量子古典対応とミクロ・マクロ双対性

小嶋　泉

1　初めに： ミクロ量子系 vs. マクロ古典系

現代の科学・技術・文明を考える時，その基礎にある「量子論的世界像」とも呼ぶべきミクロ自然に対する新しい見方，それが提起する様々な問題を無視することはできない。この自然観は前世紀前半，量子力学の理論体系と共に成立したもので，その歴史は既に８０年以上に及ぶ。とすれば，今さら「新しい」見方という表現は奇妙かもしれない。しかし敢えてこの表現にこだわるのは次の３つの理由による：一つ目は，人類がその長い歴史の中で培ってきた感覚・認識・思考・常識が専ら古典的マクロ世界での経験に由来するのに対し，そこから大きく懸け離れた「見えない世界」である量子的ミクロ世界とその運動・構造に関わる認識だという点。歴史的に見ればこの理論成立の前後で，我々の自然認識のあり方が根本的に変わった，ということの重要性である。

二つ目は，量子論とそれがもたらした２０世紀以降の現代物理学展開の特徴に由来するもの。量子論成立の当初，パラドックスに満ちた量子現象を巡って「認識論的な」議論が盛んになされたが，やがてこの理論を「道具」として使う「専門家」の眼からは，そうした議論は不毛な「解釈」問題に過ぎず，あれこれ「論ずる」より一歩でも先に進むため，とにかく「理論を使ってみる」のが先決，という雰囲気が優勢になり，(90 年代初頭まで）ほぼ半世紀近くそれが続いた。例えば,「量子観測」を巡る議論全般に対して向けられた,「そういう話は功なり名遂げた老大家の仕事」という冷笑的な決まり文句はこの状況を端的に象徴する。ところが，そういう基本的スタンスで発展してきた現代物理学の理論的・技術的諸成果それ自体が，量子光学，微細加工技術・mescoscopic physics，量子通信・量子情報・量子暗号，量子計算，宇宙論等々からの新しい問題提起によって，今再び，この「量子的ミクロ世界の本質」に対するより深い「新しい」理論的解釈を要求することになった，というのは「歴史の皮肉」かも知れない。

三つ目は次のような私の個人的見解に基づくもの： 上記二点を踏まえそれを理論的に発展させる上で重要な鍵を握ると期待されるのは，ミクロ量子系それだけを切り離して扱うのではなく，それとマクロ古典系との相互関係・相互作用の解明を通じて，両者の結びつきの非自明な深い本質を明らかにする，という意味での「新しい視点」の導入である。以下の議論は基本的にこの見方に依っているが，その視点を採ることによって，初めの２つの論点も見易くなると期待される。

その理由はこういうことである：ミクロ自然の「量子性」に関する多くの科学啓蒙書の扱いでは，粒子性・波動性の「共存」による「量子ゆらぎ」のため全てが不確定な世界，という説明がなされ，日常言語に拠りながらその延長上に意味ある像を結ばせようとしても，殆どの場合，その努力は徒労に帰

す。ミクロの実像を正確に捉えるには日常言語を超えた「数学言語」が不可欠で，そのために深刻な言語障壁・コミュニケーション障害が立ち現れ，マクロサイドから見たミクロ量子世界は闇の彼方にかすむほかないのである。他方，量子力学の専門書では，量子・古典の違いが繰り返し強調され，一旦古典的マクロ世界の描像を全て捨て去り，新しい量子論固有の論理に「馴れ親しむ」ことによって初めて，その本質が理解可能になる，という考え方が多数派を占める。そうして理論の内側に入り込んでしまえば古典物理学の記述以上に美しい世界が開け,《量子的ミクロ世界こそホンモノで，古典的マクロ世界はそれを「粗視化」して得られた粗い近似像に過ぎない》という感覚が自明のものとなる。この「視点移動」と共に量子的ミクロ・古典的マクロの間にはどちらの側からも越え難い「断絶のカベ」が築かれ,「素人」の側には,「意味不明」な「ブラックボックス」としてのミクロ世界とそれがもたらす現実的技術的「効用」のみが残され,「専門家」には古典的マクロの捉えどころなさ・曖昧さ・非論理性の感触，不信感が残る。この講義で目指すのは，この「カベ」を突き破る試み，その可能性に向けた一歩を踏み出す，という目標である。

