

(3) しばらく並べると、上のように再び最初の変数が折れ線状に並ぶ。

もう一個やってみましょう。これくらいになると、計算が苦痛になってきますので、数式処理ソフトウェアを使ってしまいます。

$$\begin{array}{cccccc}
 & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1} \\
 x_1 & & x_5 & & x_9 & & x_{13} & & x_4 \\
 & & x_2 & & x_7 & & x_{11} & & x_3 \\
 x_3 & & x_6 & & x_{10} & & x_{14} & & x_2 \\
 & & x_4 & & x_8 & & x_{12} & & x_1 \\
 \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1} & &
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 x_5 &= \frac{x_2 + 1}{x_1}, & x_6 &= \frac{x_2 x_4 + 1}{x_3}, & x_7 &= \frac{x_2^2 x_4 + x_2 x_4 + x_2 + x_1 x_3 + 1}{x_1 x_2 x_3}, \\
 x_8 &= \frac{x_2 x_4 + x_3 + 1}{x_3 x_4}, & x_9 &= \frac{x_1 x_3 + x_2 x_4 + 1}{x_2 x_3}, \\
 x_{10} &= \frac{x_2^2 x_4 + x_2 x_4 + x_2 + x_2 x_3 + 1 + x_3 + x_1 x_3 + x_1 x_3^2}{x_1 x_2 x_3 x_4}, \\
 x_{11} &= \frac{x_1 x_3^2 + x_1 x_2 + x_2 x_4 + x_3 + 1}{x_2 x_3 x_4}, \\
 x_{12} &= \frac{x_2 + x_1 x_3 + 1}{x_1 x_2}, & x_{13} &= \frac{x_3 + 1}{x_4}, & x_{14} &= \frac{x_1 x_3 + 1}{x_2}
 \end{aligned}$$

今度は14個の変数が出てきました。前のものも見直してみると、5個、9個、14個と増えています。次の問に自然にたどり着きます。

問: 最初に与える変数の数を n としたとき、全部で出てくる変数の個数 $(5, 9, 14, \dots)$ の一般項は、なんだろうか?

本当は、ここでみなさんに考えていただきたいところですが、時間がないので答えを書いてしまいますと、

答: $n(n+3)/2$ となります。

階差数列を考えると、4, 5 となっていますから、以下 6, 7, ... と続くと想像するのは、自然なことです。たしかにそうなっているというのが上の答えです。

先に書いたように、分母に出てくる単項式はすべて異なっているのですが、上で求めたものを書いてみますと

$$n = 2 \text{ のとき : } x_1, x_1 x_2, x_2$$

$$n = 3 \text{ のとき : } x_1, x_3, x_1 x_2 x_3, x_2 x_3, x_1, x_2$$

$$n = 4 \text{ のとき : } x_1, x_3, x_1 x_2 x_3, x_3 x_4, x_2 x_3, x_1 x_2 x_3 x_4, x_2 x_3 x_4, x_1 x_2, x_4, x_2$$

となって、二つの整数 $1 \leq i \leq j \leq n$ の組に対して x_i から x_j まで掛ける単項式

$$x_i x_{i+1} \cdots x_j$$

が現れていることが見て取れます。この個数は、 $n(n+1)/2$ なので、最初の n 個と合わせて $n(n+1)/2 + n = n(n+3)/2$ となります。

また、この答えは正 $(n+3)$ 角形の対角線の個数に等しいです。いささか天下りですが、 $n=3$ の場合に対角線と変数に対応を以下のようにつけてみます。

対角線と変数 x_i の対応のさせ方ですが、

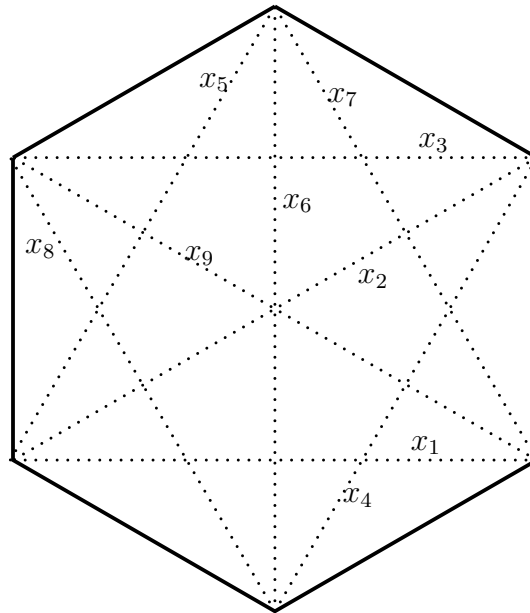


図 1. 六角形の対角線

- (1) 最初の対角線 x_1, x_2, x_3 は、ジグザグに頂点以外では交わらない。
 (2) 操作

$$\begin{array}{ccc} & a & \\ b & & c \\ & d & \end{array}$$

において、 b と c は四角形の二つの対角線をなし、 a と d は向かい合った辺に対応する変数を掛けたものである。

念のため、もう一回、変数の並び方を書いておきます。

$$\begin{array}{cccc} \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{1} \\ x_1 & x_4 & x_7 & x_3 \\ & x_2 & x_6 & x_9 & x_2 \\ x_3 & x_5 & x_8 & x_1 \\ \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{1} \end{array}$$

このように対応をつけると、いくつか新しく気が付くことがあります。例えば

- 次の四つの形のどれかになるように三つの変数を取ってくると、頂点以外で交わらない対角線に対応する変数になっている。

$$\begin{array}{cccc} * & & * & * & & * \\ & * & * & & * & * \\ * & & * & & * & * \end{array}$$

これらの結果は、変数の個数を増やしたときにも成り立ちます。

次に二個の変数から出発した例に戻ります。

$$\begin{array}{cccc} \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{1} & \\ x_1 & x_3 & x_5 & x_2 \\ & x_2 & x_4 & x_1 & x_3 \\ & \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{1} \end{array} \quad \begin{array}{l} x_3 = \frac{x_2 + 1}{x_1}, \quad x_4 = \frac{x_3 + 1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2 + 1}{x_1 x_2}, \\ x_5 = \frac{x_4 + 1}{x_3} = \frac{x_1 + 1}{x_2} \end{array}$$

ルールを少し変更して、上の段の変数から下の段の変数を作るときには、

$$x_{i+1} = \frac{1 + x_i^2}{x_{i-1}}$$

と二乗することになります。下の段の変数から上の段の変数を作るルールは変えません。□1は省略して書くことにすると、

$$\begin{array}{cccc} x_1 & x_3 & x_5 & x_1 \\ x_2 & x_4 & x_6 & x_2 \end{array}$$

となります。実際、

$$\begin{aligned} x_3 &= \frac{x_2 + 1}{x_1}, & x_4 &= \frac{1 + x_3^2}{x_2} = \dots = \frac{x_1^2 + x_2^2 + 2x_2 + 1}{x_1^2 x_2}, \\ x_5 &= \frac{1 + x_4}{x_3} = \dots = \frac{x_2 + 1 + x_1^2}{x_1 x_2}, & x_6 &= \frac{1 + x_5^2}{x_4} = \dots = \frac{1 + x_1^2}{x_2}, \end{aligned}$$

で、さらに

$$x_7 = \frac{1 + x_6}{x_5} = \dots = x_1, \quad x_8 = \frac{1 + x_7^2}{x_6} = x_2$$

となって元に戻ります。あとでルート系と関係をつけるので、最初の場合をタイプ A_2 、今の場合をタイプ B_2 と名付けることにします。

次に、三乗にしてみます。名前はタイプ G_2 です。

$$\begin{array}{cccccc} x_1 & x_3 & x_5 & x_7 & x_1 \\ x_2 & x_4 & x_6 & x_8 & x_2 \end{array}$$

となります。ただし、

$$\begin{aligned} x_3 &= \frac{x_2 + 1}{x_1}, & x_4 &= \frac{1 + x_3^3}{x_2} = \dots = \frac{x_1^3 + x_2^3 + 3x_2^2 + 3x_2 + 1}{x_1^3 x_2}, \\ x_5 &= \frac{1 + x_4}{x_3} = \dots = \frac{x_2^2 + 2x_2 + x_1^3 + 1}{x_1^2 x_2}, \\ x_6 &= \frac{1 + x_5^3}{x_4} = \dots = \frac{x_1^6 + 2x_1^3 + 3x_2 x_1^3 + 1 + x_2^3 + 3x_2^2 + 3x_2}{x_2^2 x_1^3}, \\ x_7 &= \frac{1 + x_6}{x_5} = \dots = \frac{x_1^3 + x_2 + 1}{x_1 x_2}, & x_8 &= \frac{1 + x_7^3}{x_6} = \dots = \frac{x_1^3 + 1}{x_2} \end{aligned}$$

であり、さらに

$$x_9 = \frac{1 + x_8}{x_7} = \dots = x_1, \quad x_{10} = \frac{1 + x_9^3}{x_8} = x_2$$

