

数学入門公開講座

昭和63年8月2日(火)から8月11日(木)まで

京都大学数理解析研究所

数学入門公開講座

講師及び内容

1. 演算子法の話 (7時間)

京都大学数理解析研究所・教授 松浦重武

微分・積分などの解析的な計算を、たんに記号の掛け算や割り算として取扱い、微分方程式の解法などを記号の形式的代数計算ですませるのが演算子法である。その歴史は19世紀のはじめ頃までさかのぼるらしいが、イギリスの電気工学者ヘビサイドが組織的に使用してから普及したので、ヘビサイド算法ともいわれる。

ヘビサイド算法は、正しい答を素早く求める便利な方法であったが、数学的基礎づけを持たなかった。

今世紀になってから、ラプラス変換による基礎づけが行われたが、簡明さが失われ、適用範囲にも制限がついた。ところで1950年頃、ポーランドの数学者ミクシンスキーは、ヘビサイドの簡明さをそのまま保つ基礎づけに成功した。

今回は、ミクシンスキーの方法によって演算子法の入門的な部分を解説する。

2. 無限大の自由度と対称性 (7時間)

京都大学数理解析研究所・助教授 三輪哲二

可解格子模型とモジュラー函数、無限次元リー環の関係について基本的な例を中心に解説する。

3. 結び目の話 (7時間)

京都大学数理解析研究所・教授 島田信夫

3次元空間における閉曲線である結び目の同位型分類は、直感的に捉え易いものとして、恐らく昔から考えられた問題であろう。そしてこの問題は、オイラーの曲面定理などとともに、位相幾何と呼ばれる数学分野が創られる要因になった。ここでは、関連する絡み輪、組み紐群の話をまじえて、この方面における最近の進展にも触れたい。

4. 代数方程式について (7時間)

京都大学数理解析研究所・教授 一松信

代数方程式は古くて新しい問題である。古典的な代数的解法を見直すとともに、数値解法と合せて考察してみたい。

時間割

日	8月2日(火)	3日(水)	4日(木)	5日(金)	6日(土)	7日(日)	8日(月)	9日(火)	10日(水)	11日(木)
13:15~15:00	松浦	松浦	松浦	松浦	休	講	島田	島田	島田	島田
15:00~15:15	休憩						休憩			
15:15~17:00	三輪	三輪	三輪	三輪			一松	一松	一松	一松

1. 演算子法の話 (7時間)

京都大学数理解析研究所・教授 松 浦 重 武

1988, AUGUST 2, 3, 4, 5

13:15 - 15:00

演算子法の話

松 浦 重 武

微分方程式などを解くのに、微分や積分の計算を、記号の形式的な掛け算や割り算でおきかえて、計算を簡単にしようというのが、演算子法である。

その歴史は、19世紀のはじめ頃に始まるらしいが、一般に普及したのは、英国の電気工学者ヘビサイドが、体系的に展開してからである(19世紀の終り頃)。

しかし、この演算子法(ヘビサイド算法)は、簡便に正しい答えをあたえるが、その数学的根拠は、明らかではなかった。

そこで、今世紀になって、演算子法の正当化が問題となり、まずラプラス変換を用いて、その正当化が試みられた。しかし、ラプラス変換の適用範囲が限られたことと、ラプラス変換の理論のために、軽ろやかであったヘビサイド算法が重くなり、範囲もせばめられた。しかも、このため、電気工学科では、現在でも、ラプラス変換の理論を、伝統的に必修としている大学が多い。

しかし、今世紀の中頃になって、ポーランドの数学者ミクシンスキーは、ラプラス変換などを全く用いず、直接的にヘビサイド算法を数学的に合理化した。その理論の展開は、初等的かつ代数

的であり、適用範囲も制限をうけず、明快である。

今回は、ミクシンスキーによって合理化された線に沿って、演算子法の話をするのが目的である。

ところで、いくら簡単化されたといっても、一つの算法に習熟し、問題を自由に解けるようになるには、学習に相当に時間があるのは当然である。そのことを考えれば、この話題は、時間の限られた今回のような夏期講座には不向きかも知れない。そこで、この欠点を補うために、ミクシンスキーの著書の、はじめの部分の拙訳と公式表を付加する。筆者の話は、その要点と、基本的な考え方の解説に限られるが、興味をひく問題の解法に話が及ぶように努力してみたい。

第Ⅱ部 演算子代数

Ⅱ 連続関数の合成積とその性質

§ 1. 合成積の定義

この本で述べる理論の出発点は合成積(たたみこみともいう)である。二つの関数 $a(t)$ と $b(t)$ の合成積とは、次の積分で定義される関数 $c(t)$ のことである。

$$c(t) = \int_0^t a(t-\tau)b(\tau) d\tau.$$

例 1. $a(t) = t^2, b(t) = e^t$ とすると,

$$\begin{aligned} c(t) &= \int_0^t (t-\tau)^2 e^\tau d\tau = \int_0^t (t^2 - 2t\tau + \tau^2) e^\tau d\tau \\ &= t^2 \int_0^t e^\tau d\tau - 2t \int_0^t \tau e^\tau d\tau + \int_0^t \tau^2 e^\tau d\tau \\ &= t^2(e^t - 1) - 2t(t e^t - e^t + 1) + (t^2 e^t - 2t e^t + 2e^t - 2) \\ &= 2e^t - t^2 - 2t - 2 \end{aligned}$$

となる。

例 2. $a(t) = b(t) = \sin t$ とすると,

$$\begin{aligned} c(t) &= \int_0^t \sin(t-\tau) \sin \tau d\tau \\ &= \int_0^t (\sin t \cos \tau - \cos t \sin \tau) \sin \tau d\tau \\ &= \sin t \int_0^t \cos \tau \sin \tau d\tau - \cos t \int_0^t \sin^2 \tau d\tau \\ &= \sin t \cdot \frac{1}{2} \sin^2 t - \cos t \cdot \left(\frac{1}{2} t - \frac{1}{2} \sin t \cos t \right) \\ &= \frac{1}{2} (\sin t - t \cos t) \end{aligned}$$

となる。

練習問題 次のおのおの²⁾対になっている関数の合成積を求めよ。

(1) $a(t) = 1 - \alpha t, b(t) = e^{\alpha t}$

(2) $a(t) = e^{\alpha t}, b(t) = 1 - \alpha t$

(3) $a(t) = 1, b(t) = \sqrt{1+t}$

(4) $a(t) = \sqrt{1+t}, b(t) = 1$

I 連続関数の合成積とその性質

(5) $a(t) = \sinh t^1), b(t) = \sin t$ (6) $a(t) = \sin t, b(t) = \sinh t$

§2. クラス C

区間 $0 \leq t < \infty$ で定義された連続関数は, 演算子法において, 特に重要な役割をする. そこで, このような関数の全体 (関数のクラス) を C という文字で表すことにする. クラス C の関数は, 実数または複素数の値をとるものとする.

§1で考えた関数はすべて, クラス C に属している. そしてまた実数値をとっている. e^{it} という関数は, 複素数 (実数でない複素数) の値をとるクラス C の関数の一つの例である. $1/t$ という関数は, クラス C には属さない. なぜなら, それは $t=0$ で不連続だからである.

いま $a(t)$ と $b(t)$ を, クラス C の関数とすると, その合成積も, またクラス C に属する. 実際, それは $0 \leq t < \infty$ で定義された連続な関数だから.

I章では, クラス C の関数だけを考察する. だから, この仮定はいちいち述べない.

練習問題 次の関数のうち, クラス C に属するものはどれか. また, 属さないものは, どれか.

$$\frac{1}{t+1}, \frac{1}{t-1}, \frac{1}{t-i}, \frac{1}{e^t+e^{-t}}, \frac{1}{e^t-e^{-t}}, \frac{1}{\cos t}, \frac{1}{1+\cos t},$$

$$\frac{1}{2+\cos t}, \frac{1}{i+\cos t}.$$

§3. 合成積の可換律

§1の練習問題の結果を比較してみると, 《合成積は, そこに用いる関数の順序には関係しない》ということがわかる. この事実は, 任意の関数の対 $a(t), b(t)$ に対しても, 正しい. このことを一般の場合に示すには, 次の公式を証明せねばならない.

$$(3.1) \quad \int_0^t a(t-\tau)b(\tau) d\tau = \int_0^t b(t-\tau)a(\tau) d\tau.$$

左辺の積分で $t-\tau=\sigma$ とすると

$$= \int_t^0 a(\sigma)b(t-\sigma) d\sigma = \int_0^t b(t-\sigma)a(\sigma) d\sigma$$

を得る. したがって (3.1) が証明された.

いま証明した性質を, 合成積の可換律という. これは, 算術における数の掛け算の可換律に似ている. 算術では, 任意の二つの数 a, b に対して $ab=ba$ が成り立つのであった.

1) $\sinh t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$ (双曲正弦関数).

§ 5. 演算子法における基本的な演算としての加法と合成積

§ 4. 合成積の結合律

合成積は, 数の掛け算の結合律:

$$(ab)c = a(bc)$$

に似た性質もまたもっている.

数に対しては, この性質は次のようにいい表される: $ab=g$ かつ $bc=h$ とすれば, $gc=ah$ となる.

合成積の結合律についての定理は, 同じような形で, 便利に表現できる:

$$\int_0^t a(t-\tau)b(\tau)d\tau = g(t) \text{ かつ, } \int_0^t b(t-\tau)c(\tau)d\tau = h(t) \text{ とすれば}$$

$$\int_0^t g(t-\tau)c(\tau)d\tau = \int_0^t a(t-\tau)h(\tau)d\tau$$

が, つねに成立する.

[証明]
$$\int_0^t g(t-\tau)c(\tau)d\tau = \int_0^t \left[\int_0^{t-\tau} a(t-\tau-\sigma)b(\sigma)d\sigma \right] c(\tau)d\tau$$

と書けるから, いま $\sigma = t - \tau - \omega$ とおくと

$$\int_0^t g(t-\tau)c(\tau)d\tau = \int_0^t \left[\int_\tau^t a(t-\omega)b(\omega-\tau)d\omega \right] c(\tau)d\tau$$

$$= \iint_T a(t-\omega)b(\omega-\tau)c(\tau)d\omega d\tau$$

となる. ここで, 二重積分は, 不等式 $0 \leq \tau \leq \omega \leq t$ で定義される三角形 T を積分領域としている. そこで, この二重積分を, 今度は変数の順序を変えてもう一度, 反復積分に直せば

$$\int_0^t g(t-\tau)c(\tau)d\tau = \int_0^t a(t-\omega) \left[\int_0^\omega b(\omega-\tau)c(\tau)d\tau \right] d\omega = \int_0^t a(t-\omega)h(\omega)d\omega$$

となり, これで結合律は証明された.

§ 5. 演算子法における基本的な演算としての加法と合成積

算術では, 掛け算の結合律によって, 三つの数 a, b, c の積を abc と書くことができる. それは $(ab)c$ および $a(bc)$ のどちらかに従って計算しても (結合律によって) 同じになるからである. 同様に, 三つの関数 $a(t), b(t), c(t)$ の合成積を計算するのに, それらをどのように結合して行くかは, 問題にならない. しかしながら, 積分記号を使っていたのでは, 三つの関数の合成積を結合の順序を無視して, 数の積 abc のように便利に書き表すことができない.

I 連続関数の合成積とその性質

しかしながら、もしわれわれが二つの数の積の場合と同じように、二つの関数 $a(t)$, $b(t)$ の合成積を ab または $a \cdot b$ と書くことにすれば、非常に簡単になる。この約束に従って、今後はいつも、三つの関数 $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ の合成積は abc と書くことにする¹⁾。四つ以上の関数の合成積も、同じ仕方で書くことができる。

合成積が、数の掛け算と同じ性質（結合律と可換律）をもっている以上は、形式的な計算もまた同じようにできる。この事実が、演算子法において、本質的な役割をするのである。演算子法における基本的演算は、加法と合成積である。これはちょうど、算術における、足し算と掛け算である。

算術においては、演算の対象になる要素は数であった。それに対して、演算子法においては、クラス C の関数がそのような要素である²⁾。

合成積を普通の積のように書けば、もちろん、あいまいさが残るように思われる。たとえば等式

$$ab=ba \quad \text{や} \quad (ab)c=a(bc)$$

は、一方では普通の代数における意味をもち、他方では演算子法における意味をもつことになる。しかしながら、このあいまいさは、別に支障をきたすことはない。というのは、上の等式の意味は、 a , b , c などの文字に何を代入するかによって定まるからである。数を代入すれば、普通の積を扱っているのであり、関数を代入すれば、合成積なのである。

可換律と結合律のほかに、合成積は、積のもっているもう一つの基本的性質、すなわち、加法に関する分配律：

$$a(b+c)=ab+ac$$

をもっている。

実際、次の式が成立する。

$$\int_0^t a(t-\tau)[b(\tau)+c(\tau)]d\tau = \int_0^t a(t-\tau)b(\tau)d\tau + \int_0^t a(t-\tau)c(\tau)d\tau.$$

同様に、合成積の引き算に関する分配律：

$$a(b-c)=ab-ac$$

も証明できる。

演算子法において、普通の代数の記号を用いることは、事柄をずいぶん簡単にする。

われわれが既になじみになっている慣れに従うことができるから、複雑な積分の変換をほ

1) このような書き方をすると、数の掛け算と混同しそうであるが、それに関しては、後で注意が述べられる(次の §6 を見よ) [訳注]

2) 後に、不連続関数や演算子と呼ばれる要素もまた演算の対象として導入される。

§ 6. 関数と関数値

とんど機械的な計算でおき換えることになる。

§ 6. 関数と関数値

二つの定数関数の合成積を, 簡単に書こうとすると, 誤解を生むおそれがある. たとえば, いつも 2 という値をとる関数と, いつも 3 という値をとる関数の合成積を考えてみる.

この場合には, 算術では, $2 \cdot 3$ という記号は, 数 6 を表すけれど, 合成積を表す記号とみれば $\int_0^t 2 \cdot 3 d\tau = 6t$ という関数になる. このことは, 定数の概念と, 定数関数という概念は, 全く異なっているのに, 同じ記号を使っているために生ずる困難である. ここでは, 論理的に厳密な定義には立ち入らないで, この違いを幾何学的に説明しておこう.

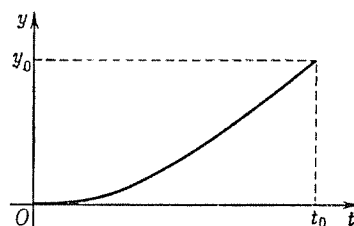


図 1

明しておこう. よく知られているように, 数は, いわゆる《数直線》上の点として, 幾何学的に表現される. どんな数も, 数直線上の一つの点に対応するし, 逆に, 数直線のどの点にも, その点に応じて, 一つの数が対応する.