そのためには，まず量子論の理論体系のエッセンスは何か？を語らずに済ますわけには行かない。でなければ，我々は「量子論」の周りをただ堂々巡りするだけで,「量子論を論ずる」ことにならないのだから。言うまでもなく，４日間という講義日程の中でその実行を試みるのは，きわめて困難な課題に違いない。どこまでそれが達成できるかは不明だが，とにかくまず量子論への「代数的アプローチ」に基づき,「量子力学速修コース」を試みる。

2　物理現象はどう記述されているか？→ 物理学理論の一般的構造

物理現象の記述に必要最小限の概念とは何か?: 物理量とその「状態」／状態の時空的変化の法則と変化過程の記述／特定の現象領域を特徴づける物理定数・スケールの範囲とそれを納める時空構造，ということになる。それを見るため，事象同定における “5W1H” ＝「いつ・どこで」・「誰が」・「何を」・「なぜ・どうした」，をヒントにして考えよう：

a) [いつ・どこで]＝「事象」の**時空的**局在化 (＝ “座標付け”)：可視的幾何的レベル

b) [何を・どうした]⟶「**作用対象**の**状態とその変化**」：可視的「表現論的」レベル

c) [“誰”が]⟶「**運動・作用の “主役”としての物理系の同定**」＝ **物理量の代数** (to characterize the observed system)：ミクロの「代数的」レベル

d) [どのように・なぜ]⟶ **動力学**過程と解釈・意味論

という基本的な要因が種々の物理理論に内在して，必要な機能を果たしていることは**検証**可能で，それは物理理論の方程式論的 (: 微分形) および オート

マトン的 (: 積分形) 性格の反映である。

物理学の基本的諸分野の理論的骨格 [1]:

1. 運動の「**状態**」／「**状態変化**」／**変化の原因としての「力」**→ Newton 力学 =[(質点) **粒子** *vs.* **力の場**・"背景"時空]：

   (a) 第１法則 :《慣性法則》として知られる第１法則については，第２法則の「質量 × 加速度＝力」で力=0 とした特別の場合に過ぎず，法則として無用，との主張がしばしばなされる。もし第１法則なしに第２法則が直接定式化可能なら，そういう見方もあり得るが，物理理論を書き下すには，用いられる基本概念と現実の対象との間の基本的な対応づけが必要で，第１法則なしには対象の運動状態をどのように記述するかが確定しない。

   「粒子」の運動状態の記述に際して，基本語彙の役割を果たすべき「**基準状態**」として《等速直線運動》を選び，[位置 x とその速度 v (より適切には運動量 $p = mv$)］を**記述変数**として用いる，ということが第１法則の実質的な中味である [→ a), b), c)]。

   もちろん「現実」世界で力が全く働かない状況はあり得ず，等速直線運動が実現するのは漸近的・理想的極限での意味だが，そういう状況を想定しそれを基準にして現実の運動を見ることの妥当性の根拠が，経験事実としての「慣性法則」にある，ということである。

   この視点なしには，[静止状態を基準］と見るアリストテレス運動学の立場の方がより「現実的」に見え，そこでは摩擦効果と慣性運動が分離できない。そのため，「特殊な力」としての前者を（仮想的に）分離して，運動の普遍的本質である第２法則に至る道が閉ざされる。

   この例は，物理理論の定式化において《基本語彙の役割を果たす「**基準状態**」》の適切な選択が，理論の適用領域を決める上で決定的役割を果たすことを示している。実際，第１法則が確定すれば，第２法則は，ある意味でそこから殆ど「自動的」に出てきてしまう：