となって元に戻ります。

さらに指数をもう一つ増やし、四乗にしてみます。この場合は、普通付けられている名前はないのですが、ここではタイプ H_2 と呼ぶことにします。

$$\begin{aligned} x_3 &= \frac{x_2 + 1}{x_1}, & x_4 &= \frac{1 + x_3^4}{x_2} = \frac{x_1^4 + x_2^4 + 4x_2^3 + 6x_2^2 + 4x_2 + 1}{x_1^4 x_2}, \\ x_5 &= \frac{1 + x_4}{x_3} = \frac{x_2^3 + 3x_2^2 + 3x_2 + x_1^4 + 1}{x_1^3 x_2}, \\ x_6 &= \frac{1 + x_5^4}{x_4} = \frac{1}{x_1^8 x_2^3} \left[x_1^{12} + 3x_1^8 + 6x_2^2 x_1^8 + 8x_2 x_1^8 + 36x_2^3 x_1^4 + 3x_1^4 + 19x_2^4 x_1^4 \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 34x_2^2x_1^4 + 4x_2^5x_1^4 + 16x_1^4x_2 + 56x_2^5 + 8x_2 + 1 + 8x_2^7 + 28x_2^2 \\
& + 70x_2^4 + 56x_2^3 + 28x_2^6 + x_2^8 \Big] \\
x_7 = \frac{1+x_6}{x_5} &= \frac{1}{x_1^5x_2^2} \left[x_1^8 + 3x_2^2x_1^4 + 5x_1^4x_2 + 2x_1^4 + 10x_2^3 + 1 + 5x_2^4 \right. \\
& \left. + 10x_2^2 + x_2^5 + 5x_2 \right] \\
x_8 = \frac{1+x_7^4}{x_6} &= \frac{1}{x_1^{12}x_2^5} \left[1 + 19x_1^{12}x_2^4 + 64x_1^{12}x_2^3 + 44x_1^8x_2^6 \right. \\
& + 4x_1^8x_2^7 + 6x_1^{16}x_2^2 + 12x_1^{16}x_2 + 69x_2^8x_1^4 \\
& + 8x_2^9x_1^4 + 66x_2^{10} + x_1^{20} + 12x_2^{11} + x_2^{12} + 322x_1^8x_2^4 \\
& + 168x_1^8x_2^5 + 348x_1^8x_2^3 + 84x_1^{12}x_2^2 \\
& + 48x_1^{12}x_2 + 588x_2^6x_1^4 + 12x_2 + 264x_2^7x_1^4 \\
& + 48x_1^4x_2 + 5x_1^4 + 66x_2^2 + 220x_2^3 + 495x_2^4 + 798x_2^4x_1^4 \\
& + 504x_2^3x_1^4 + 204x_2^2x_1^4 + 840x_2^5x_1^4 + 924x_2^6 \\
& + 792x_2^5 + 10x_1^8 + 792x_2^7 + 495x_2^8 + 5x_1^{16} + 220x_2^9 + 10x_1^{12} \\
& \left. + 216x_2^2x_1^8 + 72x_2x_1^8 \right] \\
x_9 = \frac{1+x_8}{x_7} &= \frac{1}{x_1^7x_2^3} \left[x_1^{12} + 7x_2x_1^8 + 3x_1^8 + 3x_2^2x_1^8 + 18x_2^3x_1^4 \right. \\
& + 5x_2^4x_1^4 + 24x_2^2x_1^4 + 3x_1^4 + 14x_1^4x_2 \\
& \left. + x_2^7 + 7x_2 + 7x_2^6 + 21x_2^2 + 35x_2^4 + 35x_2^3 + 21x_2^5 + 1 \right] \\
x_{10} = \frac{1+x_9^4}{x_8} &= \frac{1}{x_1^{16}x_2^7} \left[1 + 130x_1^8x_2^{10} + 702x_1^{16}x_2^4 + 272x_1^{16}x_2^5 \right. \\
& + 928x_1^{16}x_2^3 + 150x_1^{20}x_2^2 + 96x_1^{20}x_2 \\
& + 1768x_1^{12}x_2^6 + 552x_1^{12}x_2^7 + 3812x_1^{12}x_2^4 \\
& + 2792x_1^{12}x_2^3 + 3292x_1^{12}x_2^5 + 9688x_1^8x_2^6 \\
& + 6440x_1^8x_2^7 + 2893x_1^8x_2^8 + 824x_1^8x_2^9 \\
& + 660x_1^{16}x_2^2 + 240x_1^{16}x_2 + 151x_2^{12}x_1^4 \\
& + 12969x_2^8x_1^4 + 7480x_2^9x_1^4 + 3102x_2^{10}x_1^4 \\
& + 876x_2^{11}x_1^4 + 8008x_2^{10} + 7x_1^{24} + 21x_1^{20} + 560x_2^{13} \\
& + 4368x_2^{11} + 1820x_2^{12} + 120x_2^{14} + 19x_1^{20}x_2^4 + 92x_1^{20}x_2^3 \\
& \left. + 44x_1^{16}x_2^6 + 6x_1^{24}x_2^2 + 16x_1^{24}x_2 \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 85x_1^{12}x_2^8 + 4x_1^{12}x_2^9 + 8x_1^8x_2^{11} + 16x_2^{15} \\
& + x_1^{28} + x_2^{16} + 12x_2^{13}x_1^4 + 7414x_1^8x_2^4 + 10136x_1^8x_2^5 \\
& + 3728x_1^8x_2^3 + 1260x_1^{12}x_2^2 + 320x_1^{12}x_2 \\
& + 15972x_2^6x_1^4 + 16x_2 + 16632x_2^7x_1^4 + 96x_1^4x_2 \\
& + 7x_1^4 + 120x_2^2 + 560x_2^3 + 1820x_2^4 + 6105x_2^4x_1^4 + 2332x_2^3x_1^4 \\
& + 606x_2^2x_1^4 + 11484x_2^5x_1^4 + 8008x_2^6 + 4368x_2^5 \\
& + 21x_1^8 + 11440x_2^7 + 12870x_2^8 + 35x_1^{16} + 11440x_2^9 + 35x_1^{12} \\
& + 1230x_2^2x_1^8 + 240x_2 \\
x_{11} = & \frac{1+x_{10}}{x_9} = \frac{1}{x_1^9x_2^4} \left[1 + 5x_1^8x_2^4 + 26x_1^8x_2^3 + 3x_1^{12}x_2^2 + 9x_1^{12}x_2 \right. \\
& + 7x_2^6x_1^4 + 9x_2 + 27x_1^4x_2 + 4x_1^4 + 36x_2^2 + 84x_2^3 \\
& + 126x_2^4 + 90x_2^4x_1^4 + 110x_2^3x_1^4 + 75x_2^2x_1^4 \\
& + 39x_2^5x_1^4 + 84x_2^6 + 126x_2^5 + 6x_1^8 + 36x_2^7 + 9x_2^8 \\
& \left. + x_1^{16} + x_2^9 + 4x_1^{12} + 42x_2^2x_1^8 + 27x_2x_1^8 \right] \\
x_{12} = & \frac{1+x_{11}^4}{x_{10}} = \frac{1}{x_1^{20}x_2^9} \left[1 + 1140x_2^{17} + 9x_1^{32} + 190x_2^{18} + 1452x_1^{16}x_2^9 + 19812x_1^{16}x_2^7 \right. \\
& + 7003x_1^{16}x_2^8 + 10572x_1^{12}x_2^{10} + 7920x_1^{20}x_2^5 \\
& + 3492x_1^{20}x_2^6 + 2360x_1^8x_2^{13} + 1210x_1^{24}x_2^4 \\
& + 12132x_1^8x_2^{12} + 2064x_1^{12}x_2^{11} + 8x_1^{12}x_2^{13} \\
& + 264x_1^8x_2^{14} + 44x_1^{24}x_2^6 + 376x_1^{24}x_2^5 \\
& + 215x_1^{12}x_2^{12} + 146x_1^{16}x_2^{10} + 4x_1^{16}x_2^{11} \\
& + 85x_1^{20}x_2^8 + 832x_1^{20}x_2^7 + x_2^{20} + 19x_1^{28}x_2^4 \\
& + 12x_1^8x_2^{15} + 232x_1^{28}x_2^2 + 99440x_1^8x_2^{10} \\
& + 35565x_1^{16}x_2^4 + 43424x_1^{16}x_2^5 + 19500x_1^{16}x_2^3 \\
& + 4200x_1^{20}x_2^2 + 1120x_1^{20}x_2 + 125924x_1^{12}x_2^6 \\
& + 113176x_1^{12}x_2^7 + 59695x_1^{12}x_2^4 + 24600x_1^{12}x_2^3 \\
& + 1860x_1^{24}x_2^3 + 102016x_1^{12}x_2^5 + 196680x_1^8x_2^6 \\
& + 247764x_1^8x_2^7 + 239580x_1^8x_2^8 + 177408x_1^8x_2^9 \\
& + 6860x_1^{16}x_2^2 + 1400x_1^{16}x_2 + 86268x_2^{12}x_1^4 \\
& + 298870x_2^8x_1^4 + 308880x_2^9x_1^4 + 255112x_2^{10}x_1^4 \\
& + 167440x_2^{11}x_1^4 + 184756x_2^{10} + 84x_1^{24} + 126x_1^{20} \\
& + 77520x_2^{13} + 167960x_2^{11} + 125970x_2^{12} + 38760x_2^{14} + 2064x_2^{15}x_1^4 \\
& + 10040x_2^{14}x_1^4 + 10610x_1^{20}x_2^4 + 8640x_1^{20}x_2^3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 35892 x_1^{16} x_2^6 + 1456 x_1^{24} x_2^2 + 560 x_1^{24} x_2 \\
& + 73598 x_1^{12} x_2^8 + 33880 x_1^{12} x_2^9 + 41220 x_1^8 x_2^{11} \\
& + 15504 x_2^{15} + 36 x_1^{28} + 4845 x_2^{16} + 265 x_2^{16} x_1^4 + 34160 x_2^{13} x_1^4 \\
& + x_1^{36} + 120 x_1^{28} x_2^3 + 160 x_1^{28} x_2 + 54044 x_1^8 x_2^4 \\
& + 119064 x_1^8 x_2^5 + 17820 x_1^8 x_2^3 + 6776 x_1^{12} x_2^2 \\
& + 1120 x_1^{12} x_2 + 141960 x_2^6 x_1^4 + 20 x_2 + 16 x_2^{17} x_1^4 \\
& + 231088 x_2^7 x_1^4 + 160 x_1^4 x_2 + 9 x_1^4 + 190 x_2^2 + 1140 x_2^3 \\
& + 4845 x_2^4 + 25340 x_2^4 x_1^4 + 6960 x_2^3 x_1^4 + 1336 x_2^2 x_1^4 \\
& + 68432 x_2^5 x_1^4 + 38760 x_2^6 + 15504 x_2^5 + 36 x_1^8 + 77520 x_2^7 \\
& + 125970 x_2^8 + 126 x_1^{16} + 167960 x_2^9 + 84 x_1^{12} + 4032 x_2^2 x_1^8 \\
& + 560 x_2 x_1^8 + 6 x_1^{32} x_2^2 + 20 x_2^{19} + 20 x_1^{32} x_2 \Big]
\end{aligned}$$

紙の無駄になるので途中で止めました。この場合は、たしかに「分母は単項式、分子は正の整数を係数とする多項式となる、分数式で表される」、「分母の単項式は互いに相異なる」ということは成り立っていますが、有限回で元に戻る、ということがどうも起こりそうにもない、ということをお納得していただけるかと思えます。

今度は、上の段から下に行くときも、下の段から上に行くときも両方共に

$$x_{i+1} = \frac{1 + x_i^2}{x_{i-1}}$$

とすることにします。その場合は、 $A_1^{(1)}$ 型とよばれています。

$$\begin{aligned}
x_3 &= \frac{x_2^2 + 1}{x_1}, \quad x_4 = \frac{x_3^2 + 1}{x_2} = \frac{x_1^2 + x_2^4 + 2x_2^2 + 1}{x_1^2 x_2}, \\
x_5 &= \frac{x_4^2 + 1}{x_3} = \frac{x_2^6 + 3x_2^4 + 2x_1^2 x_2^2 + 3x_2^2 + 2x_1^2 + x_1^4 + 1}{x_1^3 x_2^2}, \\
x_6 &= \frac{x_5^2 + 1}{x_4} = \frac{1}{x_2^3 x_1^4} \left[x_1^6 + 2x_1^4 x_2^2 + 3x_1^4 + 6x_1^2 x_2^2 + 3x_1^2 x_2^4 + 3x_1^2 + 4x_2^2 \right. \\
& \quad \left. + 4x_2^6 + x_2^8 + 1 + 6x_2^4 \right] \\
x_7 &= \frac{x_6^2 + 1}{x_5} = \frac{1}{x_2^4 x_1^5} \left[x_1^8 + 2x_1^6 x_2^2 + 4x_1^6 + 6x_1^4 + 9x_1^4 x_2^2 + 3x_2^4 x_1^4 + 12x_1^2 x_2^2 \right. \\
& \quad \left. + 4x_2^6 x_1^2 + 4x_1^2 + 12x_1^2 x_2^4 + 5x_2^8 + 1 + 10x_2^6 + x_2^{10} + 10x_2^4 + 5x_2^2 \right]
\end{aligned}$$

この場合も、「分母は単項式、分子は正の整数を係数とする多項式となる、分数式で表される」、「分母の単項式は互いに相異なる」ということは成り立っていますが、有限回で元には戻りません。