このように, 数を表現するには, 一つの直線があれば, よかったけれども, 《(実数値)関数》を表すには, 《平面》が必要になる. 図 1 は関数 $\frac{1}{6}t^2$ のグラフである. この関数は, 数を表す場合とは違って, 1 点ではなく, 放物線を構成する無限個の点で表されている. t 軸上の 1 点 t_0 が, 与えられれば, 図に示されたグラフによって, y 軸上の点 y_0 が得られる. 点 y_0 に対応する数は, この関数の《点 t_0 における値》といわれる.

この例から, 関数 $f(t)$ というものと《その関数が点 t においてとる値》というものの間には, 意味の相異があることがわかる. もしも, 関数が複素数値もとるならば, その表現に平面を使うことは無理だけれども, しかし, その場合でも明らかに, 関数とその関数値とは, 二つの異なった概念である. いままでの普通の数学においては, これらの二つの概念に対して, 別々の記号を導入する必要はなかったけれども, しかし, たとえば関数解析学においては, 特に演算子法においては, これらを区別することが絶対に必要である.

そこで, これからは, 《関数》という字を前に書かないで, $f(t)$ という記号を書いたときには, その関数の点 t における値を示すこととし; 関数そのものを示すには $\{f(t)\}$ という記号を使うことにしよう¹⁾.

1) 著者によっては, 関数値と区別して, 関数そのものを示すのに, $f(\hat{t})$ とか $f(\cdot)$, あるいは $f(\circ)$ という記号を用いている. しかし, これらの記号では, いつも矛盾なく使用するわけにはゆかない. たとえば, このやりかたでは, いつも 1953 という値をとる関数と, 1953 という数それ自体とは, 区別することが難しいだろう.

I 連続関数の合成積とその性質

この約束は, 図式的に書けば, 次のようになる:

$$\{f(t)\} = \text{関数 } f(t),$$

$$f(t) = \text{関数 } f(t) \text{ の点 } t \text{ における値.}$$

このようにすれば, たとえば, 記号 $\{2\}$ はその値が2である定数関数を示し, 数字2自身は数を表すことになる.

幾何学的には, 関数 $\{2\}$ は t 軸に平行な一つの直線で表される. それに反して, 数2は一つの軸上の1点で表される. 関数 $\{2\}$ のとる値は, すべての t に対してつねに2であり, それは図2では, y 軸上に2と書いた点で示されている.

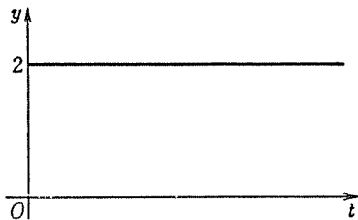


図 2

上に述べた約束に従えば, 記号 $2 \cdot 3$ はもはやあいまいさをもたない. それは数2と3の普通の積であって, 6に等しい. そして, 記号 $\{2\} \{3\}$ は, 《関数2と関数3の合成積, すなわち関数 $6t$ 》を示すことになる. このようにして, 次の等式が得られる.

$$2 \cdot 3 = 6, \quad \{2\} \{3\} = \{6t\}$$

練習問題 この節で導入された記号を用いて, 次の公式を確かめよ.

$$(1) \{1\} \{e^t\} = \{e^t - 1\}$$

$$(2) \{1\} \{\cos t\} = \{\sin t\}$$

$$(3) \{1\} \{1\} = \{t\}$$

$$(4) \{t^2\} \{t^3\} = \left\{ \frac{1}{60} t^6 \right\}.$$

§7. 記号法

次の一般公式が成り立つ.

$$\{a(t)\} + \{b(t)\} = \{a(t) + b(t)\},$$

$$\{a(t)\} \{b(t)\} = \left\{ \int_0^t a(t-\tau) b(\tau) d\tau \right\}.$$

最初の公式は, 関数を加えるには単に関数にとる値を加えればよいことを示している. 二番目のは前節の約束の結果である.

関数を表すのに, いつでもいちいち $\{f(t)\}$ という形に書くのは厄介であろう. 同じ関数が計算の中に幾度もでてくるときには, それを一つの文字で表すのが最も便利である. すなわち

$$a = \{e^{t^2} \cos t\}, \quad b = \left\{ t^3 - \frac{1}{\sqrt{1+t}} \right\} \text{ など.}$$

もしも具体的な関数の例ではなくて, 一般的な記号 $\{f(t)\}$ を扱っているときには, 簡単さのためには, 同じ文字を用いるのが一番よい.

§ 8. 積分演算子

$$f = \{f(t)\}.$$

同様に, 次の記法を導入するのが便利である

$$a^2 = a \cdot a,$$

$$a^3 = a \cdot a \cdot a,$$

$$a^4 = a \cdot a \cdot a \cdot a \quad \text{など}.$$

m と n が自然数のときには, 次の公式が成り立つ.

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}, \quad a^n \cdot b^n = (ab)^n, \quad (a^m)^n = a^{mn}.$$

これらの公式は, 普通の代数のときと同じやり方で証明される.

練習問題

1. 次の等式を確かめよ.

$$(1) \quad \{t\}^2 = \left\{ \frac{1}{6} t^3 \right\} \quad (2) \quad \{t\}^3 = \left\{ \frac{1}{120} t^5 \right\} \quad (3) \quad \{e^t\}^2 = \{te^t\}$$

$$(4) \quad \{e^t\}^3 = \left\{ \frac{1}{2} t^2 e^t \right\} \quad (5) \quad \{2\}^3 = \{4t^2\} \quad (6) \quad \{2\}^5 = \left\{ \frac{4}{3} t^4 \right\}.$$

2. 次の式を簡単にせよ.

$$(1) \quad \{\cos^2 t\} \{t\} + \{t\} \{\sin^2 t\}$$

$$(2) \quad \{1 - \sqrt{t}\} \{\sin t\} + \{1 + \sqrt{t}\} \{\cos t\} + \{1 - \sqrt{t}\} \{\cos t\} + \{1 + \sqrt{t}\} \{\sin t\}.$$

§ 8. 積分演算子

合成積の定義から,

$$(1) \quad \{f(t)\} = \left\{ \int_0^t f(\tau) d\tau \right\}$$

となる. 関数 (1) の特徴は, 任意の関数 $\{f(t)\}$ と合成積をつくと, その関数の 0 から t までの区間における積分が得られることである. このことから, 関数 (1) は 積分演算子 と呼ばれ, 簡単に, 記号 I によって表す.

$$I = \{1\}.$$

積分演算子のべき (冪) を次々と計算するのは容易である.

$$I^2 = \left\{ \frac{t}{1} \right\}, \quad I^3 = \left\{ \frac{t^2}{1 \cdot 2} \right\}, \quad I^4 = \left\{ \frac{t^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \right\} \quad \text{など}.$$

記号

$$n! = 1 \cdot 2 \cdots n$$

を用いれば, 一般公式を書くことができる.

$$I^n = \left\{ \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \right\}.$$

I 連続関数の合成積とその性質

この公式は任意の自然数 $n \geq 2$ に対して正しい. もし $0! = 1$ と約束すれば, $n=1$ に対しても正しいことになる.

合成積の結合律を用いれば, $I^n\{f(t)\}$ という式を二通りに解釈できる: 1°. 関数 $\{f(t)\}$ を 0 から t までの区間で n 回積分して得られる関数として, あるいは 2°. 関数 $\{t^{n-1}/(n-1)!\}$ と関数 $\{f(t)\}$ の合成積として, である. したがって, 次の公式を得る.

$$\underbrace{\int_0^t dt \cdots \int_0^t f(t) dt}_{n \text{ 回}} = \int_0^t \frac{(t-\tau)^{n-1}}{(n-1)!} f(\tau) d\tau.$$

これは コーシー (Cauchy) の公式 として知られている.

練習問題

1. 次の式を計算せよ.

(1) $I^2\{n \sin nt\}$

(2) $I^2\{ne^{-nt}\}$

(3) $I^3\{n^2te^{-nt}\}$.

2. 次の式を証明せよ.

$$I^3\{n^2 \cos nt\} = I^2\left\{\frac{1}{n} \sin nt\right\}.$$

Ⅲ ティッチマーシュ (Titchmarsh) の定理

§9. 定理および一般的な注意

第 3, 4 および 5 節において, われわれは, 合成積の可換律, 結合律, および加法に対する分配律を証明した. しかしながら, 合成積のもっと深い性質は次の定理である.

《 f と g をクラス C (§2, p.2 を見よ) の関数とし, どちらも恒等的には 0 ではないとすると, その合成積は恒等的には 0 にならない.》

この定理は E. Titchmarsh によって 1924 年に定式化され証明された. 彼の証明は, ある解析関数の零点の分布の研究にもとづいていた. 解析関数あるいは調和関数の増大の速さを研究することによって, もっと簡単な証明が, 1941 年に M. Crum [1] により, 1947 年および 1948 年に J. Dufresnoy ([1] と [2]) によって, 与えられた. 実変数関数の方法だけにもとづいた証明は, 1952 年に, C. Ryll Nardzewski¹⁾ によって与えられた——それをこの章で述べる²⁾.

はじめに, われわれは, いくつかの準備的な命題を証明する. それらは, 連続関数に対して述べる³⁾. 演算子法の応用だけに興味をもっている読者は, この章を読まずにすましても, 残りの他の部分の理解に差支えない. 直ちにⅢ章にとりかかってよい.

§10. フラグメン (Phragmén) の定理

1904 年に, Phragmén [1] は, 次の定理を証明した.

《 g を, 区間 $[0, T]$ における連続関数とすれば,

$$(10.1) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k!} \int_0^T e^{kx(t-\tau)} g(\tau) d\tau = \int_0^t g(\tau) d\tau$$

が, 区間 $0 \leq t < T$ の任意の t に対して成り立つ.》

もし, 記号

$$(10.2) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} \text{と} \int_0^T$$

-
- 1) Nardzewski の証明は別の論文としては発表されていない.
 - 2) 巻末に, あまり計算を用いない一つの証明を述べる. [訳者]
 - 3) それらの命題は, Titchmarsh の定理と同様に, ルベーク (Lebesgue) の意味での任意の可積分関数の場合に容易に拡張できる.

II ティッチマーシュ (Titchmarsh) の定理

の順序を互いに交換してもよいとすれば, 証明は, 公式 (10.1) の左辺を次の形

$$\int_0^T g(\tau) \lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k!} e^{kx(t-\tau)} d\tau,$$

すなわち,

$$(10.3) \quad \int_0^T g(\tau) \lim_{x \rightarrow \infty} [1 - \exp(-e^{x(t-\tau)})] d\tau$$

という形に書くことにより, 容易にできる.

明らかに

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \exp(-e^{x(t-\tau)}) = \begin{cases} 0 & (\tau < t \text{ のとき}) \\ 1 & (t < \tau \text{ のとき}) \end{cases}$$

である.

したがって, (10.3) の被積分関数は, 区間 $0 < \tau < t$ では $g(\tau)$ に等しく, 区間 $t < \tau < T$ では 0 に等しい. このようにして, 積分 (10.3) は, 簡単に, 積分 $\int_0^t g(\tau) d\tau$ に帰着するのである (証明終).

(10.2) の記号の交換性は, 式 (10.1) の左辺の場合には, 関数列の積分に関するある定理¹⁾ によって正当化される.

もしも, 全く初等的でかつ同時に完全な証明を望むならば, つぎに述べる計算的方法によってもできる.

区間 $0 \leq t < T$ の任意の一つの点 t を固定して考えよう. そして, 任意の自然数 n と正の数 x に対して, 次のように書こう.

$$(10.4) \quad \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k!} \int_0^T e^{kx(t-\tau)} g(\tau) d\tau = I_n(x) + K_n(x).$$

ここで,

$$(10.5) \quad \begin{cases} I_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k!} \int_0^t e^{kx(t-\tau)} g(\tau) d\tau, \\ K_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k!} \int_t^T e^{kx(t-\tau)} g(\tau) d\tau \end{cases}$$

である.

(10.5) の第 1 式において, 和と積分の順序を交換すれば (有限和の場合には, それはつねに許される), 容易に次式を得る.

$$I_n(x) = \int_0^t g(\tau) d\tau - \int_0^t g(\tau) \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} e^{kx(t-\tau)} d\tau$$

1) いわゆる Lebesgue の定理である. たとえば伊藤清三 “ルベグ積分入門” §13 (裳華房) を見よ. [訳注]

§ 10. フラグメン (Phragmén) の定理

$$= \int_0^t g(\tau) d\tau - \int_0^t g(\tau) \left(\exp[-e^{x(t-\tau)}] - \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} e^{kx(t-\tau)} \right) d\tau,$$

すなわち

$$(10.6) \quad I_n(x) = \int_0^t g(\tau) d\tau + J(x) + L_n(x).$$

ここで

$$J(x) = - \int_0^t g(\tau) \exp[-e^{x(t-\tau)}] d\tau,$$

$$L_n(x) = \int_0^t g(\tau) \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} e^{kx(t-\tau)} d\tau.$$

いま, M によって, 区間 $[0, T]$ における関数 g の絶対値の最大値を表せば,

$$|L_n(x)| \leq \int_0^T M \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} e^{kx\tau} d\tau = MT \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} e^{kxT} = MT \left(\exp(e^{xT}) - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} (e^{xT})^k \right)$$

となる. したがって $\lim_{n \rightarrow \infty} L_n(x) = 0$ を得る, というのは, 最後の和は極限值が $\exp(e^{xT})$ だから.

式 (10.6) から次式を得る.

$$(10.7) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} I_n(x) = \int_0^t g(\tau) d\tau + J(x).$$

一方,

$$\left| \int_t^T e^{kx(t-\tau)} g(\tau) d\tau \right| \leq M \int_t^T e^{kx(t-\tau)} d\tau = \frac{M}{kx} (1 - e^{-kx(T-t)}) \leq \frac{M}{x}.$$

ところが, 級数 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{M}{x}$ は収束するから, 極限

$$(10.8) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} K_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k!} \int_t^T e^{kx(t-\tau)} g(\tau) d\tau = K(x)$$

が存在し, かつ, 次の不等式が成り立つ.

$$|K(x)| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{M}{x} \leq \frac{eM}{x}.$$

この不等式から, 次式を得る.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} K(x) = 0.$$

(10.7) と (10.8) からわかるように, n を無限大に近づければ, 式 (10.4) は極限において, 次式となる.

$$(10.9) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k!} \int_0^T e^{kx(t-\tau)} g(\tau) d\tau = \int_0^t g(\tau) d\tau + J(x) + K(x).$$

したがって, 式 (10.9) によれば, (10.1) を得るには

II ティッチマーシュ (Titchmarsh) の定理

$$(10.10) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} J(x) = 0$$

を示せば十分である.