   (b) 第２法則 :「現実」の運動の基準状態からのズレ = **状態変化の法則**: [$dp/dt = F =$ 外力] [→ b), c), d)]
   この定式化により，「状態変化の原因」は「力 F」として同定される。最初「力」は，運動状態の変化の仕方から第２法則を通じて「定義」されるが，その特定の運動から独立した因子として「力」を扱うことが許されれば，逆に未知の運動が，「力」に関する知識と第２法則とを組み合わせ，Newton 方程式を解くことによって予言される《 :「定義」と「法則」は「ニワトリと卵」の関係！》。

   (c) 第３法則 : 状態変化の原因=「外力」は，実は「**相互作用**」 [→ c), d): 複数の対象の「合成系」とその dynamics]
   ここまで「力」は，記述対象の粒子に対して「その外から」働く「外力」だった。しかし経験事実としては，それは物理的対象相互

の間に働く「相互作用」である，ということの一つの現れが「**作用反作用**の法則」。《「力」を定義づけた特定の運動から独立したものとして扱うことの妥当性》の根拠が実はここにある。

2. **力**の場と「**場**」の動力学：

   (a) 連続体& 流体場の力学 ＝ 「複合系・合成系の力学」
   「質点粒子」と先に呼んだものが厳密に「拡がりのない点状粒子」である保証はないが,「質点粒子」と見て扱う時にはその「全体」がひとまとまりのまま運動する状況に関心が向けられており，そういう「側面」への限定が「質点粒子」の概念を正当化する。
   　これに対して，運動過程における「内部構造とその異なる部分相互の関係の変化」が問題になる場面では，記述対象を「複合系」として記述する必要がある。そうした状況を扱うのが，典型的には連続体，流体場とその運動に関する理論で,「連続体力学」,「流体力学」という分野になる。
   　そこでの記述の仕方で問題になるのは，
   Lagrange 的視点 (粒子的) vs. Euler 的視点 (平均場)：前者は，連続体・流体を構成する微小な「粒子」に着眼し [→ a), c)]，全体構造の「連続的」性格を考慮しつつ構成粒子に Newton 力学的記述を適用するのに対して，後者は各時空点 $(\vec{x}, t)$ ごとの流体素片の速度 $\vec{v}(\vec{x}, t)$ を記述の基本変数に採る [→ a), b)]。
   　これは,《時空各点 $(\vec{x}, t)$ に何らかの物理的属性が割り振られている》という意味での《場》の概念とその運動を記述する問題であり，こういう状況で重要になるのは，散逸性・粘性 vs. 保存則という問題 [→ d)]。

   (b) 電磁気学と特殊相対論，重力と一般相対論：「力の場」と時空 [→ a), d)]
   電磁場，重力場は，もっとも**典型的・普遍的な「力」の場**！
   電場・磁場とそれに基づく光の運動の整合的記述には特殊相対論が不可欠： 特殊相対論成立以前には，物理現象の記述において「基準参照系・記述系」が果たす重要な物理的役割は十分認識されていなかった。「基準参照系・記述系」とは,「物理的世界の外から」物理現象を見渡す「超越的第三者」の位置にあるのではなく，それ自身物理的世界の中に置かれた一つの物理的存在であり，**対象系と記述系との相互関係は物理系相互の物理的関係として**扱わねばならないことが，光速不変性とそれに基づく「時空概念の相対性」を通じて明らかになった。
   　Newton 力学の文脈では「主役」である荷電粒子間の力を記述するための単なる「補助概念」に過ぎなかった電場・磁場が，電磁現象においては「光・電磁波」として**それ自身で独立に運動する自由度を持つ物理的実体**であることが明らかになる（：「媒介項の自立化」!）。これ以降，物理的世界における普遍的相互作用の場として電磁場の果たす役割とその重要性は広がる一方となる（：例えば,

電磁相互作用なしに原子・分子とその化学の世界は成立し得ず，情報過程で量子光学が今日果たしている役割からもそれは明らか)。ここでは，電磁場

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E^1 & E^2 & E^3 \\ -E^1 & 0 & -B^3 & B^2 \\ -E^3 & B^3 & 0 & -B^1 \\ -E^3 & -B^2 & B^1 & 0 \end{pmatrix}$$

