 11日 (火)	12日 (水)	13日 (木)	14日 (金)	15日 (土)	16日 (日)	17日 (月)	18日 (火)	19日 (水)	20日 (木)
時 間	齋藤	齋藤	笠原	齋藤	休		一松	一松	一松	一松
	休 憩				休 憩					
	笠原	笠原	笠原	齋藤	講		南	南	南	南

#### 4. 対称性(及び反対称性)は

自然界にどのように遍在するか (7時間)

京都大学数理解析研究所助手 南 政 次

1987, AUGUST 17, 18, 19, 20      15:15 - 17:00

# 対称性(及び反対称性)は 自然界にどのように遍在するか

南 政 次

☆対称性とか相称性とか云われるものは、数学的にかなり古くから独自に論じられて来たものであるし、それ自体としても面白い内容をもっている。しかし、対称性のいくつかは、実際に自然界に具現しており、しかも自然界の進化を促すようなかたちで、対称性自身の変移して行ったりする。また、その進化の残滓とも云うべき反対称性が現象として見られるときがある。

この講話では、自然界に対称性が具現化している例として、生物学や物理学に話題を求め、対称性や反対称性がどのように遍在するかを例証し、反対称性の役割などに目を向けたいと思う。数学的部分としては、場の理論や素粒子の対称性に纏わるリー代数などの数学を紹介することになるが、これは代数が物理学でどのように使われるかの例として理解して貰えればよいと思う。

☆古典的に云々されてきた対称性を見ておくのも面白いと思う。もともと、対称性——シンメトリー——という概念は、均衡とか調和といった内容をもっていたようで、古代建築などに現われる「並進対称」(平行移動の対称)を主に指していたようだが、重力という枷を離れてイメージ空間に飛び出すと「回転対称」を取り入れて装飾模様などが華やかになる。しかし、それだけでなく、多角形のなかでも正五角形に関しては、星型がピタゴラス学派の象徴であったように、古くから(後に)黄金数と呼称される(ようになった)不思議な無理数が抽出されていたりする。これは、植物の葉序などに具体的に自然界にも現われる。

空間図形として最も整合性の高く名高いのはプラトンの正多面体であろう。これは双対性などの面白い性質を内包しているし、のちのトポロジーの雛型になっている。

もうひとつ、採り上げておかねばならないのは、「鏡像対称」である。これは「左右対称」とも云われ、単純なようだが、必ずしもそうではない。右手袋と左手袋の部分と部分の関係を微視的に調べあげても、二つを区別出来ない。その区別には、それぞれの手袋の空間内の位置に由来する何かが引っ掛かっているわけである。

☆素粒子物理が数学的な側面を有するのは、その扱う枠組とその中に存在し作用する実体（もちろん、それぞれは別個に存在するのでなく field and particle として総合された形でだが）の理論的記述は、対称性を手掛りに進められているからと言ってもよいだろう。空間に絶対原点のないこと、つまり並進対称が、運動量の保存則と結び付く。同様に、角運動量の保存則も回転に対する対称性から出てくる。この例は「回転群」の恰好の材料であって、角運動量がその「リー代数」の生成子になっている。エネルギー保存の法則は、我々の世界の安定にとって欠くべからざるものとされているが、単に時間的な並進対称の反映という意味では、閉じられた覚束ないものという気がしないこともない。

一方、素粒子の「量子数」の保存というものも、素粒子の対称性と関係し、それらの幾つかは宇宙開闢以来のわれわれの世界の物質の安定性に寄与している。例えば、陽子の安定性（少なくとも寿命は $10^{30}$ 年以上）は象徴的である。

☆素粒子間の相互作用は、結合定数の大きさに従って、強い相互作用、電磁相互作用、弱い相互作用と分類されているが（ここでは重力は省く）、この中では強い相互作用内での保存則は非常に良い精度で成立するものとされている。たとえば、陽子や中性子などは重粒子（バリオン）族に属するが、「重粒子数」はこの相互作用では保存される量である。ただし、現実には全ての相互作用が一緒に存在するが、議論では一つの枠だけを取り出すことがあるので注意する。逆に、或る枠の議論に別の枠を引っ掛けて議論されていることもある。後で述べるアイソスピン空間だけで見れば、陽子も中性子も単一粒子だが、電磁相互作用が掛かると電荷の色付けが入るわけである。もし、三つの相互作用の区別の付かないような世界がある