この節の最後に分岐がある場合の数遊びのルールを書きます。一番簡単な場合に説明しますが、一般の場合も同じです。

$$\begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \\ & x_4 & \end{array} \longrightarrow \begin{array}{ccc} x_5 & x_2 & x_6 \\ & x_7 & \end{array} \longrightarrow \begin{array}{ccc} x_5 & x_8 & x_6 \\ & x_7 & \end{array}$$

$$x_5 = \frac{1+x_2}{x_1}, \quad x_6 = \frac{1+x_2}{x_3}, \quad x_7 = \frac{1+x_2}{x_4},$$

$$x_8 = \frac{1+x_5x_6x_7}{x_2} = \frac{1+3x_2+3x_2^2+x_2^3+x_1x_3x_4}{x_1x_2x_3x_4},$$

の繰り返しで、以下

$$\begin{array}{ccc} \longrightarrow & x_9 & x_2 & x_{10} \\ & x_{11} & & \end{array} \longrightarrow \begin{array}{ccc} x_9 & x_{12} & x_{10} \\ & x_{11} & \end{array} \longrightarrow \begin{array}{ccc} x_{13} & x_{12} & x_{14} \\ & x_{15} & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \longrightarrow & x_{13} & x_{16} & x_{14} \\ & x_{15} & & \end{array} \longrightarrow \begin{array}{ccc} x_{17} & x_{16} & x_{18} \\ & x_{19} & \end{array} \longrightarrow \begin{array}{ccc} x_{17} & x_{20} & x_{18} \\ & x_{19} & \end{array}$$

$$x_9 = \frac{1+x_8}{x_5} = \frac{(1+x_2)^2+x_1x_3x_4}{x_2x_3x_4}, \quad x_{10} = \frac{1+x_8}{x_6} = \frac{(1+x_2)^2+x_1x_3x_4}{x_1x_2x_4},$$

$$x_{11} = \frac{1+x_8}{x_7} = \frac{(1+x_2)^2+x_1x_3x_4}{x_1x_2x_3},$$

$$x_{12} = \frac{1+x_9x_{10}x_{11}}{x_8} = \frac{1}{x_1x_2^2x_3x_4} \left[(1+x_2)^3 + (3x_2+2)x_1x_3x_4 + x_1^2x_3^2x_4^2 \right],$$

$$x_{13} = \frac{1+x_{12}}{x_9} = \frac{1+x_2+x_1x_3x_4}{x_1x_2}, \quad x_{14} = \frac{1+x_{12}}{x_{10}} = \frac{1+x_2+x_1x_3x_4}{x_2x_3},$$

$$x_{15} = \frac{1+x_{12}}{x_{11}} = \frac{1+x_2+x_1x_3x_4}{x_2x_4}, \quad x_{16} = \frac{1+x_{13}x_{14}x_{15}}{x_{12}} = \frac{1+x_1x_3x_4}{x_2},$$

$$x_{17} = \frac{1+x_{16}}{x_{13}} = x_1, \quad x_{18} = \frac{1+x_{16}}{x_{14}} = x_3, \quad x_{19} = \frac{1+x_{16}}{x_{15}} = x_4,$$

$$x_{20} = \frac{1+x_{17}x_{18}x_{19}}{x_{16}} = x_2$$

となります。今回は、元に戻りました。

実は、これらの現象を説明するクラスター代数、とよばれている理論が Fomin-Zelevinsky によって作られています。

S. Fomin and A. Zelevinsky, *Cluster algebras. I. Foundations*, J. Amer. Math. Soc. **15** (2002), no. 2, 497–529 (electronic).

———, *Cluster algebras. II. Finite type classification*, Invent. Math. **154** (2003), no. 1, 63–121.

A. Berenstein, S. Fomin, and A. Zelevinsky, *Cluster algebras. III. Upper bounds and double Bruhat cells*, Duke Math. J. **126** (2005), no. 1, 1–52.

———, *Cluster algebras. IV. Coefficients*, Compos. Math. **143** (2007), no. 1, 112–164.

また、この講座にあたっては

S. Fomin and N. Reading, *Root systems and generalized associahedra*, Geometric combinatorics, 63–131, IAS/Park City Math. Ser., **13**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2007.

を参考にしました。

今回の公開講座の目的は、この理論の一端を紹介して、‘数学におけるプラトン哲学’を紹介することです。より具体的には

- (1) 上に出てきた分数式の分母の単項式の意味は何か？
- (2) 有限回で元に戻る場合と、そうでない場合の違いはどこから来るのか？
- (3) 上に出てきた分数式の分子の多項式の意味は何か？

といった問題に解答を与えることです。

今、ご説明したように数式を扱う操作自身は高校生にも理解できるようなものなのに、上にあげたような性質の理解には深い理論が必要である、というのは不思議な気がしませんか？

初等的な証明がないのか？ というのは誰も持つ疑問だと思います。フェルマーの定理に、初等的な証明がないことは経験則からほぼ正しいと思われませんが、この問題に関しては、経験は積まれていませんから、初等的な証明があっても少しも不思議はありません。

また、今回は A_n 型のときの正 $(n + 3)$ 角形に対応するものが、他の型のときにどのような図形になるのかも紹介しません。

どうですか？ 夏休みに考えてみませんか？

2. ルート系

この節では前節であげた最初の問題、分数式は巨大でいささか理解がしにくいので、とりあえず分母にあらわれる単項式を理解することを目指します。

まず最初の変数の数が2個の場合を調べます。変換則は

$$(2.1) \quad x_{i+1} = \begin{cases} \frac{1 + x_i^d}{x_{i-1}} & (i \text{ が奇数のとき}) \\ \frac{1 + x_i}{x_{i-1}} & (i \text{ が偶数のとき}) \end{cases} \quad \text{もしくは} \quad x_{i+1} = \frac{1 + x_i^2}{x_{i-1}}$$

でした。

A_2 型 ($d = 1$) のとき

$$\begin{array}{cccc} x_1 & */x_1 & */x_2 & x_2 \\ & x_2 & */x_1x_2 & x_1 \end{array}$$

B_2 型 ($d = 2$) のとき

$$\begin{array}{cccc} x_1 & */x_1 & */x_1x_2 & x_1 \\ & x_2 & */x_1^2x_2 & */x_2 & x_2 \end{array}$$

G_2 型 ($d = 3$) のとき

$$\begin{array}{cccc} x_1 & */x_1 & */x_1^2x_2 & */x_1x_2 & x_1 \\ & x_2 & */x_1^3x_2 & */x_1^3x_2^2 & */x_2 & x_2 \end{array}$$

H_2 型 ($d = 4$) のとき

$$\begin{array}{cccc} x_1 & */x_1 & */x_1^3x_2 & */x_1^5x_2^2 & */x_1^7x_2^3 & */x_1^9x_2^4 & \dots \\ & x_2 & */x_1^4x_2 & */x_1^8x_2^3 & */x_1^{12}x_2^5 & */x_1^{16}x_2^7 & */x_1^{20}x_2^9 \end{array}$$

$A_1^{(1)}$ 型 のとき

$$\begin{array}{cccc} x_1 & */x_1 & */x_1^3x_2^2 & */x_1^5x_2^4 \dots \\ & x_2 & */x_1^2x_2 & */x_1^4x_2^3 \end{array}$$

前節の計算に比べて、だいぶ簡単になりましたが、今度はパターンが分かったでしょうか？最初の変数 x_1, x_2 は例外扱いして、 x_3, x_4 からスタートしなければいけません。だいたい(2.1)において $1+$ の部分を無視して計算すれば、分子の形を忘れても正しいことが分かるでしょうか？ $1+$ を忘れることにすると、計算はだいぶ楽になります。

あとの都合上、二つを並べてベクトルにして、

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \xrightarrow{s_2} \begin{bmatrix} x_5 \\ x_4 \end{bmatrix} \xrightarrow{s_1} \begin{bmatrix} x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} \xrightarrow{s_2} \begin{bmatrix} x_7 \\ x_6 \end{bmatrix} \xrightarrow{s_1} \begin{bmatrix} x_7 \\ x_8 \end{bmatrix} \xrightarrow{s_2} \dots$$

としてみます。ただし、 s_1, s_2 は最初の変数 x_1, x_2 で表される有理式のベクトル $\begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix}$ から新しい有理式のベクトルを作る演算

$$s_1: \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} f \\ f^d/g \end{bmatrix} \quad s_2: \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} g/f \\ g \end{bmatrix}$$

もしくは

$$s_1: \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} f \\ f^2/g \end{bmatrix} \quad s_2: \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} g^2/f \\ g \end{bmatrix},$$

で、もともとの操作の $1+$ の部分を除いたものです。この操作で単項式は単項式に移されますので、指数だけに着目しても構いません。つまり上の操作の \log を取ることにして、

$$s_1: \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} a \\ da - b \end{bmatrix} \quad s_2: \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} b - a \\ b \end{bmatrix},$$

もしくは

$$s_1: \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} a \\ 2a - b \end{bmatrix} \quad s_2: \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 2b - a \\ b \end{bmatrix},$$

です。こう書いてしまうと、これは行列の掛け算で表すことができます。すなわち、

$$s_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ d & -1 \end{pmatrix} \quad s_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{もしくは} \quad s_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \quad s_2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

です。

この操作は

$$s_1^2 = 1, \quad s_2^2 = 1,$$

を満たします。実際

$$s_1^2 \left(\begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix} \right) = s_1 \left(\begin{bmatrix} f \\ f^d/g \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} f \\ f^d/f^d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix}$$

ですし、 $s_2^2 = 1$ も同様です。行列で計算しても

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ d & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ d & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となります。しかし、先の操作で考えていたのは $\dots s_2 s_1 s_2 s_1$ という繰り返しです。これはどうなっているのでしょうか？

A_2, B_2, G_2 型の場合は、元々の変換ではそれぞれ 5 回、6 回、8 回繰り返すと元に戻っていました。今の場合、行列の積を計算してみると、

$$s_2 s_1 = \begin{pmatrix} d-1 & -1 \\ d & -1 \end{pmatrix}$$

で、 A_2 型 ($d=1$) のとき

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

B_2 型 ($d=2$) のとき

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}^4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

G_2 型 ($d=3$) のとき

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}^6 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となるのが計算によりチェックできます。繰り返すと恒等変換になる回数が、3, 4, 6 と二回ずつ少なくなっていますが、 $1+$ を省いてしまっても、繰り返すことには変わらないというわけです。

ところが H_2 型のとくにやってみると、

$$\begin{aligned} s_2 s_1 &= \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}, & (s_2 s_1)^2 &= \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 8 & -3 \end{pmatrix}, & (s_2 s_1)^3 &= \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 12 & -5 \end{pmatrix}, & (s_2 s_1)^4 &= \begin{pmatrix} 9 & -4 \\ 16 & -7 \end{pmatrix}, \\ (s_2 s_1)^5 &= \begin{pmatrix} 11 & -5 \\ 20 & -9 \end{pmatrix}, & (s_2 s_1)^6 &= \begin{pmatrix} 13 & -6 \\ 24 & -11 \end{pmatrix}, & (s_2 s_1)^7 &= \begin{pmatrix} 15 & -7 \\ 28 & -13 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