($\vec{E}$: 電場 ,$\vec{B}$: 磁場) およびその source である物質の電流密度 $J_\mu = (\rho, -\vec{J})$ を基本変数として，荷電粒子（場）への電磁相互作用（$p_\mu \to p_\mu - eA_\mu$）と Maxwell 方程式 $\partial^\nu F_{\nu\mu} = -J_\mu$ を通して電流密度 J_μ から生成された電磁場との間に展開される文字通りの「相互作用」の動的過程が,

$$\begin{array}{ccccc} & & \text{基準参照系 =Minkowski 時空} & & \\ & \nearrow\swarrow & & \searrow\nwarrow & \\ \text{物質場 } J_\mu & & \underset{\text{電磁相互作用}}{\overset{\text{Maxwell 方程式}}{\rightleftarrows}} \qquad \uparrow\downarrow & & \text{電磁場 } F_{\mu\nu} \\ & \searrow\nwarrow & & \nearrow\swarrow & \\ & & \text{Lorentz 群} \curvearrowright \begin{array}{c}\text{エネルギー運動量}\\ \text{テンソル } T_{\mu\nu}\end{array} & & \end{array}$$

という形で記述される [2]。

(c) 重力と一般相対論 :「力の場」と時空
上記の電磁気学での物質の電流密度と電磁場を支配する duality $J_\mu \rightleftarrows F_{\mu\nu}$ の本質を，物質運動 $T_{\mu\nu}$ と重力場 $g_{\mu\nu}$ との間の duality $T_{\mu\nu} \rightleftarrows g_{\mu\nu}$ にまで拡張したのが Einstein の一般相対論:

$$\begin{array}{ccccc} & & \text{一般相対論的マクロ時空} & & \\ & \nearrow\swarrow & & \searrow\nwarrow & \\ \text{物質運動 } T_{\mu\nu} & & \underset{\text{重力相互作用}}{\overset{\text{Einstein 方程式}}{\rightleftarrows}} \qquad \uparrow\downarrow & & \text{重力場 } g_{\mu\nu} \\ & \searrow\nwarrow & & \nearrow\swarrow & \\ & & \text{ミクロ量子系の運動} & & \end{array} .$$

ただし，$T_{\mu\nu}$ は物質運動の静的動的効果を集約したエネルギー運動量テンソルであり，その物質運動 $T_{\mu\nu}$ からの重力場 $g_{\mu\nu}$ の生成が Maxwell 方程式と同様に Einstein 方程式 $R_{\mu\nu} - \dfrac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \kappa T_{\mu\nu}$ によって記述され，生成された重力場 $g_{\mu\nu}$ は逆に物質運動に重力＝

万有引力 $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = \dfrac{1}{2} g^{\lambda\rho}(\partial_\mu g_{\rho\nu} + \partial_\nu g_{\rho\mu} - \partial_\rho g_{\mu\nu})$ を及ぼす。

どんな物質・運動にも影響されずそれ自身に留まるものと想定された Newton の「絶対時間・絶対空間」は，こうして物質運動との動的相互作用の渦中に置かれた一般相対論的時空概念に席を譲る。ここで時空は物質運動とその構造を**分類**する幾何学的分類空間として機能し，恒星・銀河等々，種々のレベルで実現された物質運動の諸形態を通じて宇宙進化の歴史がそこに刻印される [→ a), b), d)]。

3. **ミクロ *vs.* マクロ**：

 (a) 熱力学： [仕事 $d'W$ =可視的マクロ] vs. [熱 $d'Q$ = 見えないミクロレベルのマクロ的現われ]
 第０法則：状態記述の基本語彙としての「基準状態」= 温度平衡状態= ［「熱平衡接触関係」=**同値関係**の同値類]
 第１法則：エネルギー保存則＝散逸過程としての熱現象を保存系としての**力学系に埋込む**こと: $dE = d'Q + d'W$
 第２法則：基準状態からの「現実」のズレ = 状態変化の法則 = 「エントロピー生成」 $dS = d'Q/T \geq 0$
 第３法則：基準状態とエントロピーの基点