とすれば、「重粒子数」という物理量が意味をなさない可能性もある。

☆ところで、一般に対称性の「高い」もののほうが、数学的に高等に見えるという理由で、高等と思われがちである。しかし、自然界においては必ずしもそうではない。たとえば、既に、ウイルスのなかに幾何学的に高い対称性を持ったものがある。T<sub>4</sub>-ファージと呼ばれる大腸菌に付くバクテリオファージはプラトンの正20面体の頭を持っている。植物に移っても、黄金数を具現しているヒマワリより、ラン科の植物の方が、遥かに高等植物なのである。もともと、正多面体の対称性を突き詰めれば「球」になろう。しかし球は対称性が高過ぎて、むしろ無対称性とさえ云える。

もし、ウイルスよりも生物が、ヒマワリよりもランが、より進化したものという立場を採れば、対称性を「少なく」することの方が、「進化」と繋がるわけである。ランの花の最大の特徴は花弁が「左右対称」をなしていることである。生物の進化の究極としての人間が同じ左右対称を獲得していることは言うまでもない。「対角線の科学」を標榜するフランスのロジェ・カイヨワ（『反対称』塚崎幹夫訳、思索社）は、この点から「鏡像対称」を真の対称とし、他の対称性から区別する。

☆進化と対称性との関係は、カイヨワによると大略次の様である。進化と安定とは常に表裏一体となっており、進化はもちろん安定な結末を志向する。安定性とは多くの場合対称性の獲得を意味し、或る対称性を得ると進化は停止する。しかし、本来の意味の進化は停滞した状態を嫌うから、次の段階として、いま獲得している対称性の何かを捨てねばならない。こうして対称性が減らされて行くわけである。では対称性を崩すことが本当に進化であるか？ カイヨワは〈シオマネキ〉の例を印象深く語っている。シオマネキはカニの一種であるが、その雄は片方のハサミが異様に大きい。この意味でカニの本来の対称性を破った例である。対称性を破った為に進化したと思われるのは次の点である。ハサミの一つが特異な形を持った

ために、これを使って脅しや戦いが出来るだけでなく、求愛や儀式などが従来のカニと違った形態で可能になり、そのコミュニケーションの幅は著しく拡大していることなどである。しかし、この例は反対称を真の意味で取り入れた例ではなく、形態上の不均衡があまりに明白であったために、活動・運動において阻害が生じ、結局この例は袋小路に入ってしまう凍結されたわけである。その点、人間の辿った道では、左右反対称を右利き・左利きという形式で取り入れ、形態上は左右対称とすることによって、進化の道を登りつめたというわけである。

☆有機物の世界はさておき、無機物の世界ではどうであろうか。「進化」という術語は広義に解釈しなければならないが、対称性を崩すこと によって反対称性を獲得して進化する例を幾つか挙げることはできる。たとえば、上下対称の結晶に圧力をかけることによって、上と下に+と-の電荷を生じさせ、反対称にさせ得る例がある。しかし、ここでは1927年のディラックの電子論の由来を訊ねて、その例とする。先述の言説に倣うと、光の量子である「光子」がエネルギーの或る閾値を越えると、光子のもつ或る高い対称性が崩れ、「電子」と「陽電子」の反対称な対を発生させる。これには単に、電荷の正負だけの違いだけでなく、スピンという概念があらわれ、込み入った反対称性が示される。

☆もともと光は電磁波で、そのポテンシャルは或るゲージのもとでマックスウェルの方程式に従っている。この方程式は2階の線型偏微分方程式で、しかも相対論的に不変になっている(擬球対称とでも言おうか)。一般にこの方程式に従って、質量を持った粒子に対してもクライン・ゴードン方程式と呼称される2階の相対論的方程式が導入されているが、ディラックはこの2階の方程式を因数分解し、2個の1階の微分作用素の積にして、1階の相対論的方程式を二つ得た。その内一つは電子を記述し、他方が陽電子に対応する。(陽電子の方が後で発見された。)