実際、 A のジョルダン標準形を求めてみると

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となるのが分かるので、 $s_2 s_1$ は何乗しても決して単位行列にはならないことが分かります。 $A_1^{(1)}$ 型ときには、

$$s_2 s_1 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

のジョルダン標準型は上と同じで、やはり $s_2 s_1$ は何乗しても決して単位行列にはならないことが分かります。

いささか天下りの的ですが、この行列をある直線に関する折り返し変換(以下鏡映とよびます)で表すことを考えます。二乗して1になること、固有値が1と-1である、というのがそのように期待する根拠です。ただし、 s_1, s_2 は直交行列ではありませんから、何か直交でない基底に関して鏡映が行列表示されて、上の形で与えられている、と考えるわけです。

まず A_2 の場合には、次で与えられることが分かります。つまり、 s_1 は α_1 に直交する直線に関する折り返し、 s_2 を α_2 に直交する直線に関する折り返しとすると、図から

$$s_1(\alpha_1) = -\alpha_1, \quad s_1(\alpha_2) = \alpha_1 + \alpha_2, \quad s_2(\alpha_1) = \alpha_1 + \alpha_2, \quad s_2(\alpha_2) = -\alpha_2$$

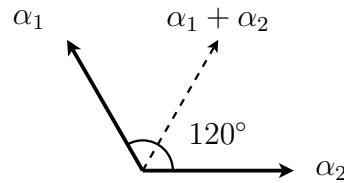


図 2. A_2

ですから、まとめて

$$s_1(a\alpha_2 + b\alpha_1) = a\alpha_2 + (a - b)\alpha_1, \quad s_2(a\alpha_2 + b\alpha_1) = (b - a)\alpha_2 + b\alpha_1,$$

となり、 a と b をまとめて縦ベクトル $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ として s_1, s_2 を行列表示すれば、上の行列の $d = 1$ の場合、すなわち A_2 型の行列になる、というわけです。このとき鏡映の合成 s_2s_1 は、原点を中心とした 120° の回転変換になります。したがって

$$(s_2s_1)^3 = \text{恒等変換}$$

となり、確かに合っています。

B_2 と G_2 の場合には、 α_1 と α_2 の長さを変える必要があるので複雑になりますが、答えは次の通りです。答えの求め方は、鏡映変換が内積を用いて

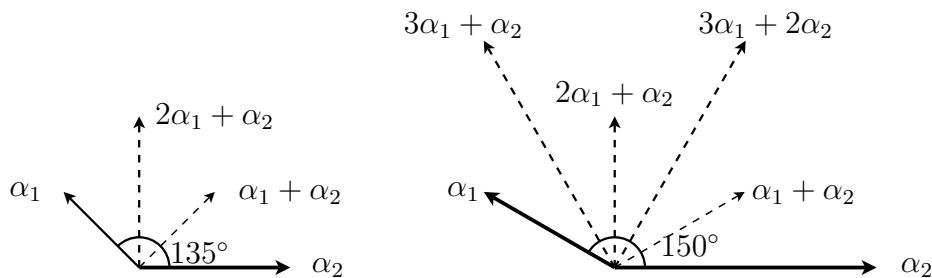


図 3. B_2 と G_2

$$s_1(\alpha_2) = \alpha_2 - \frac{2(\alpha_1, \alpha_2)}{(\alpha_1, \alpha_1)}\alpha_1, \quad s_2(\alpha_1) = \alpha_1 - \frac{2(\alpha_1, \alpha_2)}{(\alpha_2, \alpha_2)}\alpha_2$$

となることから

$$(2.2) \quad \frac{2(\alpha_1, \alpha_2)}{(\alpha_1, \alpha_1)} = -d, \quad \frac{2(\alpha_1, \alpha_2)}{(\alpha_2, \alpha_2)} = -1$$

となるので、上の図のようになることが計算できます。

では、 s_2s_1 はどうでしょうか? B_2 の場合には、 90° の回転であること、 G_2 の場合には 60° の回転であることが分かりますので、それぞれ $(s_2s_1)^4 = \text{恒等変換}$ 、 $(s_2s_1)^6 = \text{恒等変換}$ となることが計算しなくても、直ちに従います。

H_2 や $A_1^{(1)}$ 型の場合はどうでしょうか? 上の (2.2) の二つの式を掛けてみると、

$$4(\alpha_1, \alpha_2)^2 = d(\alpha_1, \alpha_1)(\alpha_2, \alpha_2)$$

となります。コーシー・シュワルツの不等式から、 $d > 4$ のときには、このような α_1, α_2 が決して取れないことが分かります。 $d = 4$ は、コーシー・シュワルツの不等式の等号成立の場合で、 α_1, α_2 は同じ方向を向いていないといけないことが分かりますが、それは上の行列 s_1, s_2 をあたえません。 $A_1^{(1)}$ 型のときも同様に、 s_1, s_2 を実現することができないことが分かります。

また、上の図の中に α_1, α_2 以外に、それらに s_1, s_2 を適用して得られるベクトルも書きました。この節の最初に行った計算と見比べてみると、 $x_1^b x_2^a$ と $b\alpha_1 + a\alpha_2$ によって、分母の式とベクトルが対応していることが見て取れます。

この観察から、 $s_2 s_1$ を何回か繰り返すと恒等変換になるということと、 s_1, s_2 を鏡映として実現できる、ということが対応しているらしい、という感じがお分かりになるでしょうか？

コーシー・シュワルツの不等式は、任意のベクトルの長さが正ということから従います。実際、二つのベクトル \vec{x}, \vec{y} に対して、

$$0 \leq (\vec{x} + t\vec{y}, \vec{x} + t\vec{y}) = (\vec{x}, \vec{x}) + 2t(\vec{x}, \vec{y}) + t^2(\vec{y}, \vec{y})$$

に注意すると、判別式 $D/4 = (\vec{x}, \vec{y})^2 - (\vec{x}, \vec{x})(\vec{y}, \vec{y}) \geq 0$ が、コーシー・シュワルツの不等式に他なりません。実は、 H_2 や $A_1^{(1)}$ 型は、ベクトルの長さが正とは限らない内積を考えると実現することができるのが分かります。つまり、内積が正定値である、ということと有限性に深い関係がある、というわけです。

上の考察を高次元に拡張するために、また天下りのですが、ルート系という概念を導入します。

定義 2.3. \mathbb{R}^n の中の有限個のベクトルからなる集合 Δ がルート系であるとは、

- (1) $\alpha \in \Delta$ が定める鏡映 s_α は Δ の元を Δ の元に移す。
- (2) $s_\alpha(\beta) = \beta - a_{\alpha\beta}\alpha$ とするとき $a_{\alpha\beta} = \frac{2(\alpha, \beta)}{(\alpha, \alpha)} \in \mathbb{Z}$ となる。
- (3) $\alpha \in \Delta$ のとき、 $m\alpha \in \Delta$ となる $m \in \mathbb{R}$ は、 $m = \pm 1$ しかない。

また、 Δ の元で生成されるベクトル空間は \mathbb{R}^n であるとも仮定します。そうでなければ、生成されるベクトル空間に取り換えればいいので、この仮定は本質的ではありません。また、(3) の条件は、今まで出てきませんでした。実はこの条件はそれほど本質的ではないことが知られていますので、ここではまあそんなものかと思ってください。 Φ の元 α のことをルートといいます。

Δ をルート系とするとき、 s_α ($\alpha \in \Delta$) で生成される \mathbb{R}^n の変換のなす群をワイル群といいます。いいかえれば

$$s_{\alpha_1} s_{\alpha_2} \cdots$$

という s_{α_1} たちを掛けてできるような行列の全体です。本節で今まで扱った計算例でいえば $s_1 s_2 s_1 \cdots$ という行列の全体です。

例 2.4. A_n 型のルート系を作ります。 \mathbb{R}^{n+1} の座標ベクトルを e_i ($i = 1, \dots, n+1$) で表します。

$$\Delta = \{e_i - e_j \mid i \neq j\}$$

とおきます。 $\alpha = e_i - e_j$ とし、 x_k を実数とするとき

$$s_\alpha \left(\sum_{k=1}^{n+1} x_k e_k \right) = \left(\sum_{k=1}^{n+1} x_k e_k \right) - (x_i - x_j)(e_i - e_j) = \sum_{k \neq i, j} x_k e_k + x_j e_i + x_i e_j$$

ですから、第 i 成分と第 j 成分を入れ替える、というのが s_α です。特に Δ が s_α で保たれることが分かります。ルート系の定義にある他の性質はもっと容易に確かめられます。

ワイル群は $(n+1)$ 文字の入れ換えの全体のなす対称群 S_{n+1} になります。

前節に調べた x_i のべきは 1 のままで、その代わり変数の数を増やした操作は、 A_n 型のルート系に対応します。ここで、 n は変数の数です。分母にあらわれる分数式が、 $i \leq j$ に対応して

$x_i x_{i+1} \cdots x_j$ となっているということを観察しましたが、上の $n = 2$ の場合の例のようにルートの半分と

$$x_i x_{i+1} \cdots x_j \longleftrightarrow e_j - e_i$$

という一対一の対応がわかります。半分になっていることは、 α がルートならば、(s_α を作用させることにより) $-\alpha$ も自動的にルートになるので、なんらかの意味で、半分をとることがより自然である、という理由にあります。また、あとで少し説明します。

例 2.5. B_n 型のルート系を作ります。 \mathbb{R}^n の座標ベクトルを e_i ($i = 1, \dots, n$) で表します。

$$\Delta = \{e_i - e_j, \pm(e_i + e_j), \pm e_i \mid i \neq j\}$$

とおきます。 $\alpha = e_i - e_j$ に対応する s_α は前と同様に第 i 成分と第 j 成分を入れ替えです。また、 $\alpha = e_i$ として、 x_k を実数とするとき

$$s_\alpha \left(\sum_{k=1}^n x_k e_k \right) = \left(\sum_{k=1}^n x_k e_k \right) - 2x_i e_i = \sum_{k \neq i} x_k e_k - x_i e_i$$

ですから、第 i 成分の符号を替える、というのが s_α です。 $\alpha = e_i + e_j$ のときには、

$$s_\alpha \left(\sum_{k=1}^n x_k e_k \right) = \left(\sum_{k=1}^n x_k e_k \right) - (x_i + x_j)(e_i + e_j) = \sum_{k \neq i, j} x_k e_k - x_j e_i - x_i e_j$$

です。これは、第 i 成分と第 j 成分を入れ替えて、符号を替えるというものです。 Δ が s_α で保たれること、ルート系の定義にある他の性質を満たすことが確かめられます。

ワイル群は n 文字の入れ換えの全体のなす対称群 S_n と、各成分の符号の入れ換え $(\pm 1)^{n-1} = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{n-1}$ の半直積になります。