ところが, 実際,

$$|J(x)| \leq M \int_0^t \exp[-e^{x(t-\tau)}] d\tau \leq M \int_0^t e^{x(t-\tau)} \exp[-e^{x(t-\tau)}] d\tau$$

となる. というのは, 最後の積分に現われる因子 $e^{x(t-\tau)}$ は, いま考えている区間で, 1 より大きいからである. 最後の積分は, 新変数 $u = e^{x(t-\tau)}$ を導入すれば, 簡単に計算できる. このようにして積分値

$$\frac{1}{x} \left(\frac{1}{e} - \exp(-e^x) \right)$$

を得る. これは $1/ex$ よりも小さい. したがって, $|J(x)| \leq M/ex$ を得るから, 式 (10.10) が得る. これで Phragmén の定理は証明された.

§ 11. モーメント (moment) に関する定理

Phragmén の定理を用いれば, いまや, 次の定理が証明できる.

[I] f を区間 $[0, T]$ における連続関数とするとき, 次の条件を満たす数 N

$$(11.1) \quad \left| \int_0^T e^{nt} f(t) dt \right| \leq N, \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

が存在するとすれば, $f(t) = 0$ が区間 $[0, T]$ 全体で成り立つ.

[証明] Phragmén の公式 (10.1) を次の形に書く.

$$(11.2) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k!} e^{-kx(T-t)} \int_0^T e^{kx(T-\tau)} g(\tau) d\tau = \int_0^t g(\tau) d\tau.$$

この式は, 不等式 $0 \leq t < T$ を満たすすべての t に対して成り立つ.

いま, k および x を自然数とし,

$$(11.3) \quad g(\tau) = f(T-\tau)$$

とおけば, 仮定 (11.1) によって (kx も自然数だから),

$$\left| \int_0^T e^{kx(T-\tau)} g(\tau) d\tau \right| = \left| \int_0^T e^{kx(T-\tau)} f(T-\tau) d\tau \right| = \left| \int_0^T e^{kxt} f(t) dt \right| \leq N.$$

ゆえに, (11.2) の左辺から “lim” を除いた式は

$$N \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} e^{-kx(T-t)} = N[\exp(e^{-x(T-t)}) - 1]$$

より大きくはない. したがって, それは, x が自然数の値をとりながら無限に大きくなれば, 0 に近づく. x が任意の正の実数値をとりながら $x \rightarrow \infty$ となるときの極限値の存在は,

§ 11. モーメント (moment) に関する定理

Phragmén の定理によって保証されているが, その極限值はつねに 0 でなければならない. なぜなら, 自然数値をとりながらのときは 0 だからである. したがって, (11.2) 式の右辺は 0 に等しくなければならない.

$$\int_0^t g(\tau) d\tau = 0 \quad (0 \leq t < T).$$

この式を微分して $g(t) = 0$ ($0 < t < T$). したがって, (11.3) により $f(t) = 0$ ($0 < t < T$). f は連続だったから, 区間 $[0, T]$ 全体で $f(t) = 0$ (証明終).

上の定理から, 次の系がでる.

[II] 関数 g は区間 $[1, X]$ で連続であるとし, かつ, 次の条件を満たす一つの数 N ,

$$(11.4) \quad \left| \int_1^X x^n g(x) dx \right| \leq N \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

が存在するとすれば, $g(x) = 0$ が区間 $[1, X]$ 全体で成り立つ.

実際, 変数変換 $x = e^t$, $X = e^T$, $xg(x) = f(t)$ によって, 不等式 (11.4) は不等式 (11.1) になる. したがって, 区間 $[0, T]$ で $f(t) = 0$, すなわち, 区間 $[1, X]$ で $xg(x) = 0$. これで証明できた.

定理 [II] から容易に, 古典的な《Lerch の定理》(Lerch [1] および Mikusiński [1] を見よ) を導くことができる.

[III] 関数 f が区間 $[0, T]$ で連続で, かつ

$$(11.5) \quad \int_0^T t^n f(t) dt = 0 \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

を満たすならば, 全区間 $[0, T]$ で $f(t) = 0$ となる.

[証明] θ を区間 $[0, T]$ からとった, 任意に固定した数とする. 変換

$$t = \theta x, \quad T = \theta X, \quad f(t) = g(x)$$

をすると, (11.5) は

$$\theta^{n+1} \int_0^X x^n g(x) dx = 0 \quad (n=1, 2, \dots)$$

となり, したがって

$$\left| \int_1^X x^n g(x) dx \right| = \left| \int_0^1 x^n g(x) dx \right| \leq \int_0^1 |g(x)| dx = N, \quad (n=1, 2, \dots).$$

ゆえに, 定理 [II] により, 区間 $[1, X]$ で $g(x) = 0$, すなわち, 区間 $[\theta, T]$ で $f(t) = 0$. θ はいくら小さい数に固定してもよいから, 区間 $[0, T]$ で $f(t) = 0$ を得る. f は連続だったから, $t=0$ でも 0 にならなければならない. したがって, 証明は終わった.

注意. 積分 $\int_a^b x^n f(x) dx$ は, 区間 $[a, b]$ における関数 $f(x)$ の《 n 次のモーメント》と

II ティッチマーシュ (Titchmarsh) の定理

呼ばれる。これが、上述の諸定理が《モーメントに関する定理》と呼ばれる理由である。

§ 12. $f=g$ の場合の Titchmarsh の定理の証明

f は区間 $[0, 2T]$ における連続関数とし、かつ、次式が成り立つと仮定する。

$$(12.1) \quad \int_0^t f(t-\tau)f(\tau)d\tau=0, \quad 0 \leq t \leq 2T.$$

このとき、 $0 \leq t \leq T$ で $f(t)=0$ となることを証明しよう。

等式 (12.1) から直ちに、次式を得る。

$$(12.2) \quad I_n = \int_0^{2T} e^{n(2T-t)} dt \int_0^t f(t-\tau)f(\tau)d\tau=0.$$

反復積分 (12.2) は、一つの二重積分で表される。

$$I_n = \iint_A e^{n(2T-t)} f(t-\tau)f(\tau) dt d\tau.$$

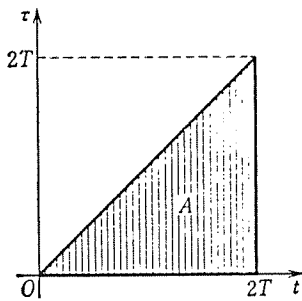


図 3

ここで A は、不等式

$$0 \leq \tau \leq t \leq 2T$$

によって定義される一つの三角形である。

変数変換：

$$t=2T-u-v, \quad \tau=T-v$$

をすれば、この積分は次の形になる。

$$I_n = \iint_B e^{n(u+v)} f(T-u)f(T-v) du dv.$$

ここで B は、不等式

$$0 \leq u+v, \quad u \leq T, \quad v \leq T$$

によって定義される一つの三角形である。

次の式は明らかに成り立つ。

$$\iint_{B+C} = \iint_B + \iint_C$$

ここで C は一つの三角形で、不等式

$$-T \leq u, \quad -T \leq v, \quad u+v \leq 0$$

で定義されるものとする、和 $B+C$ は不等式

$$-T \leq u \leq T, \quad -T \leq v \leq T$$

で定義される一つの矩形(長方形)になる。

$$\iint_B = I_n = 0 \quad \text{なることから,}$$

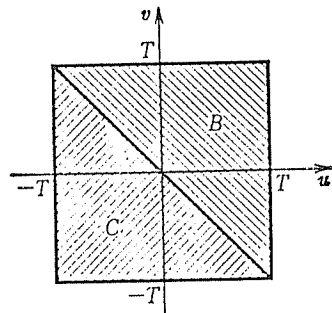


図 4

§ 13. 一般の場合の証明

$$\iint_{B+C} e^{nu} f(T-u) \cdot e^{nv} f(T-v) dudv = \iint_C e^{n(u+v)} f(T-u) f(T-v) dudv$$

を得る.

いま $n > 0$ であるから, 右辺の被積分関数の因子 $e^{n(u+v)}$ は 1 より小さい. したがって, f の絶対値の最大値を M とすれば,

$$\left| \int_{-T}^T e^{nu} f(T-u) du \cdot \int_{-T}^T e^{nv} f(T-v) dv \right| \leq \iint_C M^2 dudv = 2T^2 \cdot M^2.$$

したがって,

$$\left| \int_{-T}^T e^{nu} f(T-u) du \right| \leq \sqrt{2} TM.$$

ゆえに

$$\begin{aligned} \left| \int_0^T e^{nu} f(T-u) du \right| &= \left| \int_{-T}^T e^{nu} f(T-u) du - \int_{-T}^0 e^{nu} f(T-u) du \right| \\ &\leq \sqrt{2} TM + \left| \int_{-T}^0 e^{nu} f(T-u) du \right|. \end{aligned}$$

ところが, 最後の積分における因子 e^{nu} は 1 より小さいから,

$$\left| \int_0^T e^{nu} f(T-u) du \right| \leq \sqrt{2} TM + \int_{-T}^0 M du = (\sqrt{2} + 1) TM.$$

この不等式は任意の $n > 0$ に対して正しいから, モーメントに関する最初の定理によって, $0 \leq t \leq T$ において $f(T-u) = 0$, すなわち $0 \leq t \leq T$ で $f(t) = 0$ (証明終).

さて, 関数 f は無限区間 $0 \leq t \leq \infty$ で連続とし, 等式

$$\int_0^t f(t-\tau) f(\tau) d\tau = 0$$

も $0 \leq t < \infty$ でつねに成り立つとする. このときは, 任意の区間 $[0, 2T]$ で成り立つから, したがって $[0, T]$ なる各区間で $f(t) = 0$. したがって, 全区間 $0 \leq t < \infty$ で $f(t) = 0$, 演算子法の記号で書けば, この定理は次の形に述べられる.

《 $f \in C$ かつ $f^2 = 0$ ならば $f = 0$.》

この定理は次のようにも述べられる.

《クラス C の関数 f が恒等的には 0 でないならば, その自分自身との合成積 f^2

もまた, 恒等的には 0 にならない.》

したがって, これは, この章のはじめに述べた Titchmarsh の定理の特別の場合になる.

§ 13. 一般の場合の証明

C. Ryll-Nardzewski は, 上述の特別の場合から容易に, クラス C の任意の関数 f と g の場合に一般化できることを示した.

II ティッチマーシュ (Titchmarsh) の定理

いま, (クラス C の) 二つの関数 f と g の合成積が恒等的に 0 であるとしよう.

$$fg=0.$$

この意味は

$$(13.1) \quad \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau=0, \quad 0 \leqq t < \infty$$

だから, やはり $0 \leqq t < \infty$ において,

$$(13.2) \quad \int_0^t (t-\tau)f(t-\tau)g(\tau)d\tau + \int_0^t f(t-\tau) \cdot \tau g(\tau)d\tau = t \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau = 0.$$

したがって, 次の記号,

$$f_1(t) = tf(t) \quad \text{および} \quad g_1(t) = tg(t) \quad (0 \leqq t < \infty),$$

を導入すれば, (13.2) は演算子法の記号で

$$f_1g + fg_1 = 0$$

と書ける.

ゆえに $fg_1(f_1g + fg_1) = 0$ となるが, 合成積の結合律, 可換律, 分配律によって

$$fg \cdot f_1g_1 + (fg_1)^2 = 0.$$

ところが, 仮定によって $fg=0$ だから, この式は $(fg_1)^2=0$ となり, 前節の定理により

$$fg_1=0$$

を得る. すなわち,

$$(13.3) \quad \int_0^t f(t-\tau)\tau g(\tau)d\tau=0 \quad (0 \leqq t < \infty).$$

(13.3) は (13.1) からでたのだから, この (13.3) からは次の式を得る.

$$\int_0^t f(t-\tau) \cdot \tau^2 g(\tau)d\tau=0 \quad (0 \leqq t < \infty),$$

あるいは, 一般に

$$\int_0^t f(t-\tau) \cdot \tau^n g(\tau)d\tau=0 \quad (0 \leqq t < \infty)$$

がすべての自然数 n に対して成り立つ.

したがって, Lerch の定理 (§11 を見よ) によって,

$$f(t-\tau)g(\tau)=0 \quad (0 \leqq \tau \leqq t < \infty)$$

を得る.

いま, もしある $\tau_0 \geqq 0$ に対して $g(\tau_0) \neq 0$ とすると, 上の式から $f(t-\tau_0)g(\tau_0)=0$ だから, $f=0$ が全区間 $0 \leqq t < \infty$ で成り立つ. このような τ_0 が存在しないとすれば, こんどは $g=0$ が全区間 $0 \leqq t < \infty$ で成り立つ.

§ 13. 一般の場合の証明

このようにして, われわれは《もし合成積 fg が恒等的に 0 ならば, 関数 f と g のどちらか少なくとも一方は恒等的に 0 になる》ということを証明した.

これは次の形にも述べられる:《関数 f と g が恒等的に 0 でなければ, その合成積 fg もまた恒等的に 0 ではない》.

これが, この章のはじめに述べた Titchmarsh の定理である.

Ⅲ 演 算 子

§ 14. 合成積の逆演算

演算子法においても, 代数のときとちょうど同じように, 分数

$$\frac{a}{b}$$

を導入することができる. この記号は, しばしば便宜上, a/b の形にも書く. もし a と b が関数のとき ab が合成積であるとすれば, 直ちにわかるように, a/b は普通の割り算ではなくて, それは合成積とは逆の一つの演算でなければならない. 記号 a/b (ここで b は恒等的には 0 でないとする) は, このとき

$$(14.1) \quad a = bc$$

を満たすような関数を示すことになるだろう.

たとえば, $a = \{t^3\}$, $b = \{t\}$ とすれば

$$\frac{a}{b} = \frac{\{t^3\}}{\{t\}} = \{6t\}$$

となる. なぜなら

$$\{t\} \cdot \{6t\} = \left\{ \int_0^t (t-\tau) 6\tau d\tau \right\} = \{t^3\}$$

となるからである.

与えられた a と b (b は恒等的には 0 でないとする) に対して, 記号 a/b を一意的に定義できるためには, (14.1) を満たす c がたかだか一つしか存在しないことが必要である.

この一意性は, II 章で証明した Titchmarsh の定理:

《もし, クラス C (§2, p. 2 をみよ) の関数 f と g が恒等的には 0 でないとすると, その合成積 fg も恒等的には 0 にならない.》

によって保証されている.

もし (14.1) が二つの相異なる関数 c_1 と c_2 によって満たされたとすると, すなわち $a = bc_1$ と $a = bc_2$ が成り立ったとすると

$$b(c_1 - c_2) = 0$$

を得る. これは, 恒等的には 0 でない二つの関数 b と $c_1 - c_2$ の合成積が恒等的に 0 になることになり, Titchmarsh の定理に反する. したがって (14.1) は, たかだか一つの関数 c

§ 15. 演 算 子

だけが満たすことになり, 記号 a/b の一意性が証明された.