ディラックの分解は「粒子」に対する「反粒子」の存在に呼応す

るわけだが、方程式自身にも新しい反対称性を担う量が現われていて、1階の方程式の係数は4つの反交換性を満たす行列によって記され、それらはパウリのスピン行列と呼ばれるもので書け、勿論、方程式自身も4連になり、波動関数は4成分のスピンノールになる。比喩的に云えば、スピンノールはベクトルの「半分」の変換性をしめし、また量子論では作用素として反交換する生成消滅演算子によって展開される。(これに対して、光子場は正準交換演算子によって展開される。ある意味では、正準交換関係は反交換関係を含む。)

☆スピンとは粒子に与えられる一般的な量子数だが、代数的には角運動量に似ていて、屢々「自転」に準えられる。ただ、角運動量は位置と運動量の外積で表せるが、スピンではそうは言えない。このため、角運動量の大きさは整数値を取るのに対し、スピンは半奇数値が許される。電子の場合、スピンの大きさは  $1/2$  で、その第3成分は  $1/2$  と  $-1/2$  の二つが可能で、それぞれ電子と陽電子に対応する。一方、光子のスピンは1である。一般に、スピン半整数の粒子はフェルミオン、整数値をとるものはボソンと呼ばれる。フェルミオンは物質の構成要素であり、ボソンは(電磁場のような)介在力の場の量子で、それぞれ違った統計を満たす。

1932年に中性子が発見されたが、電荷は持たないものの陽子と質量が酷似していたため、陽子と中性子を同一の素粒子の二つの状態と見做そうという考えがハイゼンベルクによって提唱され、その分類にスピンを真似て、アイソトピック・スピンないしアイソスピンという概念が導入された。こうした分類のための空想空間は、その後、数多く発見された素粒子に見通しを与える為に拡張され、成功をおさめている。この拡張にはリー環の知識が役立っており、こんにち、リー環は素粒子の対称性の物理に欠かせないものとなっている。

☆アイソスピンのアイデアは、(陽子、中性子)を「核子」として核子のアイソスピンの大きさ  $1/2$ 、その第3成分の  $1/2$  の状態を陽子、 $-1/2$  のそれを中性子とするものである。これは電磁相互作用が弱い為に、それを度外視したとき強い相互作用の範囲で同一粒



子と見做せるという考えである。アイソスピン $3$ の成分は生成子として、リー環のうち最も簡単な(カルタンの) $A_1$ 型の代数を構成する(そのリー群は $SU_2$ )。

戦後、この代数を拡張して、更に多くの素粒子を多重子と見做す考えが推し進められた。たとえば、アイソスピンは一つの量子数であるが、更にもう一つ粒子を同時に規定する量子数(ハイパーチャージ)を導入して、 $A_2$ 型(群は $SU_3$ )にし、陽子、中性子も含めて、 $\Sigma^+$ 、 $\Sigma^0$ 、 $\Sigma^-$ 、 $\Lambda$ 、 $\Xi^-$ 、 $\Xi^0$ の8個の似た素粒子を八重子と見る方法などがそれである(具体的には、 $SU_3$ の8次元表現の weight diagram を使う)。これら重粒子族より軽い中間子族も湯川型の $\pi^+$ 、 $\pi^0$ 、 $\pi^-$ だけでなく、 $K^0$ 、 $K^+$ 、 $\eta$ 、 $K^-$ 、 $\bar{K}^0$ 中間子が同形の八重項をなしている( $\bar{K}^0$ は $K^0$ の反粒子)。

こうした重粒子と中間子(あわせてハドロンと呼称する)の対称性はクォークの導入によりもっと見通しのよいものになる。この範囲なら、3種のクォークで賄うことができ、重粒子は3個のクォークの組み合わせ、中間子は2つのクォークから成るとできる。

なお、スピン $3/2$ を持った重粒子は $SU_3$ の10次元表現のウェイト・ダイアグラムに載り、一つ空席であった $\Omega^-$ が後で実験的に発見されたのは有名な話である。