 (b) 統計力学＋物性論：ミクロ理論からの熱的マクロ現象の「演繹的導出」
 外力による物理系の攪乱とそれに対する系の「応答」=「外力」によって引き起こされた系の状態変化過程
 e.g., 磁化現象，電流抵抗と Joule 熱

 (c) 量子論的レベルでの [粒子 vs. 場] (= 構造とゆらぎ)：
 量子力学＋ 量子場理論・量子電気力学＋ 素粒子論 (強い力／弱い力)
 ← 物理量の代数 + 標準的状態族 (：真空・散乱状態, 熱的平衡状態, 非平衡定常性状態，...)
 + 状態変化過程の動的時空的記述 + “内部自由度・内部対称性” とその構造 [=「質」的属性の基礎]

このように，冒頭に挙げた 5W1H を巡る記述様式の基本的要件：

a) [いつ・どこで]= 「事象」の**時空的**局在化 (= “座標付け”)：可視的幾何的レベル,

b) [何を・どうした]⟶「**作用対象**の**状態とその変化**」：可視的「表現論的」レベル,

c) [“誰”が]⟶「**運動・作用の “主役”**」= **物理量の代数**(to characterize the observed system)：ミクロの「代数的」レベル,

d) [どのように・なぜ]⟶ **動力学**過程と解釈・意味論,

は，b)「**対象**の**状態とその変化**」を記述するための語彙としての**物理量の代数**とその**状態**，c)「**運動・作用の"主役"**」に関わる構造論＝表現論，状態の時空的**変化** $= dynamics$ を記述する d) の過程論，記述・分類・解釈のためにそれら全体を統括する時空構造 a) に基づく普遍的分類空間，という形で数学的に実現され，それによって物理理論の基本構成が組み上げられていることが分かる。

3 量子力学「速修コース」

「外部世界」としての物理的自然の在り方はそれを「見る」か否かに関わらず「客観的」に定まっていて，物理系がどんな「状態」にあり，そこで物理量がどんな値をとっているかは「測定」の如何には依らない，というのが我々の「常識」で，古典物理学を展開する際の暗黙の前提でもあった。この場合の測定とは，それ自身で確定しているはずの物理量の値をただ「確認」する作業に過ぎない。ところが，古典論から量子論の領域に移る時，古典論では考えもしなかった《物理量"そのもの"／物理量の"表現"／物理量の値》という区別が重要になる。古典論ではこの三者は融合して分離不可能だったのに対し，量子論ではこれらを区別しその相互の関連を制御することが本質的な意味を持つのである。以下で試みるのは，ここを基軸にして量子論の基本構成を駆け足で概観することである。

この目的のため，物理量が形成する抽象的な代数の構造 $\mathcal{M}$ および $\mathcal{M}$ の「状態」と「表現」という数学的概念の導入が重要になる。確率論とのアナロジーを考慮すれば，抽象的な Hilbert 空間論から始まる通常の量子論の定式化よりも，具体的イメージはつかみ易いはず。

1. 抽象的代数構造 $\mathcal{M}$ ／ $\mathcal{M}$ の「状態」と「表現」／物理量とその測定値
着目する物理系を特徴づける物理量の集まり $\mathcal{M}$ は，複素数 $\mathbb{C}$ を係数体とする抽象代数（＝線型環）としての *-代数構造を持つ：つまり，線型演算 $c_1A_1+c_2A_2$ （$A_i \in \mathcal{M}, c_i \in \mathbb{C}$）と積演算 A_1A_2 （$A_i \in \mathcal{M}$） が定義されて，分配律

$$(c_1A_1 + c_2A_2)B = c_1A_1B + c_2A_2B,$$
$$A(c_1B_1 + c_2B_2) = c_1AB_1 + c_2AB_2,$$