練習問題 次の等式を確かめよ.

$$(1) \frac{\{t^2\}}{\{t\}} = \{2\} \quad (2) \frac{\{t^3-6t\}}{\{t-1\}} = \{6t+6\} \quad (3) \frac{\{e^t - \sin t - \cos t\}}{\{\sin t\}} = \{2e^t\}.$$

§ 15. 演 算 子

与えられたクラス C の関数 a と $b \neq \{0\}$ に対して, 場合によっては, 方程式 $a=bc$ を満たす関数 c が存在しないこともあり得る. たとえば $a=b=\{1\}$ ととると, この場合には, $\{1\} = \{1\} \cdot c$ はどんな関数 $c = \{c(t)\}$ に対しても成り立たない. なぜなら, このとき方程式は

$$1 = \int_0^t c(\tau) d\tau$$

が任意の $t \geq 0$ で成り立つことを意味しているが, 上式は $t=0$ に対してすら成り立たない.

逆演算ができないという現象には, われわれは数学の学習のごく初等的な段階でも出会っている. 整数の算術においては, 割り算はいつでもできるとは限らない. たとえば, 数 2 は数 3 では割れない. しかしながら, この割り算の不可能性そのものが, まさに, 新しい種類の数, すなわち分数を生みだす源泉になっている. 2 を 3 で割った商は一つの新しい数 (それは, もはや整数ではない) であるとし, それを分数 $2/3$ の形に書くのである. 一般に, 整数 a が整数 b によって割り切れないときには, その商は分数 a/b に等しいとするのである.

われわれはまた, a が b で割り切れるときにも a/b なる分数を認める. たとえば $6/3$. したがって, 分数は数 (整数) の概念の一つの拡張であると思なすことができる. 各整数 c は一つの分数である (なぜなら cb/b ($b \neq 0$) の形に書けるから), しかしすべての分数が整数ということはない.

同様に, 《合成積の逆演算の不可能性:は, 新しい数学的概念——演算子の概念に導くのである》.

分数 $\{1\}/\{1\}$ はかくして一つの演算子である (それはもはや関数ではない). 一般に, クラス C の二つの関数 a と $b \neq \{0\}$ が与えられたとき, もし方程式 $a=bc$ を満たす関数 c が存在しなければ, 分数 a/b は《演算子》を表すことになる.

われわれはまた, $a=bc$ となるクラス C の関数 c が存在するときにも, 演算子 a/b を認めることにする. この結果, 演算子は関数の概念の一つの拡張であると思なすことができる. クラス C の任意の関数 c は演算子である (なぜなら, それは cb/b , ($b \neq 0$) と書けるから), しかし任意の演算子が関数になるとは限らない.

Ⅲ 演 算 子

§ 16. 演算子に関する諸演算

われわれは a/b の形の演算子を導入したが, それは, 計算の中で演算子を使用しても構わないように, 演算子の諸演算を定義したとき, はじめて有用なものになる.

算術では, 分数に対して次の定義を採用している.

1. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ と書くのは $ad=bc$ のとき, かつそのときに限る;
2. $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$;
3. $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$.

さらに, 分母 b と d はつねに 0 に等しくないとは仮定されている. したがって分母 bd もまた 0 に等しくはない.

演算子 a/b に対しても, われわれは同じ定義 1, 2, 3 を採用する. それらの公式をもう一度書き下すことはしない. 演算子の場合には, 文字 a, b, c, d はもはや数を表すのではなくて, クラス C の関数を表していると見なすことにする.

その上, 分母 b と d は恒等的には 0 ではないと, いつでも仮定する. その結果, Titchmarsh の定理によって, 分母 bd も恒等的には 0 ではない.

この演算子と昔からの算術の分数との完全な類似性によって, 演算子の諸演算は, 普通の分数のときと同じやり方でできるわけである.

練習問題 次の等式を証明せよ.

$$(1) \frac{\{t\} \{te^t\}}{\{e^t\} \{1\}} = \{e^t - 1\} \qquad (2) \frac{\{1\}}{\{\cos t\}} + \frac{\{3t^2\}}{\{2\}} = \frac{\{2t\}}{\{\sin 2t\}}.$$

§ 17. 数演算子

さて, ここでは, $\{\alpha\}/\{1\}$ という形の演算子を取り扱おう. ここで $\{\alpha\}$ は任意の定数関数である (すなわち, つねに α という値をとる関数). これらをわれわれは次の記号で表す.

$$[\alpha] = \frac{\{\alpha\}}{\{1\}}$$

次の公式は容易に確かめられる.

$$(17.1) \qquad [\alpha] + [\beta] = [\alpha + \beta], \qquad [\alpha] \cdot [\beta] = [\alpha\beta].$$

実際, 簡単のために $l = \{1\}$ とおけば,

§ 18. 用語に関する諸注意

$$[\alpha] + [\beta] = \frac{\{\alpha\}}{l} + \frac{\{\beta\}}{l} = \frac{\{\alpha\} + \{\beta\}}{l} = \frac{\{\alpha + \beta\}}{l} = [\alpha + \beta],$$

$$[\alpha][\beta] = \frac{\{\alpha\}}{l} \cdot \frac{\{\beta\}}{l} = \frac{\{\alpha\beta t\}}{l^2} = \frac{l\{\alpha\beta\}}{l^2} = \frac{\{\alpha\beta\}}{l} = [\alpha\beta].$$

$[\alpha]$ という形の演算子を数演算子と呼ぶ。これは、演算子 $\{\alpha\}$ とは区別しなければならない。後者は《定数関数》であり、公式 (17.1) の代りに次の公式を満足する。

$$\{\alpha\} + \{\beta\} = \{\alpha + \beta\}, \quad \{\alpha\} \{\beta\} = \{\alpha\beta t\}.$$

このようにして、たとえば

$$[2][3] = [6], \quad \{2\} \{3\} = \{6t\}.$$

公式 (17.1) によれば、演算子法において、括弧 $[]$ は省略しても構わない。そこで、 $[\alpha]$ の代りに単に α と書く。この単純化はもう一つの利点がある。すなわち、(17.1) は次の形に書ける。

$$\alpha + \beta = \alpha + \beta, \quad \alpha\beta = \alpha\beta.$$

すなわち、これらの公式はわざわざ書く必要がなくなったのである。

§ 18. 用語に関する諸注意

等式 (17.1) はわれわれに、さらにもっと徹底した態度をとってもよいことを示している。この公式によれば、数演算子は計算規則において普通の数と同じ振舞いをしている。したがって、数演算子を数と同一視して、それらを単に《数》と呼んでもよい。算術ではこのようにして、分母が1の分数は整数と同一視し、虚数部分が0に等しい複素数は実数と同一視する。このようにすることの利点は次の事実にある。すなわち、これら各種の数を別々に考える必要がなくなるのである。なぜならこれらはすべて複素数の概念の中に含まれてしまうから。

われわれの場合においては、複素数が演算子の概念に含まれてしまう。かくして、演算子は関数の概念の拡張であるばかりでなくて、複素数の拡張にもなっている。数の概念の拡張の各段階は次のように書ける：

$$\text{整数} \subset \text{有理数} \subset \text{実数} \subset \text{複素数} \subset \text{演算子。}^{1)}$$

§ 16 において、われわれは、式

$$(18.1) \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}$$

の意味を定義した。

1) 記号 $A \subset B$ は “ A は B に含まれている” と読む。【訳注】

Ⅲ 演 算 子

もし演算子 a/b と c/d が関数になるならば, (18.1) はそれらの関数の合成積を表すし, もしそれらが数になるならば, (18.1) は普通の積を表している. このように, (18.1) は合成積と普通の積の両方の一般化である. この一般の場合に用語を選ぶに際して, われわれは実用上の理由から《積》というのを採用する. というわけは, そうすれば積と関連した諸用語, 乗法, 因子, べき, 除法, 逆数などを自由に使えるからである. このことは, 《関数の合成積》という用語を《関数の積》という用語でおき換えてもよさそうに思わせる. その場合には, 普通の積は《関数値の積》と呼ばねばならない. しかしながら, われわれは《合成積》という用語を保持することにする. 誤解を生じそうな事情のときには, 特にそうする.

《演算子》という用語自体少々説明を要する. いま考察しているこの概念は, 数や関数だけでなく, 数学の文献においていままでも《演算子》(operator——《作用素》とも訳す)と呼ばれてきたものに対応する多くのものをも含んでいる. 演算子法の以前の取り扱いにおいては, これらの“演算子”と演算子が作用する“関数”とは別種のものとして二つのクラスを構成していた. この本においては, これら二種類のものが演ずる役割は対称である. というのは, これらは両方とも分数 a/b が構成する同じクラスによってしまうからである. このクラスは数をもまた含んでしまっている. したがって, 全体を指し示す用語としては, 《数》, 《関数》, 《演算子》の中どれも先験的には平等に適格であると思われる. しかしながら, 伝統的な用法から見れば, 演算子という用語が最も適していると思う.

§ 19. 数と関数の積

任意の数 α と任意の定数関数 $\{\beta\}$ に対して, 次の公式を証明するのは容易である.

$$\alpha\{\beta\} = \{\alpha\beta\}.$$

実際,

$$\alpha\{\beta\} = \frac{\{\alpha\}\{\beta\}}{1} = \frac{\{\alpha\beta t\}}{1} = \frac{1\{\alpha\beta\}}{1} = \{\alpha\beta\}.$$

たとえば, 次の諸式を比較してみよう.

$$2 \cdot 3 = 6, \quad 2\{3\} = \{6\}, \quad \{2\}\{3\} = \{6t\}.$$

一番目は, 数 2 と数 3 の積は数 6 に等しいことを示している. 二番目は, 数 2 と定数関数 $\{3\}$ の積は定数関数 $\{6\}$ に等しいことを述べている. 三番目は, 二つの関数 $\{2\}$ と $\{3\}$ の積 (合成積) が関数 $\{6t\}$ になることを示している.

公式 $\alpha\{\beta\} = \{\alpha\beta\}$ の特別の場合として, $\beta=1$ に対しては

$$\alpha 1 = \{\alpha\}$$

となる.

§ 20. 数 0 と 1

ゆえに, 任意の定数関数 $\{\alpha\}$ は数 α と積分演算子 I の積として表される.

次の一般公式が成り立つことがわかる.

$$(19.1) \quad \alpha\{f(t)\} = \{\alpha f(t)\}.$$

この式は, 関数 $f(t)$ に一つの数を掛けるには, 関数値にその数を掛ければよいことを示している.

実際,

$$\alpha\{f(t)\} = \frac{\{\alpha\}\{f(t)\}}{I} = \frac{\left\{\int_0^t \alpha f(\tau) d\tau\right\}}{I} = \frac{I\{\alpha f(t)\}}{I} = \{\alpha f(t)\}.$$

公式 (19.1) は, 数因子は括弧の中に入れてよいという計算規則を表している.

加法に関しては, (19.1) に類似の公式がないということに気付くだろう. 数 α と関数 $\{f(t)\}$ の和は $\alpha + \{f(t)\}$ の形に書けるだけである. この和は演算子であって, せいぜい分数の形 $\left\{\alpha + \int_0^t f(\tau) d\tau\right\} / \{1\}$ にできるだけである. この形の演算子に対して, 可換律と結合律から, 次の等式が成り立つことは容易にわかる.

$$(\alpha + \{f(t)\})(\beta + \{g(t)\}) = \alpha\beta + \left\{\beta f(t) + \alpha g(t) + \int_0^t f(t-\tau)g(\tau) d\tau\right\}.$$

練習問題 次の等式を確かめよ.

- (1) $(1+I)(1-I) = 1 - \{t\}$
- (2) $(1+2I)^3 = 1 + 2\{3+6t+2t^2\}$
- (3) $(1+\{1\})(1-\{e^{-t}\}) = 1$
- (4) $(1+\{t\})(1-\{\sin t\}) = 1$
- (5) $(1+\{4t\})(1+2\{\cos 2t - \sin 2t\}) = 1 + \{2\}.$

§ 20. 数 0 と 1

公式 (19.1) において, α に 1 を代入すると, $1\{f(t)\} = \{f(t)\}$ を得る. 一般に, c が任意の演算子であるとしても

$$(20.1) \quad 1 \cdot c = c$$

がつねに成り立つ.

実際, $1 = I/I$, $c = a/b$ (ただし, a, b はクラス C の関数) とすれば, 演算子の掛け算と等しさの定義から, $Ia/Ib = a/b$ を得る. ゆえに (20.1) がでる.

数 0 に対して, 一般公式

$$(20.2) \quad 0 \cdot c = 0, \quad c + 0 = c$$

を証明しよう.

実際, $0 = \{0\}/I$, $c = a/b$ (ここで, $a, b \neq \{0\}$ はクラス C の関数) とすると,

Ⅲ 演 算 子

$$0 \cdot c = \frac{\{0\}a}{l b} = \frac{\{0\}}{l b} = \frac{\{0\}b}{l b} = \frac{\{0\}}{l} = 0,$$

$$c + 0 = \frac{a}{b} + \frac{\{0\}}{l} = \frac{al + \{0\}b}{b \cdot l} = \frac{al + \{0\}}{b \cdot l} = \frac{al}{b \cdot l} = \frac{a}{b} = c.$$

さらに,

$$\{0\} = 0$$

となることに注意しよう. これは, $0l = \{0\}$ という等式と公式 (20.2) からでる. ゆえに, 関数 $\{0\}$ は数 0 と同一視しなければならない. これは, §6 で採用した原理の例外である. そこでは, 関数と数を区別する必要を強調したのであった. すなわち, 関数 $\{0\}$ は加法と乗法に関して, 数 0 と同じ性質をもつただ一つの関数である. したがって, 任意の公式において, この関数は数 0 で置き換えてもよいし, その逆も成り立つ. これが, 記号 $\{0\}$ と 0 を同一視するというものの意味である.

§ 21. 微分演算子

演算子は互いに割り算することができる. たとえば, $g = a/b$, $h = c/d$ とすると,

$$\frac{g}{h} = \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}.$$

この例で, 分数 g/h の分子と分母は任意の演算子でよい, 別に関数である必要はない.

特に $1/h$ は《演算子 h の逆数》と呼ばれる. もし h が関数ならば, その逆数 $1/h$ は関数ではありえないことがわかる. 実際, h と $1/h$ が関数ならば, $h \cdot 1/h$ もまた関数になるはずだが, 実際にはそれは数演算子 1 である.

演算子法における一つの基本的役割は《積分演算子 $l = \{1\}$ の逆数》が演じる. この演算子を

$$s = \frac{1}{l}$$

で表すことにする.

定義によって

$$ls = sl = 1.$$

次の重要な定理を証明しよう.

定理¹⁾. 関数 $a = \{a(t)\}$ が $0 \leq t < \infty$ で連続な導関数 $a' = \{a'(t)\}$ を持つとすれば, 次の公式が成り立つ.

1) この定理は §60 で一般化される.

§ 21. 微分演算子

$$(21.1) \quad sa = a' + a(0).$$

ここで, $a(0)$ は関数 a の点 $t=0$ における値である.