☆ 扨て、自然界に右手袋と左手袋とが対等に同数だけ存在するかというと、必ずしもそうではない。電子と陽電子の対は、ディラックの方程式の議論の範囲内では対等だが、われわれの世界では電子が圧倒的に多く、また(陽子と反陽子の対を見ても)陽子が圧倒的に多い。

こうした反対称はいろいろな分野に遍在し、古いものではパストゥール発見の名高い例で、天然の酒石酸が右旋光性を示すのに対し、人工的に作りだした酒石酸(ブドウ酸)は無旋光性、つまり常に左右対等であるという事実がある。ヘルマン・ワイルは“自然は一方において、ノアの味わったような美事なブドウ酒を贈り物として人間に与えておきながら、一つの型しか作らず、もう一方の型はパ

ストウールが拵え出すまで待っていたわけで、これは奇妙なことである”と  
言っている。パストウールによれば、ある種のカビはブドウ酸の内の右旋光性をもつ  
ものだけに手をつける。その他、左旋性のフェニルアラニンは微量でもフェニル  
ケトン尿症を発病させ発狂に至らしむが、右旋性のフェニルアラニンは無害であ  
る、等等。

リボースなど単糖類の右型であることもDNAの二重螺旋の右巻きを決定づけ  
ている(人工的には左巻きも作れる)。また、人間の社会が右手社会であること  
は歴然であろう。

1950年代に、素粒子の世界でもちょっとした議論があった。当時、 $\tau$ 中間子  
と $\theta$ 中間子が寿命も質量も酷似しているにもかかわらず、 $\tau^+$ と $\theta^+$ の $\pi$ 中間子  
への崩壊モードが違い、あたかも $\theta$ と $\tau$ の空間反転性(パリティ)が違って見え  
たため、 $\theta$ - $\tau$ パズルと言われていたが、これは結局同一粒子で( $K^+$ 中間子)  
ただ、「弱い相互作用」ではパリティが保存しないからだという風に解決された  
(リーとヤン)。パリティが保存しないとは、簡単に言えば、鏡像が脱落してい  
るということである。これまでの物理理論では、保存性とか対称性は金科玉条の  
ようにされてきたし、素粒子のような基本的な形体には「左右」の区別はあるま  
いと思われて来たから、パリティの非保存は、ある意味で衝撃的であった。

★ $\beta$ 崩壊(核が高速度の電子やニュートリノを出して別の核に移る  
過程)などの弱い相互作用で、パリティが保存しないことは、ニュ  
ートリノのスピンの向きが運動方向に対して左巻きを選  
択し(左ネジ進行)、その反対は存在しないことと関係している。

(反ニュートリノは右ネジ進行。)

パリティ(P)保存の破れの発見のあとも、空間反転(P変換)  
と荷電共役(C変換)との掛け合わせCP変換に対しては不変を  
保つと考えられていたが、1964年、弱い相互作用ではCP対称性も  
破れていることが明らかにされた。

☆1960年代から素粒子論では、超伝導理論の援用から「対称性の自発的な破れ」  
という概念が用いられているが(南部陽一郎)、これは弱い相互作用と電磁相互

作用の統一理論 (ワインバーグ、サラム) や、強い相互作用まで合併しようとする「大統一理論 (GUT)」 (ジョージ・グレイグの  $SU_5$  の理論など) を生んでいる。後者は強い相互作用をつかさどるクォークと、弱い相互作用にかかわる電子や  $\mu$  粒子、 $\tau$  粒子、それにニュートリノなどの軽粒子 (レプトン) を統一して記述するためのものであるが、この枠内では当然、クォークとレプトンの間に変換が生じる。一方、クォークは重粒子や中間子の担い手であったから、たとえば、 $SU_5$  の対称性が破れると、「重粒子数」も保存しないことになる。従って、永く物質世界の安定性の証しであった陽子も、崩壊し得ることになったわけである。