（$B_i \in \mathcal{M}$） を満たし，更に $\mathcal{M}$ には「対合」(involution) の演算が定義され，また単位元 $\mathbf{1}$ が存在すると仮定する：

$$(c_1A_1 + c_2A_2)^* = \overline{c_1}A_1^* + \overline{c_2}A_2^*, \quad A^{**} = A,$$
$$A\mathbf{1} = \mathbf{1}A = A, \quad \mathbf{1}^* = \mathbf{1}.$$

古典物理学や確率論との重要な違いは，$\mathcal{M}$ の積は可換とは限らない: $AB \neq BA$ $(A, B \in \mathcal{M})$ という点である。
$\mathcal{M}$ 上の「期待値汎関数」 としての「状態」ω は，規格化された正値

線型汎函数: $\omega : \mathcal{M} \to \mathbb{C}$ として定義される：

線型性: $\omega(c_1 A_1 + c_2 A_2) = c_1 \omega(A_1) + c_2 \omega(A_2) \quad (A_i \in \mathcal{M}, c_i \in \mathbb{C})$;
正値性: $\omega(A^* A) \geq 0 \quad (A \in \mathcal{M})$;
規格化条件: $\omega(\mathbf{1}) = 1$.

ω を確率論での期待値（= 確率による平均値）と同類の量と見れば，この定義は特に不思議なものではなく，規格化条件 $\omega(\mathbf{1}) = 1$ は単に全事象の確率を 1 に規格化するということを意味する。

通常の量子力学の理論をご存知の方には，そこでの「状態」概念との相違が気になるに違いない。その疑問を解くカギは，正値性の条件 $\omega(A^* A) \geq 0$ にある：$\mathcal{M}$ が持つ上述の線型構造を考慮すれば，$\langle A|B\rangle_\omega := \omega(A^* B)$ は "殆ど" 線型空間 $\mathcal{M}$ の内積である。文字通りの内積にして，Hilbert 空間の完備性を実現するには，長さ $\|A\|_\omega = \sqrt{\omega(A^* A)} = 0$ のベクトルたち $\mathcal{N}_\omega := \{A \in \mathcal{M}; \omega(A^* A) = 0\}$ を取り除いて「完備化」した空間 $\mathfrak{H}_\omega := \overline{\mathcal{M}/\mathcal{N}_\omega} \ni [A] := A + \mathcal{N}_\omega$ を考えればよい。このようにして状態 ω から作った Hilbert 空間 $\mathfrak{H}_\omega$ 上で物理量の代数 $\mathcal{M}$ を線型作用素を用いて「表現する」ことができる：$\pi_\omega(A)[B] := [AB]$, $[1] =: \Psi_\omega$ と置けば,

$$\omega(A) = \langle \Psi_\omega | \pi_\omega(A) \Psi_\omega \rangle$$

および

$$\mathfrak{H}_\omega = \overline{\pi_\omega(\mathcal{M})\Psi_\omega}$$

という関係が成り立ち,「状態ベクトル」 Ψ_ω に関する「行列要素」の形に物理量の期待値を表すという周知の量子力学の方式が再現できる。このような表現の構成法は，Gel'fand, Naimark, Segal の頭文字を取って，GNS 表現 $(\pi_\omega, \mathfrak{H}_\omega, \Psi_\omega)$ と呼ばれる。

Hilbert 空間から出発する通常の定式化では，状態ベクトルとその Hilbert 空間とが一体どういう物理的意味を持つのか，全く分からないまま，それが「量子状態」を表し，その内積が状態間の「確率振幅」，その行列要素が物理量の期待値を表すということを,「ルール」として無理矢理受け入れ，ひたすらその「運用」を通じて意味を会得することを強いられる。《**初めに *Hilbert* 空間ありき**》というわけである。それに対して，ここで説明した物理量の期待値と表現の扱い (以下，これを**代数的定式化** [3] と呼ぶ) では，測定の状況と測定値の統計的扱いを確率論と parallel な形で理解すれば，無理なく了解できる設定になっている。これは，ミクロ：抽象代数 $\mathcal{M}$ とマクロ： $A \in \mathcal{M}$ の期待値 $\omega(A)$ という形で，ミクロとマクロの相互関係を最初から理論の中にキチンと位置づけたことに基づく概念的優位性の一端である [4]。