実際, 次の等式が成り立つ.

$$\{a(t)\} = \left\{ \int_0^t a'(\tau) d\tau \right\} + \{a(0)\},$$

すなわち,

$$\{a(t)\} = l\{a'(t)\} + l \cdot a(0),$$

ゆえに, この両辺に s を掛ければ, (21.1) が得られる.

もし関数 a が点 $t=0$ で 0 に等しいならば, 公式 (21.1) は

$$sa = a'$$

の形になる. この場合には, 関数に演算子 s を掛けるとは単に微分することになる. この理由から, s は微分演算子と呼ばれる.

しかしながら, 次のことはおぼえておかねばならない. 一般の場合には, s を掛けることは, 関数を微分してさらに初期値を加えることを意味するのである. その結果はまた一つの演算子になるのであって, それが関数になるのは, 与えられた関数の初期値が 0 であるとき, かつそのときに限る.

例.

$$\begin{aligned} s\{\sin t\} &= \{\cos t\}, & s\{e^t\} &= \{e^t\} + 1, \\ s\{t^n\} &= \{nt^{n-1}\} \quad (n \geq 1), & s\{t+1\} &= \{1\} + 1. \end{aligned}$$

微分可能な関数だけが微分演算子を掛けることができるのではない. 積 sa は, a が微分可能な関数であろうと, 微分不可能な関数であろうと, あるいは任意の演算子であっても, いつでも意味がある. このようにして, もし s を掛けることを微分することの一般化と見なすならば, 演算子の範囲内では, 任意の連続関数 (そして任意の可積分関数さえも) 微分可能になる. (微分した結果は演算子になるのであって, 必ずしも関数になるとは限らない).

注意. ちょっと見たところでは, 微分可能な関数に s を掛けることが微分することに正確に同じであったならば (すなわち, 初期値を加える必要がなかったならば), 計算はもっと便利になるだろうと思えるかもしれない. しかしながら, 普通の微分は, 積分 (0 から t までの積分) とは順序が交換できない. たとえば, 関数 $\{\cos t\}$ を微分し, それから積分すると, $\{\cos t - 1\}$ を得る. この二つの演算の順序を変えると $\{\cos t\}$ となる. 演算子法の簡明さのためには, 微分および積分演算子の可換性 $sl = ls$ が本質的である. この可換性がこの節の定義によってこそ得られるのである.

Ⅲ 演 算 子

§ 22. 演算子 s のべき

もし関数 $a = \{a(t)\}$ が区間 $0 \leq t < \infty$ で連続な 2 次の導関数 $a'' = \{a''(t)\}$ をもつとすれば, (21.1) に s を掛けて

$$s^2 a = sa' + s \cdot a(0)$$

を得る. したがって, 導関数 a' にもう一度 (21.1) を適用して

$$s^2 a = a'' + a'(0) + s \cdot a(0)$$

を得る. このようにして, 次の一般定理を得られた.

《関数 $a = \{a(t)\}$ が, 区間 $0 \leq t < \infty$ で連続な n 次導関数 $a^{(n)} = \{a^{(n)}(t)\}$ をもてば,

$$s^n a = a^{(n)} + a^{(n-1)}(0) + sa^{(n-2)}(0) + \cdots + s^{n-1}a(0)$$

となる》.

微分方程式の解法に応用するには, この公式を次の形に書くのが最も便利である.

$$a^{(n)} = s^n a - s^{n-1}a(0) - \cdots - sa^{(n-2)}(0) - a^{(n-1)}(0).$$

練習問題 次の等式を確かめよ.

$$(1) \quad s^2 \{\sin t\} = 1 - \{\sin t\}$$

$$(2) \quad s^2 \{\cos t\} = s - \{\cos t\}.$$

§ 23. 演算子 s の多項式

一つの重要な役割は, 多項式の形をした演算子

$$(23.1) \quad \alpha_n s^n + \alpha_{n-1} s^{n-1} + \cdots + \alpha_1 s + \alpha_0$$

が演じる. ここで $\alpha_n, \dots, \alpha_0$ は任意の数である. これらの多項式に関する演算は, 普通の代数のときと全く同じ仕方で行われる. たとえば

$$(s-1)(s^{n-1} + s^{n-2} + \cdots + 1) = s^n - 1.$$

《演算子 s の二つの多項式が等しければ, 各係数がすべて等しい. すなわち, 等式

$$(23.2) \quad \alpha_n s^n + \alpha_{n-1} s^{n-1} + \cdots + \alpha_1 s + \alpha_0 = \beta_n s^n + \beta_{n-1} s^{n-1} + \cdots + \beta_1 s + \beta_0$$

から, 等式

$$(23.3) \quad \alpha_n = \beta_n, \alpha_{n-1} = \beta_{n-1}, \dots, \alpha_1 = \beta_1, \alpha_0 = \beta_0$$

がでる》.

実際, 等式 (23.2) に l^{n+1} を掛けると

$$\alpha_n l + \cdots + \alpha_0 l^{n+1} = \beta_n l + \cdots + \beta_0 l^{n+1}$$

となるが, この等式は

§ 25. 演算子 s と三角関数の関係

$$\alpha_n + \dots + \alpha_0 \frac{t^n}{n!} = \beta_n + \dots + \beta_0 \frac{t^n}{n!} \quad (0 \leq t < \infty)$$

を意味する。ゆえに、普通の多項式に関するよく知られた定理によって、等式 (23.3) を得る。

練習問題

1. 次の公式を証明せよ。

$$1 + s + s^2 + \dots + s^{n-1} = (s^n - 1) \{c^t\}.$$

2. 次の等式を確かめよ。

$$\gamma^4 s^4 + \delta^4 = \gamma^4 [(s - \alpha)^2 + \alpha^2] [(s + \alpha)^2 + \alpha^2], \quad \text{ただし} \quad \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\delta}{\gamma}.$$

§ 24. 演算子 s と指数関数の関係

公式 (21.1) を関数 $\{e^{\alpha t}\}$ に適用すると

$$s\{e^{\alpha t}\} = 1 + \alpha\{e^{\alpha t}\}.$$

これから直ちに

$$(24.1) \quad \{e^{\alpha t}\} = \frac{1}{s - \alpha}$$

を得る。

合成積の定義から、

$$\begin{aligned} \frac{1}{(s - \alpha)^2} &= \{e^{\alpha t}\}^2 = \left\{ \int_0^t e^{\alpha(t-\tau)} e^{\alpha\tau} d\tau \right\} = \left\{ e^{\alpha t} \int_0^t d\tau \right\} = \left\{ \frac{t}{1!} e^{\alpha t} \right\}, \\ \frac{1}{(s - \alpha)^3} &= \{e^{\alpha t}\} \left\{ \frac{t}{1!} e^{\alpha t} \right\} = \left\{ \int_0^t e^{\alpha(t-\tau)} \frac{\tau}{1!} e^{\alpha\tau} d\tau \right\} = \left\{ e^{\alpha t} \int_0^t \frac{\tau}{1!} d\tau \right\} = \left\{ \frac{t^2}{2!} e^{\alpha t} \right\}. \end{aligned}$$

このようにして一般に、

$$(24.2) \quad \frac{1}{(s - \alpha)^n} = \left\{ \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{\alpha t} \right\} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

を得る。

この公式は、§ 8 (p. 7) で導いた公式 $l^n = \{t^{n-1}/(n-1)!\}$ の一般化であって、 $\alpha = 0$ とすれば、もとにもどる。

§ 25. 演算子 s と三角関数の関係

よく知られたオイラー (Euler) の公式

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}, \quad \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

Ⅲ 演 算 子

によって, 次の公式を得る.

$$\{e^{\alpha t} \sin \beta t\} = \frac{1}{2i} \{e^{(\alpha+i\beta)t} - e^{(\alpha-i\beta)t}\}, \quad \{e^{\alpha t} \cos \beta t\} = \frac{1}{2} \{e^{(\alpha+i\beta)t} + e^{(\alpha-i\beta)t}\}.$$

(24.1) を用いれば,

$$\left\{ \frac{1}{\beta} e^{\alpha t} \sin \beta t \right\} = \frac{1}{2i\beta} \left(\frac{1}{s-\alpha-i\beta} - \frac{1}{s-\alpha+i\beta} \right) = \frac{1}{(s-\alpha)^2 + \beta^2},$$

$$\{e^{\alpha t} \cos \beta t\} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s-\alpha-i\beta} + \frac{1}{s-\alpha+i\beta} \right) = \frac{s-\alpha}{(s-\alpha)^2 + \beta^2}.$$

したがって, 次の公式を得た.

$$(25.1) \quad \frac{1}{(s-\alpha)^2 + \beta^2} = \left\{ \frac{1}{\beta} e^{\alpha t} \sin \beta t \right\} \quad (\beta \neq 0), \quad \frac{s-\alpha}{(s-\alpha)^2 + \beta^2} = \{e^{\alpha t} \cos \beta t\}.$$

演算子 $1/[(s-\alpha)^2 + \beta^2]$ のべきは, 合成積をつぎつぎと行うことにより計算できる.

$$\begin{aligned} \frac{1}{[(s-\alpha)^2 + \beta^2]^2} &= \left\{ \frac{1}{\beta^2} \int_0^t e^{\alpha(t-\tau)} \sin \beta(t-\tau) e^{\alpha\tau} \sin \beta\tau d\tau \right\} \\ &= \left\{ \frac{e^{\alpha t}}{2\beta^2} \left[-\frac{1}{\beta} \sin \beta t - t \cos \beta t \right] \right\}, \\ \frac{1}{[(s-\alpha)^2 + \beta^2]^3} &= \left\{ \frac{1}{2\beta^3} \int_0^t e^{\alpha(t-\tau)} \sin \beta(t-\tau) \left[\frac{1}{\beta} e^{\alpha\tau} \sin \beta\tau - \tau e^{\alpha\tau} \cos \beta\tau \right] d\tau \right\} \\ &= \left\{ \frac{e^{\alpha t}}{4\beta^4} \left[\left(\frac{3}{2} - \frac{\beta^2 t^2}{2} \right) \cdot \frac{1}{\beta} \sin \beta t - \frac{3}{2} t \cos \beta t \right] \right\}. \end{aligned}$$

一般公式はやや複雑である. それは, 第3部, §47 で与える.

公式 (25.1) において, $\alpha=0$ として得られる特別の場合は重要である.

$$\frac{1}{s^2 + \beta^2} = \left\{ \frac{1}{\beta} \sin \beta t \right\}, \quad \frac{s}{s^2 + \beta^2} = \{\cos \beta t\}.$$

練習問題 次の公式を証明せよ.

$$(1) \quad \frac{1}{(s-\alpha)^2 - \beta^2} = \left\{ \frac{1}{\beta} e^{\alpha t} \sinh \beta t \right\} \quad (\beta \neq 0) \quad (2) \quad \frac{s-\alpha}{(s-\alpha)^2 - \beta^2} = \{e^{\alpha t} \cosh \beta t\}.$$

§26. 有理演算子

《有理演算子》とは, 分数式

$$(26.1) \quad \frac{\gamma_m s^m + \cdots + \gamma_1 s + \gamma_0}{\delta_n s^n + \cdots + \delta_1 s + \delta_0} \quad (m < n)$$

のことをいう. ここで, $\gamma_m, \dots, \gamma_0, \delta_n, \dots, \delta_0$ は複素数であり, $\delta_n \neq 0$ とする.

代数学において知られているように, もし $m < n$ でかつ γ_v, δ_v が実数であれば, (26.1)

は次の形の簡単な分数式に分解できる.

§ 26. 有理演算子

$$\frac{1}{(s-\alpha)^p}, \quad \frac{1}{[(s-\alpha)^2+\beta^2]^p}, \quad \frac{s}{[(s-\alpha)^2+\beta^2]^p}.$$

ここで, α と β は実数, p は自然数である. 前節の方法を用いれば, 第一および第二の型の分数式は, 指数関数と三角関数によってつねに表すことができる. 第三の型の分数式には s という因子が入っているが, これも公式 (21.1) を用いれば, やはり指数関数と三角関数で表される. たとえば, 次のものを考える.

$$\frac{s}{[(s-\alpha)^2+\beta^2]^2} = s \left\{ \frac{e^{\alpha t}}{2\beta^2} \left[\frac{1}{\beta} \sin \beta t - t \cos \beta t \right] \right\}.$$

ここで, $\{ \}$ の中の式は $t=0$ で 0 に等しく, またその導関数は

$$\frac{e^{\alpha t}}{2\beta^2} \left[(\alpha + \beta^2 t) \frac{1}{\beta} \sin \beta t - \alpha t \cos \beta t \right]$$

となるから, したがって

$$\frac{s}{[(s-\alpha)^2+\beta^2]^2} = \left\{ \frac{e^{\alpha t}}{2\beta^2} \left[(\alpha + \beta^2 t) \frac{1}{\beta} \sin \beta t - \alpha t \cos \beta t \right] \right\}$$

を得る.

結局, 分数式 (26.1) は, 簡単な分数に分解することによって, 指数関数および三角関数に帰着する. 簡単な分数に分解する (部分分数展開) には, 積分法における計算のときのように, 未定係数法を用いるのが一番よい.

例 1. $\frac{s+1}{s^2+2s}$ を求めよ.

分母は二つの相異なる一次因子, s と $s+2$ に分解できる. ゆえに二つの数 A, B を

$$\frac{s+1}{s(s+2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+2}$$

となるように定めることができる. この等式の両辺に $s(s+2)$ を掛けると

$$s+1 = (A+B)s + 2A.$$

この式は, $A+B=1$, $2A=1$ とすれば満たされる. すなわち $A=B=1/2$. したがって

$$\frac{s+1}{s(s+2)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s+2}$$

となり, 結局

$$\frac{s+1}{s^2+2s} = \left\{ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{-2t} \right\}$$

を得る.

例 2. $\frac{5s+3}{(s-1)(s^2+2s+5)}$ を求めよ.

定数 A, B, C を

Ⅲ 演 算 子

$$\frac{5s+3}{(s-1)(s^2+2s+5)} = \frac{A}{s-1} + \frac{B(s+1)+C}{(s+1)^2+4}$$

となるように定める. この等式の両式に $(s-1)(s^2+2s+5)$ を掛けて, 同じ次数の項の係数を比較することにより,

$$A=1, \quad B=-1, \quad C=3$$

を得る. ゆえに

$$\begin{aligned} \frac{5s+3}{(s-1)(s^2+2s+5)} &= \frac{1}{s-1} - \frac{s+1}{(s+1)^2+4} + \frac{3}{(s+1)^2+4} \\ &= \left\{ e^t - e^{-t} \cos 2t + \frac{3}{2} e^{-t} \sin 2t \right\}. \end{aligned}$$

例 3. $1/s(2s+1)^3$ を求めよ.