★マックスウェルの電磁場理論にあらわれるポテンシャルは、電荷の保存に関するいわゆるゲージ変換に従い、「ゲージ場」とも云われるが、他の相互作用でもこれが一般化され (ヤン、ミルズ)、ゲージ場が一環に値を持つようになっていたので、「非アーベル的ゲージ場」などと呼称される。クォークはこのヤン-ミルズの場の理論であつかわれる。また統一理論ではヒッグス場と呼ばれる場が「超伝導」性を担う。取り扱いの違いはともかく、アーベル場と非アーベル場との結果的な違いは、前者では、電荷が近付いて見れば大きくなり、遠退くと遮蔽されて小さくなる、つまり、結合定数がエネルギーを上げると共に大きくなるのに対し、後者では遠くからのほうが大きく見える、つまり、高エネルギーでは結合定数がどんどん小さくなるという点である (漸近的自由性)。このことは統一された理論のなかで、エネルギーをどんどん上げてゆくと、いつかそれぞれの相互作用を区別する結合定数が皆一致して、相互作用の違いがなくなることを意味する。実際、 $10^{15}\text{GeV}$  ぐらいに起こるといわれ、これはビッグバン直後  $10^{-36}$  秒後頃のことである。

☆対称性の破れとは「相転移」の一種の表現であって、上のようなモデルでは、個々の対称性を見るのではなく、対称性間の変移まで含めて論じる形式になっているわけである。これは理論が非線形化しているからで、ヤン-ミルズ場自身も

そうであるが、ヒッグス場の働きなどを見れば、理論全体は非アーベル的（非可換的）というより「非線形的」と言った方がよいだろう。

それはさておき、上のモデルを逆にたどると、相互作用が区別されない相をもつ時期は、いわば、球対称性ないし無対称性に近い。  $10^{-36}$  秒以後クォークとレプトンが分化して来るが、更に  $10^{-11}$  秒の時点で弱い相互作用が分離、  $10^{-4}$  秒でハドロンがクォークから構成されてくるとされている。これらは低温になるにつれて（水や結晶に見られるように）何度も「相転移」を繰り返して安定して行くのに似ていると言えよう。

ただ、当初、無対称性な相では、重粒子数はゼロであったはずである。重粒子数はクォークが担うから反クォークが同数だけあったことになる。しかし、現時点では重粒子数は  $10^{80}$  とも云われ、圧倒的に陽子・中性子の世界であって、反重粒子は見当らない。つまり、反対称な転移を繰り返してきている結果なのであろう。「大統一理論」はこの問題に解決を与えると期待されていて、たとえばビッグバン10秒後には陽電子の世界は電子・陽電子対消滅によって宇宙から消え去ったという根拠などが与えられているが、しかし、一般に反対称の選択がどのように宇宙の「進化」の各シーンで働いていたのか具体的に指摘するのはまだ難しいようである。

★現在の宇宙には思いのほか光子に溢れているが、これは例えば核子・反核子対消滅等に依ったとして ( $10^{-2}$ 秒)、たぶんそれまでに重粒子数がわずかでもゼロでなくなっていなければならない。そのためには、重粒子数保存が始まる前に、たとえば、CP対称の破れが既に働いていることなどが必要だろう。また、そのころ宇宙は熱的に平衡になれないほどの速度で膨張し続ける条件等も必要かもしれない。一応これらは「大統一理論」の枠内で肯定的に議論出来る様である。しかし、“非対称性だけが非対称性を生む”という言葉に、言葉の真実性だけは喜んで承認する、と皮肉ったワイルを満足させるとは思わない。

公開講座 (南 政 次) 予稿・補遺

パウリのスピン行列とスピノール

パウリのスピン行列は、リー代数との関係で本講でも何度も出てくるが、スピノール表示による相対論的扱いにも欠かせないものである。ただ、今回は相対論の対称性は主題としないので、ここではそれを補足するため、スピン行列がスピノールや物理量のローレンツ不変性などにどのような使われ方をするか簡単に紹介しておく。

例えば、四次元時空の点  $x = (x_0, x_1, x_2, x_3)$  を次ぎのように  $2 \times 2$  行列に対応させることができる。

$$(x_0, x_1, x_2, x_3) \longleftrightarrow X = \sum_{\mu=0}^3 x_{\mu} \sigma_{\mu} = \begin{pmatrix} x_0 + x_3 & x_1 - ix_2 \\ x_1 + ix_2 & x_0 - x_3 \end{pmatrix} \quad (1)$$