2. 量子系 vs. 古典系,「重ね合わせの原理」の意味
上のような定式化を採用すると，通常の理論のように量子系と古典系とを異なる理論形式で扱う必要はなく，物理量の代数 $\mathcal{M}$ における積演算が常に可換，$AB = BA$ for $\forall A, B \in \mathcal{M}$ であれば，そのまま同じ土俵

で古典系の扱いに帰着する（古典系の場合の物理量の代数 $\mathcal{M}$ としては，座標 x と運動量 p などの「基本変数」を独立変数に持つ関数たち $f_i = f_i(x,p)$ とその積 $f_1 f_2 = f_1(x,p)f_2(x,p)$ を考えればよい)。

しばしば量子系の特徴づけとして重視される「重ね合わせの原理」がこの文脈で意味するのは，物理量の代数 $\mathcal{M}$ の数学的表現として「既約表現」を取れば，全ての（エルミート）作用素が物理量と見做されて，状態ベクトルの任意の線型結合 $c_1\psi_1 + c_2\psi_2$ が「純粋状態」を記述し，それらの間の状態遷移 $\langle\psi_1|\psi_2\rangle$ が物理的に観測可能な状況を扱うことに対応する。

逆に言うと,「重ね合わせの原理」を「公理」として立てる通常の量子力学は，表現は全て既約であるべしとの制約を理論に課すことによって，既約表現になり得ない熱的状況，超選択則のある状況等々を，最初から締め出した窮屈な扱いになっている，ということである。（このことが，量子確率的事象である原子核崩壊を引き金に致死性ガスを吸う運命に置かれた「Schrödinger の猫」の「量子状態」解釈を微妙なものにする。）

3. 物理量 A のスペクトルとスペクトル分解:

状態 ω において物理量 $A = A^* \in \mathcal{M}$ を測定する際，測定精度を上げると，平均値としての期待値 $\omega(A)$ だけでなく，作用素 $\pi_\omega(A)$ の（固有値の概念を一般化した）スペクトル $\in Spec(A) := \{\lambda \in \mathbb{R}; (A - \lambda 1)$: non-invertible$\}$ の個々の点を識別し，それぞれの出現頻度を知ることが可能になる。確率論ならこれは確率分布を論ずる状況に対応するもので，行列の固有値分解を一般化したスペクトル分解

$$\pi_\omega(A) = \int_{Spec(A)} \lambda d\widehat{A_\omega}(\lambda)$$

がここで不可欠の役割を果たす。

Hilbert 空間 $\mathfrak{H}_\omega$ が有限次元ベクトル空間なら operator A とは行列であり，適当に基底を選んで行列表示すれば，固有値分解＝「対角化」によって

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & a_d \end{pmatrix} = \sum_i a_i \hat{A}_i;$$

$$\hat{A}_i = (\delta_{pi}\delta_{qi})_{p,q=1}^d : \text{第 } i\text{-成分の射影子}$$

となる。このとき，任意の多項式 $f(X) = \sum_k f_k X^k$ に対して $\sum_k f_k A^k = \sum_k f_k (\sum_i a_i \hat{A}_i)^k = \sum_i \sum_k f_k a_i^k \hat{A}_i = \sum_i f(a_i)\hat{A}_i$, すなわち，
$f(A) = \sum_i f(a_i)\hat{A}_i$ となることを確かめることができる。

Gel'fand の定理と呼ばれる重要な数学の一般定理 [5] によって,（然るべき位相的条件を満たす）可換環 $\mathcal{A}$ は（適当な位相）空間 $M(= Spec(\mathcal{A}))$