例 2.6. C_n 型のルート系を作ります。 \mathbb{R}^n の座標ベクトルを e_i ($i = 1, \dots, n$) で表します。

$$\Delta = \{e_i - e_j, \pm(e_i + e_j), \pm 2e_i \mid i \neq j\}$$

とおきます。 B_n 型との違いは、最後が e_i であるか、 $2e_i$ であるかだけで、特にワイル群は同じになります。

例 2.7. D_n 型のルート系を作ります。 \mathbb{R}^n の中で

$$\Delta = \{e_i - e_j, \pm(e_i + e_j) \mid i \neq j\}$$

とおきます。 s_α の計算は、すでに与えたものと同じです。各成分の符号を入れ換えるときに、偶数個入れ換えるものしか出てこないことが分かり、ワイル群は S_n と同じになります。

ルート系は、リー環の分類に関係していますので、たくさんの教科書で取り扱われています。日本語のものとして

佐武一郎, リー環の話, 日評数学選書, 日本評論社, 2001

を挙げておきます。基本的には線形代数さえ理解していれば、難しいことなしにいろいろな結果の証明を与えることができるのですが、ここでは上の本などを参考にさせていただくことにして、証明を与えることは止めて、いくつかの性質を列挙するにとどめます。

- \mathbb{R}^n の中にルート $\alpha \in \Delta$ と直交する超平面をすべて書く。すると \mathbb{R}^n は(有限個の)いくつかの部屋に分けられる。(ワイルの部屋とよばれる。)このとき、ワイル群の元と、ワイルの部屋が一对一に対応する。実際、 s_α は、ワイルの部屋を別のワイルの部屋に移すので、これを繰り返すことによって、ワイル群の元はワイルの部屋を別の部屋に移す。一つの部屋を出発点を選んで、それを単位元に対応させ、これをワイル群の元 w で移したものを、 w と対応させることによって一对一対応ができる。

このようにワイル群は有限群であることが、最初にやった操作が有限回で元に戻ることに関係しているということが期待されるわけです。実際、Fomin-Zelevinsky の二番目の論文では、ルート系と有限回の操作で元に戻るクラスター代数が一对一に対応していることが証明されています。

- 上のようにワイルの部屋を一つ出発点に選ぶ。このとき Δ から n (= Δ が入っているユークリッド空間の次元)個の元 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ をうまく選んでくると、その部屋は

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid (\alpha_i, x) > 0, i = 1, \dots, n\}$$

と表される。このようにして選ばれた α_i を単純ルートという。このとき $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ は線型空間 \mathbb{R}^n の基底となる。

A_n, B_n, C_n, D_n のときに単純ルート(の例)として、

$$A_n : e_i - e_{i+1} \quad (i = 1, \dots, n)$$

$$B_n : e_i - e_{i+1} \quad (i = 1, \dots, n-1), e_n$$

$$C_n : e_i - e_{i+1} \quad (i = 1, \dots, n-1), 2e_n$$

$$D_n : e_i - e_{i+1} \quad (i = 1, \dots, n-1), e_{n-1} + e_n$$

が取れることが知られています。

- 任意のルート $\alpha \in \Delta$ を

$$\alpha = \sum_{i=1}^n m_i \alpha_i$$

と表すとき、すべての m_i が正か、すべての m_i が負かのいずれかになる。すべて正になるとき α は正ルートという。

- 任意のルート α は、ある単純ルート α_i にワイル群の元を作用させることで得られる。
- ワイル群は、単純ルートに対応する鏡映で生成される。
- 上の二つを合わせて、任意のルートは

$$\alpha = s_{i_1} s_{i_2} \cdots s_{i_{l-1}}(\alpha_{i_l})$$

という形に表されます。ここで、 i_1, \dots, i_l は、1から n までの数で、単純ルート α_i に対応する鏡映を s_i で表しました。

$\alpha_1, \dots, \alpha_n$ を基本ルートとするときに、カルタン行列 $A = (a_{ij})$ を

$$a_{ij} = \frac{2(\alpha_i, \alpha_j)}{(\alpha_i, \alpha_i)}$$

によって定義します。このとき、次の基本定理が成り立ちます。

- ルート系は、カルタン行列で分類される

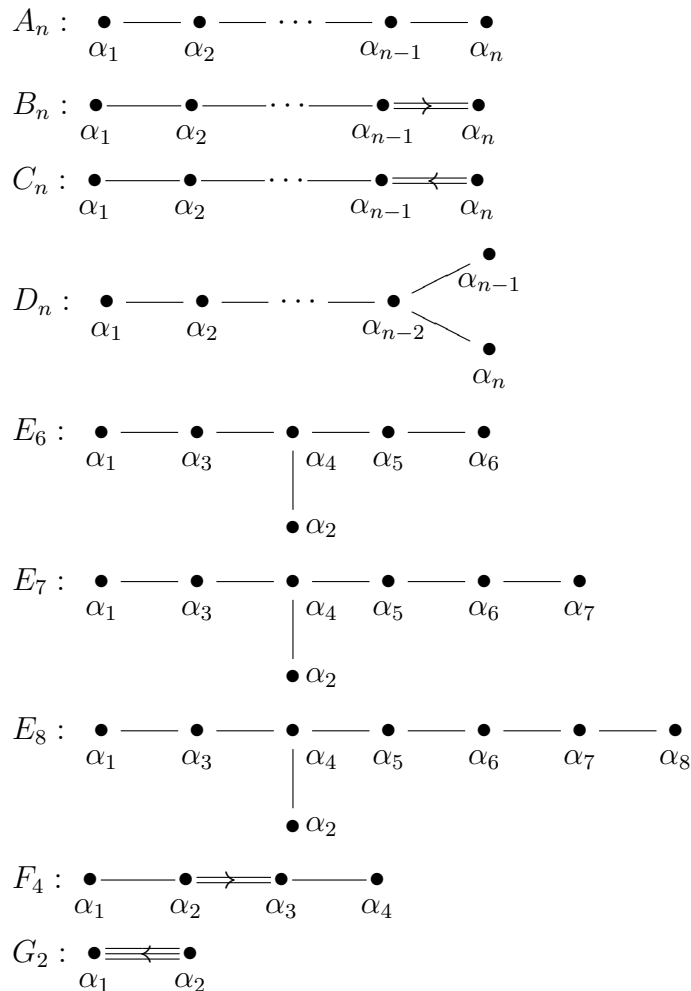
つまり、ふたつのルート系が同じための必要十分条件は、カルタン行列が適当に α_i の番号をつけかえると同じになる、ということです。

さらに、カルタン行列をすべて分類するために、ディンキン図式とよばれるグラフを次のように定めます。カルタン行列の成分をみると、対角成分は $a_{ii} = 2$ となりますが、 $i \neq j$ に対しては、 $a_{ij} = 0, -1, -2, -3$ のいずれかとなることが分かります。(A_2, B_2, G_2 型の例を参照せよ。) このとき、

- (1) 1 から n までの頂点を用意する。
- (2) $a_{ij} = 0, -1, -2, -3$ に応じて、次のように線と矢印を書く。



このとき、ディンキン図式は、次のもの (を有限個集めたもの) になる:



最初の四つ A_n, B_n, C_n, D_n については、すでに紹介しました。この四つは無限系列として、無限個の n に対応して例がありますが、そのほかの E_6 から G_2 までは、例外型ルート系とよばれて、有限個しかありません。

定理 2.8 (Fomin-Zelevinsky). (1) 各ルート系に対応するディンキン図形の頂点の上に変数を並べて、第一節のように数式の変換を行うと、有限回で元に戻る。また、逆に有限回で元に戻るなら、それは、ディンキン図形でなければならない。

(2) 途中に現れる分数式の分母は、

$$\prod_{i=1}^n x_i^{m_i} \longleftrightarrow \sum_{i=1}^n m_i \alpha_i$$

という対応によって、正ルートと一対一に対応する。

前節の最後に紹介したのは D_4 型ですが、このときに正ルートと分母の単項式が一対一に対応していることをチェックしてみてください。

実は、例外型の E_6, E_7, E_8 は正多面体と深い関係があることが知られています。講義の案内で、正多面体とディンキン図形には関係がある、と書いたことです。残念ながらこれを説明する時間がないので、今回は表層的な関係を観察して終わることにします。これらのディンキン図式には辺が三つに分岐している頂点が一個あります。そこから両端までの点の個数をその点も含めて数えてみると、

$$E_6 : 3 \text{ 個と } 3 \text{ 個}, \quad E_7 : 3 \text{ 個と } 4 \text{ 個}, \quad E_8 : 3 \text{ 個と } 5 \text{ 個}$$

となっています。正 n 面体に、面は正 a 角形、一つの頂点に b 個の面が集まっているとして表を作ってみると、となって、 (a, b) の組が、両端までの点の個数と関係していることが分かり

正 n 面体	正 a 角形	b 個の面
4	3	3
6	4	3
8	3	4
12	5	3
20	3	5

ます。また、正 6 面体と 8 面体、正 12 面体と 20 面体は、数が入れ替わっているだけで、出てくる数の組としては同じになっていますが、これらの正多面体は同じ対称性をもち、互いに双対の関係にあることから、これは極めて自然なことです。また、上の関係も単なる数合わせではなく、ディンキン図式の分類の証明と正多面体の分類の証明の両方で、上の数が現れます。より詳しいことを知りたい方には、

松澤淳一, 特異点とルート系, すうがくの風景 6, 朝倉書店

をお薦めします。

3. 簾の表現論

線形代数の、一番最初の方で、次の問題を取り扱います。

$m \times n$ 行列 A に $m \times m$ 可逆行列 P , $n \times n$ 可逆行列 Q を左と右から PAQ と掛けることにより、なるべく簡単な形(標準型)に変形せよ。

もしくは、行列を行(列)に関して基本変形することによって簡単な形にせよ、というように説明されることもあります。答えは、左上から対角線に1を並べて、

$$\begin{array}{l} r \text{ 列} \quad (n-r) \text{ 列} \\ r \text{ 行} \\ (m-r) \text{ 行} \end{array} \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

の形にすることができ、並んだ1の個数を A の階数という、というのが線形代数で、ほとんど一番初めに習うことです。ここで、標準型とは、どんな行列もそのような形に変形することができ、またその形はただ一つに決まるときをいいます。あるいは、二つの異なる標準型はどんな P, Q を掛けても移り合わない、ということもできます。

あとの都合により、抽象的な線形空間の言葉を使うことによって、上の問題を言い換えます。

V_1, V_2 を線形空間とし、

$$f: V_1 \rightarrow V_2$$

を線形写像とします。 V_1, V_2 の基底を適当に取ることによって、 f をなるべく簡単な形に行列表示せよ。

定義 3.1. A が直既約であるとは、上の変形でブロック行列

$$\begin{array}{l} r \text{ 列} \quad (n-r) \text{ 列} \\ s \text{ 行} \\ (m-s) \text{ 行} \end{array} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

の形にできないときをいいます。

上の抽象線形空間の言葉で言い直すと、 f が直既約であるとは、 $V_1 = V_1' \oplus V_1'', V_2 = V_2' \oplus V_2''$ という直和分解で、

$$f(V_1') \subset V_2', \quad f(V_1'') \subset V_2''$$

となるようなものは、自明なもの、すなわち $V_1' = 0, V_2' = 0$ もしくは、 $V_1'' = 0, V_2'' = 0$ しかありえないときをいいます。

直既約なものがすべて分かれば、それを並べて一般の標準型が得られますから、標準型の分類には、直既約な場合だけを扱えば十分となります。抽象ベクトル空間の言葉で書いてみると、三通り

$$\mathbb{C} \rightarrow 0, \quad 0 \rightarrow \mathbb{C}, \quad \mathbb{C} \xrightarrow{\text{恒等写像}} \mathbb{C}$$