この式を簡単な分数に分解する.

$$\begin{aligned} \frac{1}{s(2s+1)^3} &= \frac{A}{s} + \frac{B}{s+\frac{1}{2}} + \frac{C}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2} + \frac{D}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^3} \\ &= \frac{8\left[A\left(s+\frac{1}{2}\right)^3 + Bs\left(s+\frac{1}{2}\right)^2 + Cs\left(s+\frac{1}{2}\right) + Ds\right]}{s(2s+1)^3}. \end{aligned}$$

この等式の分子において, s の同じ次数の項の係数を比較すると,

$$\begin{aligned} 0 &= 8A + 8B, & 0 &= 6A + 2B + 4C + 8D, \\ 0 &= 12A + 8B + 8C, & 1 &= A \end{aligned}$$

を得る.

この連立方程式を解いて

$$A=1, \quad B=-1, \quad C=-\frac{1}{2}, \quad D=-\frac{1}{4}$$

を得る. ゆえに

$$\begin{aligned} \frac{1}{s(2s+1)^3} &= \frac{1}{s} - \frac{1}{s+\frac{1}{2}} - \frac{1}{2\left(s+\frac{1}{2}\right)^2} - \frac{1}{4\left(s+\frac{1}{2}\right)^3} \\ &= \left\{ 1 - e^{-t/2} - \frac{1}{2}te^{-t/2} - \frac{1}{8}t^2e^{-t/2} \right\} \\ &= \left\{ 1 - \frac{1}{8}(8+4t+t^2)e^{-t/2} \right\}. \end{aligned}$$

例 4. $\frac{2s^6+6s^4+3s^2+5}{s^8+2s^6-2s^2-1}$ を求めよ.

$$\frac{2s^6+6s^4+3s^2+5}{s^8+2s^6-2s^2-1} = \frac{2s^6+6s^4+3s^2+5}{(s-1)(s+1)(s^2+1)^3}$$

§ 26. 有理演算子

$$\begin{aligned} &= \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s+1} + \frac{Cs+D}{s^2+1} + \frac{Es+F}{(s^2+1)^2} + \frac{Gs+H}{(s^2+1)^3} \\ &= \frac{[A(s+1)+B(s-1)](s^2+1)^3}{(s-1)(s+1)(s^2+1)^3} \\ &\quad + \frac{[(Cs+D)(s^2+1)^2 + (Es+F)(s^2+1) + (Gs+H)](s^2-1)}{(s-1)(s+1)(s^2+1)^3}. \end{aligned}$$

ここで, 分子の係数を比較して,

$$\begin{aligned} 0 &= A+B+C, & 0 &= 3A+3B-C+G, \\ 2 &= A-B+D, & 3 &= 3A-3B-D+H, \\ 0 &= 3A+3B+C+E, & 0 &= A+B-C-E-G, \\ 6 &= 3A-3B+D+F, & 5 &= A-B-D-F-H \end{aligned}$$

を得る. これを解くと,

$$A=1, \quad B=-1, \quad H=-3, \quad C=D=E=F=G=0.$$

ゆえに,

$$\begin{aligned} \frac{2s^6+6s^4+3s^2+5}{s^8+2s^6-2s^2-1} &= \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s+1} - \frac{3}{(s^2+1)^3} \\ &= \left\{ e^t - e^{-t} - \frac{3}{8}(3-t^2)\sin t + \frac{9}{8}t \cos t \right\}. \end{aligned}$$

もし, $m \geq n$ ならば, 式 (26.1) は, 演算子 s の多項式と, 分子の方が分母より次数の低い分數式の和に表される. こうしておいてから後で, 簡単な分數式に分解する方法を用いるとよい.

例 5.

$$\frac{s^3}{s-1} = s^2 + s + 1 + \frac{1}{s-1} = s^2 + s + 1 + \{e^t\}.$$

練習問題

1. 次の式を指数関数と三角関数で表せ.

$$\begin{aligned} (1) \quad & \frac{1}{2s^2-2s+5} & (2) \quad & \frac{3s-4}{s^2-s-6} & (3) \quad & \frac{s^3+2s-6}{s^2-s-2} \\ (4) \quad & \frac{6s^3+4s+1}{s^4+s^2} & (5) \quad & \frac{1}{s^3+s^2+s} & (6) \quad & \frac{s^4}{s^2+1} \\ (7) \quad & \frac{5s^3+3s^2+12s-12}{s^4-16} & (8) \quad & \frac{1}{(s^2+s+1)^2}. \end{aligned}$$

2. 次の等式を証明せよ.

$$(1) \quad \frac{\alpha-\beta}{(s-\alpha)(s-\beta)} = \{e^{\alpha t} - e^{\beta t}\}$$

Ⅲ 演 算 子

$$(2) \frac{s}{(s^2+\alpha^2)(s^2+\beta^2)} = \left\{ \frac{1}{\alpha^2-\beta^2} (\cos \beta t - \cos \alpha t) \right\} \quad (\alpha^2 \neq \beta^2)$$

$$(3) \frac{\beta^2-\alpha^2}{(s^2+\alpha^2)(s^2+\beta^2)} = \left\{ \frac{1}{\alpha} \sin \alpha t - \frac{1}{\beta} \sin \beta t \right\} \quad (\alpha \neq 0, \beta \neq 0)$$

$$(4) \frac{1}{s^4-\alpha^4} = \left\{ \frac{1}{2\alpha^3} (\sinh \alpha t - \sin \alpha t) \right\} \quad (\alpha \neq 0)$$

$$(5) \frac{1}{s^4+\alpha^4} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}\alpha^3} \left(\cosh \frac{\alpha t}{\sqrt{2}} \sin \frac{\alpha t}{\sqrt{2}} - \sinh \frac{\alpha t}{\sqrt{2}} \cos \frac{\alpha t}{\sqrt{2}} \right) \right\} \quad (\alpha \neq 0)$$

$$(6) \frac{s}{s^4+\alpha^4} = \left\{ \frac{1}{\alpha^2} \sin \frac{\alpha t}{\sqrt{2}} \sinh \frac{\alpha t}{\sqrt{2}} \right\} \quad (\alpha \neq 0)$$

$$(7) \frac{s(s^2+7)}{(s^2+1)(s^2+9)} = \{\cos^3 t\} \quad (8) \frac{3s^2-1}{(s^2+1)^3} = \left\{ \frac{1}{2} t^2 \sin t \right\}.$$

§ 27. 演算子の若干の性質

よく知られているように, 複素数であるような α を許すならば, 式 (26.1) はいつでも

$$\frac{1}{(s-\alpha)^p}$$

の形の分数式に分解できる. このことは, 係数 $\gamma_m, \dots, \gamma_0, \delta_n, \dots, \delta_0$ が複素数であっても同じである.

したがって, $m < n$ ならば, 演算子 (26.1) はいつでも, 関数 $\{t^{p-1}e^{\alpha t}\}$ の一次結合として表される. ゆえに, それは《恒等的に 0 にならない限り》いつでも, 点 $t=0$ のある右側近傍で 0 に等しくない関数であり, 区間 $0 \leq t < \infty$ で何回でも微分可能である.

もし, $n \leq m$ ならば, 前節の最後の例からわかるように, 演算子 (26.1) は関数になるとは限らない.

《0 でない任意の演算子 (26.1) を掛けても, つねにクラス C の関数になり, かつ,

点 $t=0$ のある右側近傍で 0 にならない関数 $\{q(t)\}$ が存在する.》

そのような一つの例は, 次式

$$q(t) = \begin{cases} e^{-1/t} & (0 < t < \infty) \\ 0 & (t=0) \end{cases}$$

で定義される関数である.

このことは, $m < n$ の場合には明らかである. $n \leq m$ の場合も同様であることを証明するために, まず $0 < t < \infty$ に対しては次の等式が成り立つことを注意しておかねばならない.

$$q'(t) = \frac{1}{t^2} e^{-1/t}, \quad q''(t) = \frac{1-2t}{t^4} e^{-1/t}, \quad q'''(t) = \frac{1-6t+6t^2}{t^6} e^{-1/t}$$

§ 27. 演算子の若干の性質

あるいは, 一般に

$$q^{(\nu)}(t) = \frac{w_\nu(t)}{t^{2\nu}} e^{-1/t}.$$

ここで $w_\nu(t)$ は多項式である. ゆえに $\lim_{t \rightarrow 0} q^{(\nu)}(t) = 0$ が, すべての $\nu = 0, 1, 2, \dots$ に対して成り立つ. ところで, 平均値の定理によって,

$$\frac{q(0+\varepsilon) - q(0)}{\varepsilon} = q'(\xi) \quad (0 < \xi < \varepsilon)$$

となるから, $q'(0) = \lim_{\xi \rightarrow 0} q'(\xi) = 0$ を得る. 同様に, $q''(0) = 0$. そして一般に, $q^{(\nu)}(0) = 0$ がすべての自然数 ν に対して成り立つ.

かくしてわれわれは, 関数 q のすべての導関数が連続でかつ $t=0$ で 0 に等しいことを証明した. したがって, 任意の自然数 ν に対して, $s^\nu q$ はクラス C の関数でかつ点 $t=0$ の右側近傍で 0 とは異なる.

もし $n \leq m$ ならば, 分数式 (26.1) に $1/s^{m-n+1}$ を掛けた積 P は, 分子の方が分母よりも次数が低くなっているから, クラス C の関数であり, かつ点 $t=0$ の右側近傍で 0 ではない. したがって結局, 演算子 $P \cdot s^{m-n+1} q$ もまた, クラス C の関数でかつ $t=0$ の右側近傍では 0 と異なる関数になる, これで定理は証明された.

この定理から直ちに次のことがわかる: 《演算子 (26.1) が点 $t=0$ のある右側近傍で恒等的に 0 に等しい関数を表すならば, その演算子は 0 である.》

さらに, われわれは次の定理を証明しよう.

《もし

$$(27.1) \quad \frac{\alpha_m s^m + \dots + \alpha_0}{\beta_n s^n + \dots + \beta_0} = \frac{\gamma_p s^p + \dots + \gamma_0}{\delta_q s^q + \dots + \delta_0}$$

ならば,

$$(27.2) \quad \beta_n \xi^n + \dots + \beta_0 \neq 0 \quad \text{かつ} \quad \delta_q \xi^q + \dots + \delta_0 \neq 0$$

となるすべての (実または複素) 数 ξ に対して, 等式

$$(27.3) \quad \frac{\alpha_m \xi^m + \dots + \alpha_0}{\beta_n \xi^n + \dots + \beta_0} = \frac{\gamma_p \xi^p + \dots + \gamma_0}{\delta_q \xi^q + \dots + \delta_0}$$

が成り立つ.》

[証明] 等式 (27.1) の意味から,

$$(\alpha_m s^m + \dots + \alpha_0)(\delta_q s^q + \dots + \delta_0) = (\gamma_p s^p + \dots + \gamma_0)(\beta_n s^n + \dots + \beta_0).$$

この掛け算を実行すれば, 両辺ともに, 演算子 s の多項式が得られる. それらの多項式は, § 23 で述べた定理によれば, 係数が等しくなければならない. したがってまた,

Ⅲ 演 算 子

$$(\alpha_m \xi^m + \cdots + \alpha_0) (\delta_q \xi^q + \cdots + \delta_0) = (\gamma_p \xi^p + \cdots + \gamma_0) (\beta_n \xi^n + \cdots + \beta_0)$$

が成り立つ. この等式から, (27.2) の条件により, (27.3) が直ちにでる.

IV 定数係数の常微分方程式

§ 28. 一般的方法と例

演算子法は線形微分方程式を解くのに便利な方法を提供する。偏微分方程式は、応用の豊富な分野を開いているが、常微分方程式においても、演算子の使用は古典的方法よりも優れている。演算子法によれば、これらの方程式に対してそれぞれ別々の理論を必要としない。それは、斉次でも非斉次でも、これらの方程式を自動的に普通の代数方程式に帰着させてしまう。

n 階の微分方程式

$$(28.1) \quad \alpha_n x^{(n)} + \alpha_{n-1} x^{(n-1)} + \cdots + \alpha_0 x = f$$

を考えよう。ここで、係数 $\alpha_n, \dots, \alpha_0$ ($\alpha_n \neq 0$) は定数で、 f は $t \geq 0$ で連続な任意の関数である。われわれは、解 $x(t)$ であって、初期条件

$$x(0) = \gamma_0, \quad x'(0) = \gamma_1, \quad \dots, \quad x^{(n-1)}(0) = \gamma_{n-1}$$

を満たすものを求める。

一般公式 (§ 22, p. 26)

$$x^{(n)} = s^n x - s^{n-1} x(0) - \cdots - x^{(n-1)}(0)$$

によって、方程式 (28.1) は次の形に書ける。

$$\alpha_n s^n x + \alpha_{n-1} s^{n-1} x + \cdots + \alpha_0 x = \beta_{n-1} s^{n-1} + \beta_{n-2} s^{n-2} + \cdots + \beta_0 + f,$$

ただし

$$\beta_\nu = \alpha_{\nu+1} \gamma_0 + \alpha_{\nu+2} \gamma_1 + \cdots + \alpha_n \gamma_{n-\nu-1} \quad (\nu = 0, 1, \dots, n-1)$$

である。

ゆえに、直ちに

$$x = \frac{\beta_{n-1} s^{n-1} + \cdots + \beta_0 + f}{\alpha_n s^n + \cdots + \alpha_0}$$

を得る。

この解を普通の形に求めるには、

$$x = \frac{\beta_{n-1} s^{n-1} + \cdots + \beta_0}{\alpha_n s^n + \cdots + \alpha_0} + \frac{f}{\alpha_n s^n + \cdots + \alpha_0}$$

の形に応じて、簡単な分数式に分解して計算すればよい。

同様の解法は、定数係数の連立微分方程式

IV 定数係数の常微分方程式

$$x_1' + \alpha_{11}x_1 + \cdots + \alpha_{1n}x_n = f_1$$

.....

$$x_n' + \alpha_{n1}x_1 + \cdots + \alpha_{nn}x_n = f_n$$

にも用いることができる。

$$x_1(0) = \gamma_1, \quad \dots, \quad x_n(0) = \gamma_n$$

とすれば, 一般的関係 $x' = sx - x(0)$ によって, この連立方程式は次の形になる。

$$(\alpha_{11} + s)x_1 + \cdots + \alpha_{1n}x_n = \gamma_1 + f_1$$

.....

$$\alpha_{n1}x_1 + \cdots + (\alpha_{nn} + s)x_n = \gamma_n + f_n.$$

この連立方程式を解くには, 行列式その他の, 連立代数方程式を解くための古典的方法を用いることができる。

例 1. 微分方程式

$$x' - x = (2t - 1)e^{t^2} \text{①}$$

の解 $x(t)$ で, $x(0) = 2$ となるものを求めよ。

[解] 初期条件から, $x' = sx - 2$. ゆえに

$$sx - x = 2 + f$$

ただし,

$$f = \{(2t - 1)e^{t^2}\}$$

ゆえに

$$\begin{aligned} x &= \frac{2+f}{s-1} = \frac{2}{s-1} + \frac{1}{s-1}f = \{2e^t\} + \{e^t\} \{(2t-1)e^{t^2}\} \\ &= \left\{ 2e^t + \int_0^t e^{t-\tau} (2\tau-1)e^{\tau^2} d\tau \right\} = \{e^t + e^{t^2}\}. \end{aligned}$$

例 2. 微分方程式

$$x'' + \lambda^2 x = 0 \quad (\lambda \neq 0)$$

の解 $x(t)$ で, 初期条件

$$x(0) = \alpha, \quad x'(0) = \beta$$

1) もし, §7 で採用した記法をつねに用いるとすれば, この方程式は

$$x' - x = \{(2t-1)e^{t^2}\}$$

と書かねばならないだろう。なぜなら, この方程式の右辺は(左辺と同様に)“関数”だからである。しかしながら, 在来の, 演算子法でない記法で問題が述べられているような分野に, 演算子法を正確に応用する練習をつむために, われわれは, 問題を述べるときには在来の記法を用いることにして, その解法の中でだけ演算子法の記法に移ることにする。

§ 28. 一般的方法と例

を満たすものを求めよ.