ここで

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2)$$

であって、 $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$  はパウリのスピン行列である。この  $X$  によって逆に  $x$  は

$$x_{\mu} = \frac{1}{2} \text{trace}(X \sigma_{\mu}) \quad (3)$$

と書けるし、四次元内積も

$$x^{\mu} x_{\mu} \equiv (x, x) = \det X \quad (4)$$

と書ける。

いま、 $\det A = 1$  の  $2 \times 2$  行列  $A$  をとって

$$X' = A X \bar{A}^t \quad (5)$$

と変換すると、これがローレンツ変換

$$x' = \Lambda(A) x \quad (6)$$

に対応する。但し、 $\Lambda(-A) = \Lambda(A)$ 。

$A$  は2次元の "ベクトル"  $\xi = \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \end{pmatrix} \in V$  に作用するので、変換

$$\xi^{\alpha} \rightarrow A^{\alpha}_{\beta} \xi^{\beta} \quad (\alpha, \beta = 1, 2) \quad (7)$$

を考えることが出来る。また、複素共役の働く空間も考え、そこでの変換を

$$\eta^{\alpha} \rightarrow \bar{A}^{\alpha}_{\beta} \eta^{\beta} \quad (8)$$

とする。

そこで、例えば  $(x, x) = 0$  (光錐上) を満たす点は

$$X = \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \end{pmatrix} (\eta^1 \eta^2) \quad (9)$$

あるいは

$$X^{\alpha\dot{\beta}} = \xi^\alpha \eta^{\dot{\beta}} \quad (9')$$

などと表すことができる。すると、ローレンツ変換は具体的に

$$\begin{aligned} X^{\alpha\dot{\beta}} &\rightarrow A^\alpha_\beta \xi^\beta \bar{A}^{\dot{\beta}}_{\dot{\gamma}} \eta^{\dot{\gamma}} = A^\alpha_\beta \xi^\beta \eta^{\dot{\gamma}} \bar{A}^{\dot{\beta}}_{\dot{\gamma}} \\ &= A^\alpha_\beta X^{\beta\dot{\gamma}} \bar{A}^{\dot{\beta}}_{\dot{\gamma}} = (A \times \bar{A}^t)^{\alpha\dot{\beta}} \end{aligned} \quad (10)$$

となる。

$\xi^\alpha$  や  $X^{\alpha\dot{\beta}}$  は次のような反変性をもつ。

$$\begin{aligned} \xi^\alpha \epsilon_{\alpha\beta} &= \xi_\beta, \quad \xi^\alpha = \epsilon^{\alpha\beta} \xi_\beta \quad (\xi_1 = -\xi^2, \xi_2 = \xi^1) \\ X_{\alpha\dot{\beta}} &= \epsilon_{\alpha\gamma} \epsilon_{\dot{\beta}\delta} X^{\gamma\dot{\delta}} \end{aligned} \quad (11)$$

ここで  $\epsilon_{\alpha\beta}$  は  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$  の要素である。

$\xi^\alpha, \eta^{\dot{\alpha}}$  などを(階数1の)スピノール、 $X^{\alpha\dot{\beta}}$  などをベクトル(階数(1,1)のスピノール)などと称える。 $\sigma_\mu^{\alpha\dot{\beta}}$  によってもっと高階のテンソルもつくれる。

ところで、一般に四元ベクトル  $g = (g_0, g_1, g_2, g_3)$  を、(1)にならって

$$Q^{\alpha\dot{\beta}} = \sum \partial_\mu \sigma_\mu^{\alpha\dot{\beta}} \quad (12)$$

で表すと、

$$Q^{\alpha\dot{\beta}} Q_{\dot{\beta}\alpha} = \delta^\alpha_\alpha (g, g) \quad (13)$$

を得る。そこで、 $x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3)$  によって

$$\partial_\mu = \partial/\partial x^\mu = \left( \frac{\partial}{\partial x^0}, \frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3} \right) \quad (14)$$

$$(\partial_\mu \partial^\mu = -\square = \partial_0^2 - \partial_1^2 - \partial_2^2 - \partial_3^2)$$