となります。最初の二つは、写像はもちろん0です。行列の言葉で表すと、前の二つは行がないものや、列がないものを考えないといけないので、考えにくいですが、一般の標準型を与えるためにはそれらも含めておかないといけないことは、最後のものを並べるだけでは正方行列しか出てこないことから分かります。

また、

$m \times m$ 行列 A に $m \times m$ 可逆行列 P を左と右から PAP^{-1} と掛けることにより、なるべく簡単な形(標準型)に変形せよ。

という問題への答えとして、ジョルダン標準型にすることができる、ということも線形代数のどこかで習います。これも

V を線形空間 $f: V \rightarrow V$ を線形変換とするとき、 V の基底をうまくとって、 f をなるべく簡単な形に行列表示せよ。

という問題に言い換えられます。この場合も A が直既約であるとは、変形でブロック行列にならないこと、あるいは $V = V' \oplus V''$ という直和分解で

$$f(V') \subset V', \quad f(V'') \subset V''$$

となるものは、自明なもの、すなわち $V' = 0$ あるいは $V'' = 0$ しかありえないときをいいます。この問題のときは、直既約な標準型は有限個ではなく

$$\begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & 0 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \alpha & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

という連続パラメータ $\alpha \in \mathbb{C}$ を持ちます。

上の問題を一般化したのが、籓の表現の分類という、次のような問題です。まず、(有限な)有向グラフを与えます。グラフというのは頂点と辺からなる、下のような図形で、有向という意味は、辺に向きが入っているということです。

$$h_1 \curvearrowright 1 \xrightarrow{h_2} 2 \xleftarrow{h_3} 3$$

このようなものを籓とよびます。頂点の集合を I で、辺の集合を E であらわし、 $h \in E$ に対し、 h の始点を $o(h)$ 、終点を $i(h)$ で表すことにします。

$$o(h) \xrightarrow{h} i(h)$$

籓が与えられたとき、各頂点に有限次元のベクトル空間を置き、各辺に向きに沿って線形写像を置きます。上の例ですと、 V_1, V_2, V_3 がベクトル空間で、 $f_{h_1}, f_{h_2}, f_{h_3}$ が線形写像です。

$$f_{h_1} \curvearrowright V_1 \xrightarrow{f_{h_2}} V_2 \xleftarrow{f_{h_3}} V_3$$

このようなものを籓の表現といいます。記号で、 (V, f) で表しましょう。 V は $V_i (i \in I)$ というベクトル空間の集まりで、 f は $f_h: V_{o(h)} \rightarrow V_{i(h)}$ という線形写像の集まりです。(次数付きベクトル空間ということばを用いると、もう少しすっきりと表すことができますのですが、実質的には同じことなので、ここでは用いないことにします。)

二つの籓の表現 $(V, f), (V', f')$ が同型であるとは、各頂点 $i \in I$ 毎に線形同型 $\varphi_i: V_i \rightarrow V'_i$ が存在して、

$$f'_h \varphi_{o(h)} = \varphi_{i(h)} f_h$$

が、すべての $h \in E$ について成り立つときをいいます。

$$\begin{array}{ccccc} f_{h_1} \curvearrowright & V_1 & \xrightarrow{f_{h_2}} & V_2 & \xleftarrow{f_{h_3}} & V_3 \\ & \downarrow \varphi_1 & & \downarrow \varphi_2 & & \downarrow \varphi_3 \\ f'_{h_1} \curvearrowright & V'_1 & \xrightarrow{f'_{h_2}} & V'_2 & \xleftarrow{f'_{h_3}} & V'_3 \end{array}$$

のようにあらわすと、上の段で f_h で移ってから下へ φ_i で移るのと、 φ_i で下の段に移ってから、 f'_h で移るのが結果が同じである、というのが上の式が表す意味です。

籓の表現が直既約であるという概念も、今までと同様に定義されます。上の二つの問題を一般化して、

問. 籓を与えたとき、その直既約な表現を、それと同型で簡単な‘標準型’に直せ。

この節の最初に与えた、階数で標準型が決まる問題は、籓

$$1 \longrightarrow 2$$

に対する、上の問題と考えることができますし、ジョルダン標準型に対応した問題は、

$$\begin{array}{c} \circlearrowleft 1 \end{array}$$

に対する上の問題と考えることができます。

これは、線形代数の標準型を少し複雑にした問題のように思えますが、実は前節で説明したルート系と密接にかかわっていることが、知られています。

定理 3.2 (ガブリエル 1972). (1) 直既約な表現の同型類が有限個しかないことと、籓の矢印の向きを忘れたグラフが、ADE 型のディンキン図式であることは同値である。
 (2) 上のように籓は ADE 型のディンキン図式の辺に、向きをいれたものであるとする。籓の直既約な表現を V とするとき

$$\sum_{i \in I} \dim V_i \times \alpha_i$$

は、対応するルート系の正ルートである。逆に、正ルート α に対し、上の式に対応するような直既約な表現が、同型なものを同じとみなしてただ一つ存在する。

$\sum_{i \in I} \dim V_i \times \alpha_i$ を表現 (V, f) の次元ベクトルといい、 $\overrightarrow{\dim}(V, f)$ で表わします。例をあげます。 A_n 型のディンキン図式に向きをいれた籓を考えます。このとき正ルートは、

$$e_i - e_j = \alpha_i + \alpha_{i+1} + \cdots + \alpha_{j-1}$$

($i < j$) で与えられていたことを思い出すと、対応する直既約表現は

$$\begin{array}{cccccccccccccccc} 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \cdots & \longleftarrow & 0 & \longleftarrow & \mathbb{C} & \xleftarrow{\text{id}} & \mathbb{C} & \xrightarrow{\text{id}} & \cdots & \xleftarrow{\text{id}} & \mathbb{C} & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \cdots & \longleftarrow & 0 \\ & & 1 & & 2 & & \cdots & & i-1 & & i & & i+1 & & \cdots & & j & & j+1 & & \cdots & & n \end{array}$$

で与えられます。下の小さな数字は頂点の番号で、頂点 i から j までに一次元のベクトル空間 \mathbb{C} が乗っており、その間の線型写像はすべて恒等写像というのが上の意味です。

この定理の証明は

I. N. Bernšteĭn, I. M. Gel'fand and V. A. Ponomarev, *Coxeter functors, and Gabriel's theorem*, Uspehi Mat. Nauk, **28** (1973), 19–33.

において簡略化されました。そこで重要な役割を果たしたのが、鏡映変換を籓の表現に‘持ち上げた’鏡映関手です。これを簡単に紹介します。日本語で読める文献としては、

草場公邦, 行列特論, 基礎数学選書 **21**, 裳華房

があります。

(V, f) を簞の表現とし、頂点 i は、sink すなわち、 i とつながっている辺は、すべて i に向かっており、 i を出発点にするような辺は存在しないと仮定します。簡単のために次の図のように二つの頂点 j, k から i に向かって辺があるとします。したがって次のように i の回りに線形空間と線形写像が並んでいます。

$$V_j \xrightarrow{f_1} V_i \xleftarrow{f_2} V_k$$

このとき、これらをまとめて

$$V_j \oplus V_k \xrightarrow{[f_1 \ f_2]} V_i$$

とし、この線形写像を α で表します。そこで、線形空間を

$$V'_i = \text{Ker } \alpha = \{v = v_j \oplus v_k \in V_j \oplus V_k \mid \alpha(v) = 0\}, \quad V'_j = V_j \quad j \neq i \text{ のとき}$$

で定義し、さらに

$$f'_1: V'_i \rightarrow V'_j, \quad f'_2: V'_i \rightarrow V'_k$$

を、

$$\text{Ker } \alpha \ni v = (v_j, v_k) \mapsto v_j \in V_j \quad \text{と} \quad v_k \in V_k$$

によって定義します。すると、 (V', f') は、 i に向かっていてる辺の向きを逆にした簞の表現になっています。このように簞の表現 (V, f) から、新しい簞の表現 (V', f') が定義されます。これを $(V', f') = \Phi_i^+(V, f)$ と表します。この定義は、いわゆる関手の性質を持っています。詳しくは説明しませんが、特に二つの同型な表現を鏡映関手で移すと、同型な表現に表現に移されます。

また、頂点 i が source、すなわち i とつながっている辺は、すべて i から出ているとします。上と同様に

$$V_j \xleftarrow{f_1} V_i \xrightarrow{f_2} V_k$$

で線形写像を表します。このとき

$$\beta: V_i \xrightarrow{f_1 \oplus f_2} V_j \oplus V_k$$

とおき、

$$V'_i = \text{Coker } \beta = V_j \oplus V_k / \text{Im } \beta$$

とし、

$$f'_1: V_j \rightarrow V'_i, \quad f'_2: V_k \rightarrow V'_i$$

を

$$V_j \ni v_j \mapsto (v_j \oplus 0) / \text{Im } \tau \quad \text{と} \quad V_k \ni v_k \mapsto (0 \oplus v_k) / \text{Im } \tau$$

によって定義します。これも辺の向きを逆にした簞の新しい表現を定めます。これを $\Phi_i^-(V, f) = (V', f')$ で表します。これらの Φ_i^+, Φ_i^- が、鏡映関手です。

このとき次の仮定

仮定 1: (i が sink のとき) α は全射である。

仮定 2: (i が source のとき) β は単射である。

を考えます。この仮定は自然なものです。実際、 σ の像 $\text{Im } \sigma$ を頂点 i だけに線形空間がのつた籠の表現と見ると、 (V, f) は $\text{Im } \sigma \oplus (V', f')$ と直和分解します。 $(V'$ は、 i 以外の頂点では V と同じで、頂点 i では、 V_i の補空間を取ったもの) したがって、特に (V, f) が直既約であるとしますと、 (V, f) は頂点 i に一次元の線形空間がのつたものでない限り、上の仮定を満たしています。

また、 $(V', f') = \Phi_i^+(V, f)$ に関して β を考えると、定義から $V'_i = \text{Ker } \alpha \subset V_j \oplus V_k$ という包含写像に他なりません。よって、 (V', f') は仮定 2 を満たします。同様に $(V', f') = \Phi_i^-(V, f)$ は仮定 1 を必ず満たすことも分かります。

次に Φ_i^- と Φ_i^+ の合成写像 (正確には合成関手) $\Phi_i^- \circ \Phi_i^+(V, f)$ を考えます。上で注意したように、 β は包含写像 $V'_i = \text{Ker } \alpha \subset V_j \oplus V_k$ でしたから、

$$\text{Coker } \beta = V_j \oplus V_k / \text{Ker } \alpha \cong \text{Im } \alpha$$

となります。最後の同型は、 $v_j \oplus v_k$ に対して $\alpha(v_j \oplus v_k) \in \text{Im } \alpha$ を対応させる写像について線形代数の準同型定理を適用して得られます。特に、 (V, f) に対して仮定 1 が成り立つとすると、 $\Phi_i^- \circ \Phi_i^+(V, f)$ は (V, f) と同型になります。