[解] $x'' = s^2x - \alpha s - \beta$ であるから, 方程式は

$$s^2x + \lambda^2x = \alpha s + \beta$$

となり, したがって

$$x = \frac{\alpha s}{s^2 + \lambda^2} + \frac{\beta}{s^2 + \lambda^2} = \left\{ \alpha \cos \lambda t + \frac{\beta}{\lambda} \sin \lambda t \right\}.$$

例 3. 方程式

$$x'' - x' - 6x = 2$$

の解 $x(t)$ で, 初期条件

$$x(0) = 1, \quad x'(0) = 0$$

となるものを求めよ.

[解] 右辺の関数 2 は誤解の生じるおそれがあるから, 方程式を書き直すと

$$\{x''(t)\} - \{x'(t)\} - 6\{x(t)\} = \{2\}.$$

{2} = 2I = 2 \cdot \frac{1}{s} だから, 初期条件をも考え合わせると

$$s^2x - sx - 6x = s - 1 + 2 \cdot \frac{1}{s}.$$

ゆえに

$$\begin{aligned} x &= \frac{s^2 + s + 2}{s(s-3)(s+2)} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{s} + \frac{8}{15} \cdot \frac{1}{s-3} + \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{s+2} \\ &= \left\{ -\frac{1}{3} + \frac{8}{15} e^{3t} + \frac{4}{5} e^{-2t} \right\}. \end{aligned}$$

例 4. 次の方程式を解け.

$$x^{(6)} + 2x^{(5)} - 2x'' - x = 0,$$

ただし, 初期条件は,

$$x(0) = x''(0) = x^{(4)}(0) = x^{(6)}(0) = 0$$

$$x'(0) = 2, \quad x^{(3)}(0) = 2, \quad x^{(5)}(0) = -1, \quad x^{(7)}(0) = 11$$

とする.

[解] 方程式を演算子法の形にすると

$$s^6x + 2s^5x - 2s^2x - x = 2s^5 + 6s^4 + 3s^2 + 5.$$

そこで, § 26 の例 4 (p. 31) の解を参照すれば,

$$x = \frac{2s^5 + 6s^4 + 3s^2 + 5}{s^5 + 2s^5 - 2s^2 - 1} = \left\{ e^t - e^{-t} - \frac{3}{8}(3-t^2)\sin t + \frac{9}{8}t \cos t \right\}.$$

例 5. 連立微分方程式

$$x' - \alpha x - \beta y = \beta e^{\alpha t}, \quad y' + \xi x - \alpha y = 0$$

Ⅳ 定数係数の常微分方程式

を解け. ただし $x(0)=0, y(0)=1$ とする.

[解]

$$sx - \alpha x - \beta y = \frac{\beta}{s - \alpha},$$

$$sy + \beta x - \alpha y = 1.$$

したがって, 連立代数方程式を解く普通の方法を用いて

$$x = \frac{2\beta}{(s - \alpha)^2 + \beta^2}, \quad y = \frac{(s - \alpha)^2 - \beta^2}{(s - \alpha)[(s - \alpha)^2 + \beta^2]}$$

を得る. ゆえに

$$x = \{2e^{\alpha t} \sin \beta t\},$$

$$y = \frac{2(s - \alpha)}{(s - \alpha)^2 + \beta^2} - \frac{1}{s - \alpha} = \{2e^{\alpha t} \cos \beta t - e^{\alpha t}\} = \{e^{\alpha t}(2 \cos \beta t - 1)\}.$$

例 6. 次の連立微分方程式

$$x' + z' - z = 0,$$

$$-x' - 2z' + x + y = \tanh t,$$

$$2x'' + y'' + z'' + z = -2 \frac{\sinh t}{\cosh^3 t}.$$

ただし,

$$x(0) = x'(0) = y(0) = y'(0) = z(0) = z'(0) = 0.$$

[解] 記号 $f = \{\tanh t\}$ を導入すれば, $\left\{-2 \frac{\sinh t}{\cosh^3 t}\right\} = s^2 f - 1$ となるから, 方程式は次の形になる.

$$sx + sz - z = 0,$$

$$-sx - 2sz + x + y = f,$$

$$2s^2 x + s^2 y + s^2 z + z = s^2 f - 1.$$

この連立方程式に対する行列式を D と書けば,

$$D = \begin{vmatrix} s & 0 & s-1 \\ -s+1 & 1 & -2s \\ 2s^2 & s^2 & s^2+1 \end{vmatrix} = s(s+1)(s^2+1),$$

$$x = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} 0 & 0 & s-1 \\ f & 1 & -2s \\ s^2 f - 1 & s^2 & s^2 + 1 \end{vmatrix} = \frac{s-1}{s(s+1)(s^2+1)} = -\frac{1}{s} + \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s^2+1},$$

$$y = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} s & 0 & s-1 \\ -s+1 & f & -2s \\ 2s^2 & s^2 f - 1 & s^2 + 1 \end{vmatrix} = \frac{-s^2 - 2s + 1}{s(s+1)(s^2+1)} + f = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} - 2 \frac{1}{s^2+1} + f,$$

§ 28. 一般的方法と例

$$z = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} s & 0 & 0 \\ -s+1 & 1 & f \\ 2s^2 & s^2 & s^2f-1 \end{vmatrix} = \frac{-1}{(s+1)(s^2+1)} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s+1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s^2+1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{s}{s^2+1}$$

ゆえに, 結局,

$$\begin{aligned} x &= \{-1 + e^{-t} + \sin t\}, \\ y &= \{1 - e^{-t} - 2 \sin t + \tanh t\}, \\ z &= \frac{1}{2} \{-e^{-t} - \sin t + \cos t\} \end{aligned}$$

を得る.

練習問題

1. 次の方程式を, 与えられた初期条件の下で解け.

- (1) $x'' - 2\alpha x' + (\alpha^2 + \beta^2)x = 0, x(0) = 0, x'(0) = 1$
- (2) $x'' + 4x = \sin t, x(0) = x'(0) = 0$
- (3) $x''' + x' = e^{2t}, x(0) = x'(0) = x''(0) = 0$
- (4) $x'' + x' = t^2 + 2t, x(0) = 4, x'(0) = -2$
- (5) $x^{(4)} + x''' = \cos t, x(0) = x'(0) = x''(0) = 0, x'''(0) = \gamma$
- (6) $4x''' - 8x'' - x' - 3x = -8e^t, x(0) = x'(0) = x''(0) = 1$
- (7) $x^{(4)} + 4x = t^2, x(0) = x'(0) = x''(0) = x'''(0) = 0$
- (8) $x^{(4)} + 2\alpha^2 x'' + \alpha^4 x = \cosh \alpha t, x(0) = x'(0) = 1, x''(0) = 1 - 2\alpha^2, x'''(0) = -2\alpha^2$
- (9) $x^{(5)} + 2x''' + x' = \alpha t + \beta \sin t + \gamma \cos t, x(0) = x'(0) = x''(0) = x'''(0) = x^{(4)}(0) = 0$
- (10) $x'' - 4x = \sin \frac{3}{2}t \cdot \sin \frac{1}{2}t, x(0) = 1, x'(0) = 0.$

(ヒント: \sin の積を \cos の差に変形せよ).

2. 次の連立方程式を与えられた初期条件の下に解け.

- (1) $x' - y' - 2x + 2y = 1 - 2t, x'' + 2y' + x = 0, x(0) = y(0) = x'(0) = 0$
- (2) $x' = -y, y' = 2x + 2y, x(0) = y(0) = 1$
- (3) $x' + 2y = 3t, y' - 2x = 4, x(0) = 2, y(0) = 3$
- (4) $x' + y' - y = e^t, 2x' + y' + 2y = \cos t, x(0) = y(0) = 0$
- (5) $2x' + y' - 3x = 0, x'' + y' - 2y = e^{2t}, x(0) = -1, x'(0) = 1, y(0) = 0$
- (6) $x' - x + 2y = 0, x'' - 2y' = 2t - \cos 2t, x(0) = 0, x'(0) = -1$
- (7) $x' = y - z, y' = x + y, z' = x + z, x(0) = 1, y(0) = 2, z(0) = 3$
- (8) $x' = 6x - 72y + 44z, y' = -4x + 40y - 22z, z' = -6x + 57y - 31z, x(0) = 9, y(0) = 5, z(0) = 7.$

公式表

I 特殊関数

1. Euler のガンマ関数.

$$\Gamma(\lambda) = \int_0^{\infty} t^{\lambda-1} e^{-t} dt \quad (\lambda > 0) \quad (\text{I, § 58})$$

$$\Gamma(\lambda+1) = \lambda\Gamma(\lambda), \quad \Gamma(n) = (n-1)! \quad (n=1, 2, \dots)$$

$$\frac{\Gamma(\lambda)\Gamma(\mu)}{\Gamma(\lambda+\mu)} = \int_0^1 t^{\lambda-1}(1-t)^{\mu-1} dt \quad (\lambda > 0, \mu > 0)$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \int_0^{\infty} e^{-\tau^2} d\tau = \sqrt{\pi}$$

2. 誤差関数.

$$\operatorname{erf} t = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-\tau^2} d\tau \quad (\text{I, § 59})$$

$$\operatorname{cerf} t = 1 - \operatorname{erf} t$$

3. Bessel 関数.

$$J_0(\lambda) = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu} \frac{\lambda^{2\nu}}{2^{2\nu}(\nu!)^2}, \quad J_1(\lambda) = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu} \frac{\lambda^{1+2\nu}}{2^{1+2\nu}\nu!(1+\nu)!} \quad (\text{II, § 18})$$

$$J_0'(\lambda) = -J_1(\lambda)$$

$$J_0(i\lambda) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\lambda^{2\nu}}{2^{2\nu}(\nu!)^2}, \quad J_1(i\lambda) = i \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\lambda^{1+2\nu}}{2^{1+2\nu}\nu!(1+\nu)!}$$

$$J_n(\lambda) = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu} \frac{\lambda^{n+2\nu}}{2^{n+2\nu}\nu!(n+\nu)!} \quad (n=0, 1, 2, \dots) \quad (\text{II, § 20})$$

$$J_n(i\lambda) = i^n \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\lambda^{n+2\nu}}{2^{n+2\nu}\nu!(n+\nu)!} \quad (n=0, 1, 2, \dots)$$

II 演算子法の諸公式

1. $\{a(t)\} + \{b(t)\} = \{a(t) + b(t)\} \quad (\text{I, § 7})$

$$\{a(t)\} \cdot \{b(t)\} = \left\{ \int_0^t a(t-\tau)b(\tau) d\tau \right\}$$

$$\alpha\{f(t)\} = \{\alpha f(t)\} \quad (\alpha : \text{数}) \quad (\text{I, § 19})$$

2. $s\{a(t)\} = \{a'(t)\} + a(0) \quad (\text{I, § 21})$

$$\{a^{(n)}(t)\} = s^n\{a(t)\} - s^{n-1}a(0) - \dots - sa^{(n-2)}(0) - a^{(n-1)}(0) \quad (\text{I, § 22})$$

3. $T^\alpha\{a(t)\} = \{e^{\alpha t}a(t)\}, \quad T^\alpha R(s) = R(s-\alpha) \quad (\text{III, § 37})$

公 式 表

4. $\frac{d}{ds}\{a(t)\} = \{-ta(t)\}$ (III, § 46)

5. $e^{-\lambda s}\{f(t)\} = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq \lambda \\ f(t-\lambda), & 0 \leq \lambda < t \end{cases}$ (III, § 9)

$\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} e^{-\lambda s} f(\lambda) d\lambda = \begin{cases} f(t), & 0 \leq \lambda_1 < t < \lambda_2 \\ 0, & \text{区間 } (\lambda_1, \lambda_2) \text{ の外側} \end{cases}$ (V, § 5)

$\int_0^{\infty} e^{-\lambda s} f(\lambda) d\lambda = \{f(t)\}$

6. $\frac{1}{s} = \{1\}$ (I, § 21)

$\frac{1}{s^n} = \left\{ \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \right\} \quad (n=1, 2, \dots)$ (I, § 8)

$\frac{1}{s^\lambda} = \left\{ \frac{t^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)} \right\} \quad (\lambda > 0)$ (I, § 59)

$\frac{1}{\sqrt{s}} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \right\}$

$\frac{1}{s-\alpha} = \{e^{\alpha t}\}$ (I, § 24)

$\frac{1}{(s-\alpha)^\lambda} = \left\{ \frac{t^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)} e^{\alpha t} \right\}$ (I, § 59)

$\frac{1}{\sqrt{s+\alpha}} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-\alpha t} \right\}$ (I, § 59)

$\frac{1}{s\sqrt{s+\alpha}} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \operatorname{erf} \sqrt{\alpha t} \right\} \quad (\alpha > 0)$

$\frac{1}{s^2+\beta^2} = \left\{ \frac{1}{\beta} \sin \beta t \right\} \quad (\beta > 0)$ (I, § 25)

$\frac{s}{s^2+\beta^2} = \{\cos \beta t\}$

$\frac{1}{s^2-\beta^2} = \left\{ \frac{1}{\beta} \sinh \beta t \right\} \quad (\beta > 0)$

$\frac{s}{s^2-\beta^2} = \{\cosh \beta t\}$

$\frac{1}{(s-\alpha)^2+\beta^2} = \left\{ \frac{1}{\beta} e^{\alpha t} \sin \beta t \right\} \quad (\alpha > 0)$

$\frac{s-\alpha}{(s-\alpha)^2+\beta^2} = \{e^{\alpha t} \cos \beta t\}$

$\frac{1}{(s-\alpha)^2-\beta^2} = \left\{ \frac{1}{\beta} e^{\alpha t} \sinh \beta t \right\} \quad (\beta > 0)$