をつくり

$$D^{\alpha\dot{\beta}} = \partial_\mu \sigma_\mu^{\alpha\dot{\beta}} \quad (15)$$

と定義すると

$$D^{\alpha\dot{\beta}} D_{\gamma\dot{\beta}} = -\delta^{\alpha}_{\gamma} \square \quad (16)$$

が得られる。いま、 $A \in SL(2, \mathbb{C})$  によって変換する2次元スピノール場  $\psi_{\alpha}(x)$  を考えると、最も簡単な共変方程式は

$$D_{\alpha\dot{\beta}} \psi^{\alpha} = 0 \quad (17)$$

であろうが、 $D^{\gamma\dot{\beta}}$  を左からかければ、(16) によって  $\psi_{\alpha}(x)$  は

$$\square \psi_{\alpha}(x) = 0 \quad (18)$$

も満たすことがわかる。(17) は

$$(\partial_0 + \sigma \cdot \partial) \psi = 0 \quad (19)$$

と書ける一次方程式なので、ディラック方程式の雛型といえる。

尚、変換行列  $A$  をユニタリー ( $\overline{A^t} = A^{-1}$ ) でかつ  $\det A = 1$  に限れば  $A \in SU_2$  ということになる ( $SU_2$  は  $SU(2, \mathbb{C})$  のコンパクトな部分群)。このときは、

(5) のトレースをとれば  $x^0' = x^0$  となって、 $A$  が3次元空間での回転群に対応することになる。この場合、通常、数学では

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}, \quad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \quad (20)$$

物理では

$$A = e^{i\theta\sigma/2} = \left( \cos \frac{\theta}{2} + i\sigma \cdot \hat{n} \sin \frac{\theta}{2} \right) \quad (21)$$

と表示されるが、後者は

$$A = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} + in_3 \sin \frac{\theta}{2} & (n_2 + in_1) \sin \frac{\theta}{2} \\ (-n_2 + in_1) \sin \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} - in_3 \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \quad (21')$$

のことである。但し、

$$\hat{n}^2 = 1.$$

**勘誤：** 予稿第5頁上13行に脱落がありますので、次ぎの様に訂正下さい。

1/2 と -1/2 の二つが可能で、それぞれ電子と陽電子……

→ 1/2 と -1/2 の二つが可能で、それぞれ電子の運動の方向に並行なスピン

固有状態として実現される。運動の方向は時間的に正の向きと、逆の向きの

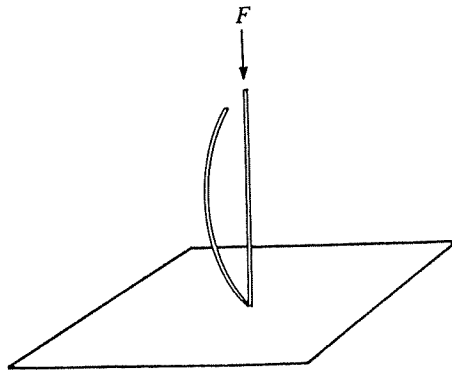
ものが考えられるが、それぞれ電子と陽電子……

### 多重度8のバリオンの例

粒子	電荷	ストレンジネス	ハイパーチャージ	$I_3$	クォークの組合せ
p	1	0	1	1/2	uud
n	0	0	1	-1/2	udd
$\Lambda$	0	-1	0	0	$(ud-du)s/\sqrt{2}$
$\Sigma^+$	1	-1	0	1	uus
$\Sigma^0$	0	-1	0	0	$(ud+du)s/\sqrt{2}$
$\Sigma^-$	-1	-1	0	-1	dds
$\Xi^0$	0	-2	-1	1/2	uss
$\Xi^-$	-1	-2	-1	-1/2	dss

### 3個のクォーク

クォーク	$B$	$Y$	$S$	$Q$	$I$	$I_3$
u	1/3	1/3	0	2/3	1/2	1/2
d	1/3	1/3	0	-1/3	1/2	-1/2
s	1/3	-2/3	-1	-1/3	0	0



A rod bent under pressure. The bent position exhibits spontaneous symmetry breaking.