例で計算してみましょう。 A_3 型のディンキン図式に

$$\bullet \rightarrow \bullet \leftarrow \bullet$$

という向きを入れ、真ん中の頂点 2 において Φ_2^+ を考えます。まず、

$$0 \rightarrow \mathbb{C} \leftarrow 0$$

という籠の表現 (これは通常 S_2 と書かれます) に対して Φ_2^+ を適用すると、 $V_1 \oplus V_3 = 0$ なので、 $\Phi_2^+(S_2) = 0$ となります。すべての頂点の上に 0 がのっているもののことです。

次に

$$\mathbb{C} \rightarrow 0 \leftarrow 0$$

に適用してみると、 $V_1 \oplus V_3 = \mathbb{C}$, $V_2 = 0$ なので、

$$\Phi_2^+(\mathbb{C} \rightarrow 0 \leftarrow 0) = (\mathbb{C} \xleftarrow{\text{id}} \mathbb{C} \rightarrow 0)$$

です。ここで左側の矢印は、恒等写像となります。 $0 \rightarrow 0 \leftarrow \mathbb{C}$ の場合も同様です。

また

$$\mathbb{C} \xrightarrow{\text{id}} \mathbb{C} \leftarrow 0$$

に適用してみます。左側の矢印は恒等写像であるとします。すると、 $V_1 \oplus V_3 = \mathbb{C}$, $V_2 = \mathbb{C}$ で、 α は恒等写像になりますので $\text{Ker } \alpha = 0$ であり、

$$\Phi_2^+(\mathbb{C} \xrightarrow{\text{id}} \mathbb{C} \leftarrow 0) = (\mathbb{C} \leftarrow 0 \rightarrow 0)$$

となります。

最後に

$$\mathbb{C} \xrightarrow{\text{id}} \mathbb{C} \xleftarrow{\text{id}} \mathbb{C}$$

の場合を考えてみます。右側の矢印も左側の矢印も両方とも恒等写像であると仮定します。すると、 $V_1 \oplus V_3 = \mathbb{C}^2$, $V_2 = \mathbb{C}$ で、 α は行列で表すと $(1 \ 1)$ です。したがって、 $\text{Ker } \alpha$ は $x \oplus (-x) \in V_1 \oplus V_3$ という元からなり、 \mathbb{C} と同型になります。したがって、

$$\Phi_2^+(\mathbb{C} \xrightarrow{\text{id}} \mathbb{C} \xleftarrow{\text{id}} \mathbb{C}) = (\mathbb{C} \xleftarrow{\text{id}} \mathbb{C} \xrightarrow{\text{id}} \mathbb{C})$$

であり、写像はやはり両方とも恒等写像となります。

定理 3.2 の (2) に出てきた次元ベクトル

$$\overrightarrow{\dim}(V, f) = \sum_j \dim V_j \cdot \alpha_j$$

について、 Φ_i^+ を適用した前後で変化を見てみます。添字は、 i は固定された頂点なので、 j に変えました。頂点 $j \neq i$ のときは $\dim V_j$ の値は変わりません。仮定 1 は成り立っているものとします。すると、頂点 i で α が全射であることから

$$\dim V'_i = \dim \text{Ker } \alpha = \dim V_j + \dim V_k - \dim V_i$$

となります。今は、 i と結ばれている頂点が j, k であると仮定していましたが、より一般にカルタン行列の成分の (-1) 倍 $-a_{ij}$ が頂点 i と j を結ぶ辺の数であること (今の場合は 0 か 1 である) を思い出すと、一般には

$$\dim V'_i = \dim \text{Ker } \alpha = - \sum_{j \neq i} a_{ij} \dim V_j - \dim V_i$$

となります。したがって

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\dim}(V', f') &= \sum_j \dim V'_j \cdot \alpha_j = \sum_{j \neq i} \dim V_j \cdot \alpha_j - \left(\sum_{j \neq i} a_{ij} \dim V_j + \dim V_i \right) \alpha_i \\ &= \sum_j \dim V_j \cdot \alpha_j - \left(\sum_{j \neq i} a_{ij} \dim V_j + 2 \dim V_i \right) \alpha_i \\ &= \sum_j \dim V_j \cdot \alpha_j - \left(\sum_j a_{ij} \dim V_j \right) \alpha_i \\ &= \overrightarrow{\dim}(V, f) - (\overrightarrow{\dim}(V, f), \alpha_i) \alpha_i \\ &= s_i(\overrightarrow{\dim}(V, f)) \end{aligned}$$

が成り立ちます。 s_i は頂点 i に対応するルート α_i に関する鏡映変換です。このようにして Φ_i^+ は、鏡映変換 s_i を籠の表現に持ち上げたものであるということが分かりました。 Φ_i^- の場合にも同様です。

仮定が満たされない場合は、鏡映関手はうまく動きませんので、上の議論だけでは不十分ですが、だいたい次のことが示されます

正ルート α を $\alpha = s_{i_1} s_{i_2} \cdots s_{i_{l-1}}(\alpha_{i_l})$ と表わしたときに、

$$\Phi_{i_1}^+ \Phi_{i_2}^+ \cdots \Phi_{i_{l-1}}^+(S_{i_l})$$

が、定理 3.2 において α に対応する直既約表現になる。

ちなみに、この構成においてグラフが ADE 型のディンキン図式であるという仮定はそれほど重要ではありません。一般の籠に対して、鏡映変換が定義されます。ただし、直既約な表現が有限個しかないことは一般には成立せず、すべての直既約な表現が上のようなやり方で得られる、ということも成り立ちません。

以上、いよいよ第一節の数遊びに出てくる分数式の分子を説明できる準備が整いました。

定義 3.3. 籠の表現 (V, f) が与えられたとします。その部分表現とは、各線型空間 V_i の部分空間 S_i の集まりであって、 $f_h(S_{o(h)}) \subset S_{i(h)}$ を満たすもののことをいいます。

たとえば

$$\mathbb{C} \xrightarrow{\text{id}} \mathbb{C} \xleftarrow{\text{id}} \mathbb{C}$$

を考えます。頂点にのっている線型空間は1次元なので、部分空間としては0次元か、1次元か、二通りしかありません。さらに、真ん中の部分ベクトル空間 S_2 を0と選ぶと、両端の部分ベクトル空間としては0を取らざるを得ません。それ以外、真ん中を \mathbb{C} と選ぶと、条件はどの場合も満たされます。したがって部分表現は

$$0 \rightarrow 0 \leftarrow 0, \quad 0 \rightarrow \mathbb{C} \leftarrow 0, \quad \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \leftarrow 0, \quad 0 \rightarrow \mathbb{C} \leftarrow \mathbb{C}, \quad \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \leftarrow \mathbb{C}$$

と5種類あります。

天下りですが、部分表現 S に対して、

$$x^{\overrightarrow{\dim S} \cdot R} = \prod_i x_i^{\sum_{j \rightarrow i} \dim S_j}, \quad x^{(\overrightarrow{\dim V} - \overrightarrow{\dim S}) \cdot R^t} = \prod_i x_i^{\sum_{j \leftarrow i} \dim V_j - \dim S_j}$$

$$x^{\overrightarrow{\dim S} \cdot R + (\overrightarrow{\dim V} - \overrightarrow{\dim S}) \cdot R^t} = x^{\overrightarrow{\dim S} \cdot R} x^{(\overrightarrow{\dim V} - \overrightarrow{\dim S}) \cdot R^t}$$

とおきます。 $j \rightarrow i$, $j \leftarrow i$ は j から i への矢印、 i から j への矢印をそれぞれ表します。上の例の場合に計算してみると、それぞれ

$$\begin{aligned} x^{\overrightarrow{\dim S} \cdot R} &= 1, & x^{(\overrightarrow{\dim V} - \overrightarrow{\dim S}) \cdot R^t} &= x_1 x_3, & x^{\overrightarrow{\dim S} \cdot R + (\overrightarrow{\dim V} - \overrightarrow{\dim S}) \cdot R^t} &= x_1 x_3, \\ x^{\overrightarrow{\dim S} \cdot R} &= 1, & x^{(\overrightarrow{\dim V} - \overrightarrow{\dim S}) \cdot R^t} &= 1, & x^{\overrightarrow{\dim S} \cdot R + (\overrightarrow{\dim V} - \overrightarrow{\dim S}) \cdot R^t} &= 1, \\ x^{\overrightarrow{\dim S} \cdot R} &= x_2, & x^{(\overrightarrow{\dim V} - \overrightarrow{\dim S}) \cdot R^t} &= 1, & x^{\overrightarrow{\dim S} \cdot R + (\overrightarrow{\dim V} - \overrightarrow{\dim S}) \cdot R^t} &= x_2, \\ x^{\overrightarrow{\dim S} \cdot R} &= x_2, & x^{(\overrightarrow{\dim V} - \overrightarrow{\dim S}) \cdot R^t} &= 1, & x^{\overrightarrow{\dim S} \cdot R + (\overrightarrow{\dim V} - \overrightarrow{\dim S}) \cdot R^t} &= x_2, \\ x^{\overrightarrow{\dim S} \cdot R} &= x_2^2, & x^{(\overrightarrow{\dim V} - \overrightarrow{\dim S}) \cdot R^t} &= 1, & x^{\overrightarrow{\dim S} \cdot R + (\overrightarrow{\dim V} - \overrightarrow{\dim S}) \cdot R^t} &= x_2^2 \end{aligned}$$

となります。第一節で計算した A_3 型の数遊びに出てきた分数式で、分母に正ルート $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ に対応する単項式 $x_1 x_2 x_3$ が出てくるのは、 x_6 です。そのときの分子を見てみると、

$$x_2^2 + 2x_2 + 1 + x_1 x_3$$

です。上の式と見比べてみると $x^{\overrightarrow{\dim S} \cdot R + (\overrightarrow{\dim V} - \overrightarrow{\dim S}) \cdot R^t}$ をすべて足し合わせたものと等しいことがわかります。(x_2 は二回出てきますが、部分表現としては違うものを数えています。)

もう一つ、

$$\mathbb{C} \xrightarrow{\text{id}} \mathbb{C} \leftarrow 0$$

の部分表現のときに調べてみましょう。部分表現は

$$0 \rightarrow 0 \leftarrow 0, \quad 0 \rightarrow \mathbb{C} \leftarrow 0, \quad \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \leftarrow 0$$

の三種類です。上の単項式を計算してみると、それぞれ

$$\begin{aligned} x^{\overrightarrow{\dim S} \cdot R} &= 1, & x^{(\overrightarrow{\dim V} - \overrightarrow{\dim S}) \cdot R^t} &= x_1 x_3, & x^{\overrightarrow{\dim S} \cdot R + (\overrightarrow{\dim V} - \overrightarrow{\dim S}) \cdot R^t} &= x_1 x_3, \\ x^{\overrightarrow{\dim S} \cdot R} &= 1, & x^{(\overrightarrow{\dim V} - \overrightarrow{\dim S}) \cdot R^t} &= 1, & x^{\overrightarrow{\dim S} \cdot R + (\overrightarrow{\dim V} - \overrightarrow{\dim S}) \cdot R^t} &= 1, \\ x^{\overrightarrow{\dim S} \cdot R} &= x_2, & x^{(\overrightarrow{\dim V} - \overrightarrow{\dim S}) \cdot R^t} &= 1, & x^{\overrightarrow{\dim S} \cdot R + (\overrightarrow{\dim V} - \overrightarrow{\dim S}) \cdot R^t} &= x_2 \end{aligned}$$