$\frac{s-\alpha}{(s-\alpha)^2-\beta^2} = \{e^{\alpha t} \cosh \beta t\}$

$\frac{1}{[(s-\alpha)^2+\beta^2]^2} = \left\{ \frac{e^{\alpha t}}{2\beta^2} \left[\frac{1}{\beta} \sin \beta t - t \cos \beta t \right] \right\} \quad (\beta > 0)$

公 式 表

$$\frac{1}{[(s-\alpha)^2+\beta^2]^3} = \left\{ \frac{e^{\alpha t}}{4\beta^3} \left[\left(-\frac{3}{2} - \frac{\beta^2 t^2}{2} \right) \frac{1}{\beta} \sin \beta t - \frac{3}{2} t \cos \beta t \right] \right\}$$

$$\frac{s}{[(s-\alpha)^2+\beta^2]^2} = \left\{ \frac{e^{\alpha t}}{2\beta^2} \left[(\alpha + \beta^2 t) \frac{1}{\beta} \sin \beta t - \alpha t \cos \beta t \right] \right\} \quad (\text{I, } \S 26)$$

$$\frac{1}{\sqrt{s^2+\lambda^2}} = \{J_0(\lambda t)\} \quad (\text{II, } \S 18)$$

$$\frac{1}{\sqrt{s^2-\lambda^2}} = \{J_0(i\lambda t)\}$$

$$\frac{\sqrt{s^2+\lambda^2}-s}{\sqrt{s^2+\lambda^2}} = \{\lambda J_1(\lambda t)\}$$

$$\frac{\sqrt{s^2-\lambda^2}-s}{\sqrt{s^2-\lambda^2}} = \{i\lambda J_1(i\lambda t)\}$$

$$(\sqrt{s^2+\lambda^2}-s)^n = \left\{ \frac{n\lambda^n}{t} J_n(\lambda t) \right\} \quad (n=1, 2, \dots) \quad (\text{II, } \S 20)$$

$$\frac{(\sqrt{s^2+\lambda^2}-s)^n}{\sqrt{s^2+\lambda^2}} = \{\lambda^n J_n(\lambda t)\} \quad (n=0, 1, 2, \dots)$$

$$\frac{1}{s} \exp\left(-\frac{\lambda}{s}\right) = \{J_0(2\sqrt{\lambda t})\} \quad (\text{III, } \S 10)$$

$$\frac{1}{s^2} \exp\left(-\frac{\lambda}{s}\right) = \left\{ \sqrt{\frac{t}{\lambda}} J_1(2\sqrt{\lambda t}) \right\}$$

$$\frac{1}{\sqrt{s}} \exp\left(-\frac{\lambda}{s}\right) = \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \cos 2\sqrt{\lambda t} \right\}$$

$$\frac{1}{\sqrt{s}} \exp \frac{\lambda}{s} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \cosh 2\sqrt{\lambda t} \right\}$$

$$\exp(-\lambda\sqrt{s}) = \left\{ \frac{\lambda}{2\sqrt{\pi t^3}} \exp\left(-\frac{\lambda^2}{4t}\right) \right\} \quad (\lambda > 0)$$

$$\frac{1}{\sqrt{s}} \exp(-\lambda\sqrt{s}) = \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \exp\left(-\frac{\lambda^2}{4t}\right) \right\} \cdot (\lambda > 0) \quad (\text{III, } \S 23)$$

$$\frac{1}{s} \exp(-\lambda\sqrt{s}) = \left\{ \operatorname{erf} \frac{\lambda}{2\sqrt{t}} \right\} \quad (\lambda > 0)$$

$$\exp \lambda(s - \sqrt{s^2 + \alpha^2}) = 1 - \left\{ \frac{\lambda}{\sqrt{t^2 + 2\lambda t}} \alpha J_1(\alpha\sqrt{t^2 + 2\lambda t}) \right\} \quad (\text{III, } \S 11)$$

$$\frac{\exp \lambda(s - \sqrt{s^2 + \alpha^2})}{\sqrt{s^2 + \alpha^2}} = \{J_0(\alpha\sqrt{t^2 + 2\lambda t})\}$$

$$\exp \lambda(s - \sqrt{s^2 - \alpha^2}) = 1 - \left\{ \frac{\lambda}{\sqrt{t^2 + 2\lambda t}} i\alpha J_1(i\alpha\sqrt{t^2 + 2\lambda t}) \right\}$$

$$\frac{\exp \lambda(s - \sqrt{s^2 - \alpha^2})}{\sqrt{s^2 - \alpha^2}} = \{J_0(i\alpha\sqrt{t^2 + 2\lambda t})\}$$

$$\exp \lambda(s - \sqrt{s^2 + 2\lambda s}) = e^{-\alpha\lambda} - \left\{ \frac{\lambda}{\sqrt{t^2 + 2\lambda t}} e^{-\alpha(\lambda+t)} i\alpha J_1(i\alpha\sqrt{t^2 + 2\lambda t}) \right\} \quad (\text{III, } \S 37)$$

公 式 表

$$\frac{\exp \lambda(s - \sqrt{s^2 + 2\alpha s})}{\sqrt{s^2 + 2\alpha s}} = \{e^{-\alpha(\lambda+t)} J_0(i\alpha\sqrt{t^2 + 2\lambda t})\}$$

$$\exp(-\lambda\sqrt{s^2 + \alpha^2}) = e^{-\lambda s} - \begin{cases} 0, & 0 \leq t < \lambda \\ \frac{\lambda}{\sqrt{t^2 - \lambda^2}} \alpha J_1(\alpha\sqrt{t^2 - \lambda^2}), & 0 \leq \lambda < t \end{cases}$$

$$\frac{\exp(-\lambda\sqrt{s^2 + \alpha^2})}{\sqrt{s^2 + \alpha^2}} = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < \lambda \\ J_0(\alpha\sqrt{t^2 - \lambda^2}), & 0 \leq \lambda < t \end{cases}$$

$$\exp(-\lambda\sqrt{s^2 - \alpha^2}) = e^{-\lambda s} - \begin{cases} 0, & 0 \leq t < \lambda \\ \frac{\lambda}{\sqrt{t^2 - \lambda^2}} i\alpha J_1(i\alpha\sqrt{t^2 - \lambda^2}), & 0 \leq \lambda < t \end{cases}$$

$$\frac{\exp(-\lambda\sqrt{s^2 - \alpha^2})}{\sqrt{s^2 - \alpha^2}} = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < \lambda \\ J_0(i\alpha\sqrt{t^2 - \lambda^2}), & 0 \leq \lambda < t \end{cases}$$

$$\exp(-\lambda\sqrt{s^2 + 2\alpha s}) = e^{-\alpha\lambda} e^{-\lambda s} - \begin{cases} 0, & 0 \leq t < \lambda \\ \frac{\lambda}{\sqrt{t^2 - \lambda^2}} e^{-\alpha t} i\alpha J_1(i\alpha\sqrt{t^2 - \lambda^2}), & 0 \leq \lambda < t \end{cases}$$

$$\frac{\exp(-\lambda\sqrt{s^2 + 2\alpha s})}{\sqrt{s^2 + 2\alpha s}} = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < \lambda \\ e^{-\alpha t} J_0(i\alpha\sqrt{t^2 - \lambda^2}), & 0 \leq \lambda < t \end{cases}$$

$$\exp \lambda(s - \sqrt{(s-\alpha)^2 + \beta^2}) = e^{\alpha\lambda} - \left\{ \frac{\lambda}{\sqrt{t^2 + 2\lambda t}} e^{\alpha(\lambda+t)} \beta J_1(\beta\sqrt{t^2 + 2\lambda t}) \right\}$$

$$\frac{\exp \lambda(s - \sqrt{(s-\alpha)^2 + \beta^2})}{\sqrt{(s-\alpha)^2 + \beta^2}} = \{e^{\alpha(\lambda+t)} J_0(\beta\sqrt{t^2 + 2\lambda t})\}$$

$$\exp(-\lambda\sqrt{(s-\alpha)^2 + \beta^2}) = e^{\alpha\lambda} e^{-\lambda s} - \begin{cases} 0, & 0 \leq t < \lambda \\ \frac{\lambda}{\sqrt{t^2 - \lambda^2}} e^{\alpha t} \beta J_1(\beta\sqrt{t^2 - \lambda^2}), & 0 \leq \lambda < t \end{cases}$$

$$\frac{\exp(-\lambda\sqrt{(s-\alpha)^2 + \beta^2})}{\sqrt{(s-\alpha)^2 + \beta^2}} = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < \lambda \\ e^{\alpha t} J_0(\beta\sqrt{t^2 - \lambda^2}), & 0 \leq \lambda < t \end{cases}$$

$$7. \left. \begin{aligned} e^{-\lambda\sqrt{s}} &\leq 3\sqrt{\frac{6}{\pi e^3}} \cdot \frac{1}{\lambda^2 s} \\ \frac{1}{\sqrt{s}} e^{-\lambda\sqrt{s}} &\leq \sqrt{\frac{2}{\pi e}} \cdot \frac{1}{\lambda s} \end{aligned} \right\} (\lambda > 0) \quad \text{(III, § 27)}$$

$$8. \frac{1}{[(s-\alpha)^2 + \beta^2]^n} = \left\{ \frac{e^{\alpha t}}{(2\beta^2)^{n-1}} \left[A_n(\beta^2 t^2) \frac{1}{\beta} \sin \beta t - B_n(\beta^2 t^2) t \cos \beta t \right] \right\},$$

(n=1, 2, ...)

(III, § 47)

$$\frac{s-\alpha}{[(s-\alpha)^2 + \beta^2]^n} = \left\{ \frac{e^{\alpha t}}{2(n-1)(2\beta^2)^{n-2}} \left[A_{n-1}(\beta^2 t^2) \cdot \frac{t}{\beta} \sin \beta t - B_{n-1}(\beta^2 t^2) t^2 \cos \beta t \right] \right\},$$

(n=2, 3, ...)

$$A_1(x) = 1, \quad A_2(x) = 1,$$

$$A_{n+1}(x) = \frac{2n-1}{n} A_n(x) - \frac{x}{n(n-1)} A_{n-1}(x) \quad (n=2, 3, \dots)$$

公 式 表

	$A_n(x)$	$B_n(x)$
$n=1$	1	0
$n=2$	1	1
$n=3$	$\frac{1}{2}(3-x)$	$\frac{3}{2}$
$n=4$	$\frac{5}{2}-x$	$\frac{1}{2}\left(5-\frac{1}{3}x\right)$
$n=5$	$\frac{5}{8}\left(7-3x+\frac{1}{15}x^2\right)$	$\frac{5}{8}\left(7-\frac{2}{3}x\right)$
$n=6$	$\frac{7}{8}\left(9-4x+\frac{1}{7}x^2\right)$	$\frac{7}{8}\left(9-x+\frac{1}{105}x^2\right)$
$n=7$	$\frac{7}{16}\left(33-15x+\frac{2}{3}x^2-\frac{1}{315}x^3\right)$	$\frac{7}{16}\left(33-4x+\frac{1}{15}x^2\right)$
$n=8$	$\frac{1}{8}\left(\frac{429}{2}-99x+5x^2-\frac{2}{45}x^3\right)$	$\frac{1}{8}\left(\frac{429}{2}-\frac{55}{2}x+\frac{3}{5}x^2-\frac{1}{630}x^3\right)$
$n=9$	$\frac{1}{128}\left(6435-3003x+165x^2-2x^3+\frac{1}{315}x^4\right)$	$\frac{1}{128}\left(6435-858x+22x^2-\frac{4}{35}x^3\right)$
$n=10$	$\frac{1}{128}\left(12155-5720x+\frac{1001}{3}x^2-\frac{44}{9}x^3+\frac{1}{63}x^4\right)$	$\frac{1}{128}\left(12155-\frac{5005}{3}x+\frac{143}{3}x^2-\frac{22}{63}x^3+\frac{1}{2835}x^4\right)$

公 式 表

$$B_1(x) = 0, \quad B_2(x) = 1,$$

$$B_{n+1}(x) = \frac{2n-1}{n} B_n(x) - \frac{x}{n(n-1)} B_{n-1}(x) \quad (n=2, 3, \dots)$$

III 電気工学への応用

1. 回路の方程式.

$$Z(I - \bar{I}) = E, \quad (\text{I, § 32 および I, § 38})$$

$$Z = Ls + R + \frac{1}{Cs}, \quad Z\bar{I} = LI(0) - \frac{Q(0)}{Cs} \quad (\text{基本回路網}) \quad (\text{I, § 31 および I, § 32})$$

$$Z = Z_1 + Z_2, \quad Z\bar{I} = Z_1\bar{I}_1 + Z_2\bar{I}_2 \quad (\text{直列接続}) \quad (\text{I, § 38})$$

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2}, \quad \bar{I} = \bar{I}_1 + \bar{I}_2 \quad (\text{並列接続})$$

2. 定常電流.

$$E = \frac{E_1 s - E_2 \omega}{s^2 + \omega^2}, \quad I_u = \frac{I_1 s - I_2 \omega}{s^2 + \omega^2} \quad (\text{I, § 33})$$


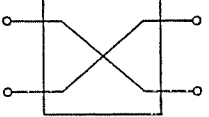
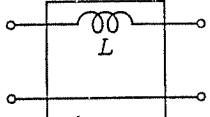
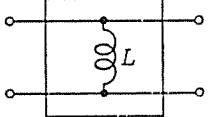
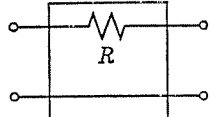
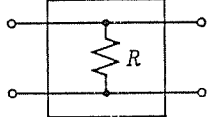
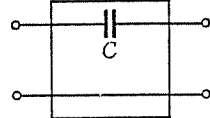
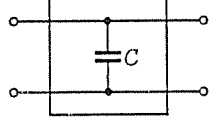
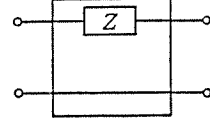
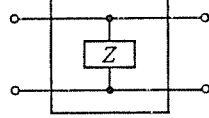
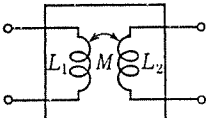
$$I_1 + iI_2 = \frac{E_1 + iE_2}{Z(\omega i)}$$

$$Z_0 = |Z(\omega i)| \quad (\text{見かけ上の抵抗})$$

$$\theta = \arg Z(\omega i) \quad (\text{位相のずれ})$$

公 式 表

3. 簡単な四端子回路網とその行列の表.

 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	 $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$
 $\begin{bmatrix} 1 & Ls \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{Ls} & 1 \end{bmatrix}$
 $\begin{bmatrix} 1 & R \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{R} & 1 \end{bmatrix}$
 $\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{Cs} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ Cs & 1 \end{bmatrix}$
 $\begin{bmatrix} 1 & Z \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{Z} & 1 \end{bmatrix}$
 $\begin{bmatrix} \frac{L_1}{M} & \frac{(L_1L_2 - M^2)s}{M} \\ \frac{1}{Ms} & \frac{L_2}{M} \end{bmatrix}$	