です。対応する変数は、 x_8 で、分子には $1 + x_2 + x_1 x_3$ が表れています。この場合も上の単項式をすべて足し合わせたものになっています。

全部この調子で、部分表現に対応して単項式を考えて足し合わせればいいのでしたら、簡単なのですが、残念ながら物事はもう少し複雑です。次元が1でないベクトル空間が頂点に乗っている例として D_4 型の

$$(3.4) \quad \begin{array}{ccccc} & & \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & & \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ & & \uparrow & & \uparrow \\ \mathbb{C} & \xrightarrow{\quad} & \mathbb{C}^2 & \xleftarrow{\quad} & \mathbb{C} \\ & & \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} & & \\ & & \uparrow & & \\ & & \mathbb{C} & & \end{array}$$

を考えます。これが直既約であることをチェックするのは演習問題とします。第一節の数遊びで対応する式は、

$$x_{12} = \frac{1}{x_1 x_2^2 x_3 x_4} \left[(1+x_2)^3 + (3x_2+2)x_1 x_3 x_4 + x_1^2 x_3^2 x_4^2 \right]$$

です。

部分表現を調べます。まわりの頂点 1, 3, 4 には 0 次元か 1 次元のベクトル空間をのせる必要があります。真ん中の頂点は、0, 1, 2 のどれかです。まず真ん中の頂点に 0 をおくと、まわりの頂点でも 0 しかありません。また、真ん中の頂点に \mathbb{C}^2 をおくと、まわりの頂点は勝手におけます。したがって、これで

$$\begin{array}{cccccccccccc} & & & & 0 & \rightarrow & 0 & \leftarrow & 0 & 0 & \rightarrow & \mathbb{C}^2 & \leftarrow & 0 \\ & & & & \uparrow & & & & & & & \uparrow & & \\ & & & & 0 & & & & & & & 0 & & \\ \mathbb{C} & \rightarrow & \mathbb{C}^2 & \leftarrow & 0 & 0 & \rightarrow & \mathbb{C}^2 & \leftarrow & \mathbb{C} & 0 & \rightarrow & \mathbb{C}^2 & \leftarrow & 0 \\ & & \uparrow & & & & & \uparrow & & & & \uparrow & & \\ & & 0 & & & & & 0 & & & & \mathbb{C} & & \\ 0 & \rightarrow & \mathbb{C}^2 & \leftarrow & \mathbb{C} & \mathbb{C} & \rightarrow & \mathbb{C}^2 & \leftarrow & 0 & \mathbb{C} & \rightarrow & \mathbb{C}^2 & \leftarrow & \mathbb{C} \\ & & \uparrow & & & & & \uparrow & & & & \uparrow & & \\ & & \mathbb{C} & & & & & \mathbb{C} & & & & 0 & & \\ & & & & & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & \mathbb{C} & \rightarrow & \mathbb{C}^2 & \leftarrow & \mathbb{C} & & & \\ & & & & & & & \uparrow & & & & & & & \\ & & & & & & & \mathbb{C} & & & & & & & \end{array}$$

の九通りがあることが分かります。次に真ん中の頂点では \mathbb{C} を取る場合を考える必要があります。まわりの頂点のうちの二ヶ所に \mathbb{C} をおくと、部分表現であるという条件から、その像をともに含んでいないといけません。最初の直既約表現が \mathbb{C}^2 の中の三つのベクトルで、どの二つをとっても一次独立になるように決められているので、真ん中の頂点では \mathbb{C}^2 しか取れないことになり、最初の仮定に反します。よって高々一つの頂点にしか \mathbb{C} をおけません。したがって、

$$\begin{array}{cccccccccccc} \mathbb{C} & \rightarrow & \mathbb{C} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & \leftarrow & 0 & 0 & \rightarrow & \mathbb{C} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} & \leftarrow & \mathbb{C} & 0 & \rightarrow & \mathbb{C} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} & \leftarrow & 0 & 0 & \rightarrow & S & \leftarrow & 0 \\ & & \uparrow & & & & & \uparrow & & & & \uparrow & & & & & \uparrow & & \\ & & 0 & & & & & 0 & & & & \mathbb{C} & & & & & 0 & & \end{array}$$

の四通りがありえることが分かります。 $\mathbb{C} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ は、ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ のスカラー倍になるようなベクトルの全体のなす部分空間です。最後の例は例外的で、 \mathbb{C}^2 のどんな一次元部分空間 S を取っても、部分表現になります。

先ほどのルールで、それぞれの部分表現に対応する単項式を計算すると、一段目が

$$\begin{aligned} x^{\overrightarrow{\dim S \cdot R}} = 1, \quad x^{(\overrightarrow{\dim V - \dim S}) \cdot R^t} = x_1^2 x_3^2 x_4^2, \quad x^{\overrightarrow{\dim S \cdot R + (\dim V - \dim S)} \cdot R^t} = x_1^2 x_3^2 x_4^2, \\ x^{\overrightarrow{\dim S \cdot R}} = 1, \quad x^{(\overrightarrow{\dim V - \dim S}) \cdot R^t} = 1, \quad x^{\overrightarrow{\dim S \cdot R + (\dim V - \dim S)} \cdot R^t} = 1, \end{aligned}$$

です。二段目と三段目は、それぞれ同じ単項式に対応し、

$$\begin{aligned} x^{\overrightarrow{\dim S \cdot R}} = x_2, \quad x^{(\overrightarrow{\dim V - \dim S}) \cdot R^t} = 1, \quad x^{\overrightarrow{\dim S \cdot R + (\dim V - \dim S)} \cdot R^t} = x_2, \\ x^{\overrightarrow{\dim S \cdot R}} = x_2^2, \quad x^{(\overrightarrow{\dim V - \dim S}) \cdot R^t} = 1, \quad x^{\overrightarrow{\dim S \cdot R + (\dim V - \dim S)} \cdot R^t} = x_2^2, \end{aligned}$$

です。四段目は、

$$x^{\overrightarrow{\dim S \cdot R}} = x_2^3, \quad x^{(\overrightarrow{\dim V - \dim S}) \cdot R^t} = 1, \quad x^{\overrightarrow{\dim S \cdot R + (\dim V - \dim S)} \cdot R^t} = x_2^3,$$

です。残りは

$$x^{\overrightarrow{\dim S \cdot R}} = x_2, \quad x^{(\overrightarrow{\dim V - \dim S}) \cdot R^t} = x_1 x_3 x_4, \quad x^{\overrightarrow{\dim S \cdot R + (\dim V - \dim S)} \cdot R^t} = x_1 x_2 x_3 x_4$$

が三つ続き、最後が

$$x^{\overrightarrow{\dim S \cdot R}} = 1, \quad x^{(\overrightarrow{\dim V - \dim S}) \cdot R^t} = x_1 x_3 x_4, \quad x^{\overrightarrow{\dim S \cdot R + (\dim V - \dim S)} \cdot R^t} = x_1 x_3 x_4$$

です。(3.4)と見比べると、一番最後の例外的な場合の係数が2になっていて、無限個の部分表現の個数を適当に解釈することによって、係数が2となっていると想像がつかます。

答えは何かというと、

無限個の部分表現の全体のなす集合を幾何学的な対象であると考えて、その位相不変量である、オイラー数を考える

ということです。部分表現の全体のなす集合を幾何学的対象と考えたとき、籠グラスマン多様体とよびます。

上の場合は、 \mathbb{C}^2 の中の一次元部分空間の全体を考える必要があります。一次元部分空間は、0でないベクトルのスカラー倍の全体です。第一成分が0でないときは、それを1に正規化し、 $\begin{pmatrix} 1 \\ z \end{pmatrix}$ とすることができます。 z は勝手な複素数で、 z が異なれば、異なる部分空間を与えます。

次に第一成分が0のときは、第二成分は0でないので、1に正規化し、 $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ となります。したがって、 \mathbb{C}^2 の中の一次元部分空間の全体は、複素数の全体に一点を付け加えたものになります。これは、複素射影直線とも呼ばれる二次元球面です。オイラー数は、このような空間を小さな三角形に分割したときの

$$(\text{点の個数}) - (\text{線の個数}) + (\text{面の個数})$$

として定義されます。(三角形分割の仕方によらずに一定の数になることが証明されます。)より一般には、高い次元の空間が出てくる可能性があるので、3次元だったら三角錐、4次元以上は名前がありませんが、その類似物を考えて上のものに $-(\text{三角錐の個数}) + \dots$ と付け加える必要が出てきます。結論として次の結果が知られています。

定理 3.5 (Caldero-Chapton). クラスター代数の変数 x_i を考える。最初の変数で表わしたときの、分母に対応する籠の直既約表現を (V, f) とする。 $\overrightarrow{\dim S} = \sum_{i=1}^n \dim S_i \cdot \alpha_i$ を固定して、そ

の次元を持つ部分表現 S 全体のなす旗グラスマン多様体を $\text{Gr}_{\overrightarrow{\dim S}}(V, f)$ とし、そのオイラー数を $\chi(\text{Gr}_{\overrightarrow{\dim S}}(V, f))$ とする。このとき

$$\chi(\text{Gr}_{\overrightarrow{\dim S}}(V, f))x^{\overrightarrow{\dim S} \cdot R + (\overrightarrow{\dim V} - \overrightarrow{\dim S}) \cdot R^t}$$

を、 $\overrightarrow{\dim S}$ を動かして足し合わせたものが、 x_i の分数式の分子である。

どうですか、何も幾何と関係ない数式から出発したにも関わらず、オイラー数が関係しているなんて面白そうだと思っていただけたでしょうか？ 私の一番最近の論文はこの公式を出発点として、クラスター代数の理論をより幾何学的に研究することができる、ということを描したものです。

APPENDIX A. 正誤表

講義の途中で見つけた誤りを挙げます。他にも間違いが多数あると想像されます。

- p.12, 一番最後の式, $s_1(\alpha_2) = -\alpha_2$ は、 $s_2(\alpha_2) = -\alpha_2$
- p.14, 上から9行目, ‘判別式 $D/4 = (\vec{x}, \vec{y})^2 - (\vec{x}, \vec{x})(\vec{y}, \vec{y}) \geq 0$ が’ は、‘判別式 $D/4 = (\vec{x}, \vec{y})^2 - (\vec{x}, \vec{x})(\vec{y}, \vec{y}) \leq 0$ が’
- p.21, 定理3.2 (1), 間違いではないが、‘ADE型のディンキン図式’は、‘矢印のないディンキン図式(すなわちADE型のディンキン図式)’とした方が、分かりやすいであろう。
- p.21, 定理3.2 (2), ‘直既約な表現を V ’ は、‘直既約な表現を (V, f) ’
- p.21, 少し下の直既約表現の頂点の番号の $j, j+1$ は、 $j-1, j$ の間違い
- p.22, 下から6行目の数式, ‘ $\text{Im } \tau$ ’ は、‘ $\text{Im } \beta$ ’ (2箇所)
- p.23, 上から1行目と2行目, ‘ σ ’ は ‘ α ’ (3箇所)