上の関数環 ($C(M)$ or $L^\infty(M)$) に帰着する，ということが知られているので，上のスペクトル分解の代数的本質は，

$$\widehat{A_\omega} : L^\infty(M) \ni f \longmapsto \widehat{A_\omega}(f) = \int_M f(\lambda) d\widehat{A_\omega}(\lambda) = \widehat{f(A)}_\omega \in B(\mathfrak{H}_\omega)$$

: all bounded operators on $\mathfrak{H}_\omega$

という写像が，関数 f_1, f_2 の積を operator の積に移すこと：$\widehat{A_\omega}(f_1 f_2) = \widehat{A_\omega}(f_1)\widehat{A_\omega}(f_2)$，として自然に理解できる [6, 4]。実際，このような写像 $\widehat{A_\omega}$ が見つかれば，逆に（可測）集合 Δ に対してその特性関数 χ_Δ，$\chi_\Delta(x) = \begin{cases} = 1 & (x \in \Delta) \\ = 0 & (x \notin \Delta) \end{cases}$ を上の f として選んで，$\widehat{A_\omega}(\Delta) = \widehat{A_\omega}(\chi_\Delta)$ と定義すると，射影作用素に値をとる M 上の測度 $d\widehat{A_\omega}$ が定まって，スペクトル分解が実現する。つまり，

可換性とそれに基づくスペクトル分解を通じて，非可換性（とそれに基づく量子ゆらぎ）を特徴とするミクロ量子世界の中に一部分，通常の関数 $f(\lambda)$ 達で理解可能な古典世界との「チャンネル」が開ける，

ということになる。

4. 「非可換力学系」としての量子動力学 $\mathcal{M} \underset{\alpha}{\curvearrowleft} \mathbb{R}$ with $\mathbb{R} \ni t \longmapsto \alpha_t \in Aut(\mathcal{M})$：$\mathcal{M}$ の自己同型変換群

系の時間発展を記述するのは "Hamiltonian", というのが通常の量子論の「決まり文句」だが，物理系の構成要素をどんどん増やして行く状況（：例えば，統計力学で温度や熱力学的相を明確な形で定義するために持ち込む「熱力学的極限」や，相対論的量子場理論の状況，等々）では,「基準状態」として機能する状態 ω 毎に「無縁な」(disjoint) 表現が実現される

$\Longrightarrow$ 大自由度の運動モードに由来する基準エネルギーのマクロな違いのため，固定した Hilbert 空間の作用素としての Hamiltonian はしばしば意味を失ってしまう

$\Longrightarrow$ 前項での状態概念の扱いと parallel に，最初から時間発展を特定の Hamiltonian の形に固定せず，より「代数的な」定式化から始め，条件に応じて特殊化を図るというやり方が自然である： 例えば，状態 ω が時間発展の下で不変: $\omega \circ \alpha_t = \omega$ なら，ω の GNS 表現において

$$U_t \pi_\omega(A) \Psi_\omega := \pi_\omega(\alpha_t(A)) \Psi_\omega$$

という式によって U_t を定義すると，U_t は条件

$$\pi_\omega(\alpha_t(A)) = U_t \pi_\omega(A) U_t^*, \quad U_t \Psi_\omega = \Psi_\omega$$

を満たすユニタリー作用素になり,（適当な連続性の条件下に） $U_t = \exp(iH_\omega t)$ という生成子 = Hamiltonian H_ω の存在が数学的に保証される (Stone の定理)。ただし，一般に GNS 表現が状態 ω 毎に異なる

Hilbert 空間 $\mathfrak{H}_\omega$ で与えられるように，この Hamiltonian H_ω も基準になる状態 ω に依存して決まるのが普通である。

　このようにミクロ量子系の「実現」形態が状態 ω のようなマクロ的条件に依存して変化する，という状況は，通常の量子力学の扱いでは殆ど考慮されていない。そうした理論の限定的取扱いが，ミクロとマクロを機械的に分離し，ミクロ理論へのマクロ要因の介入を「不純な夾雑物」と見なして排除する，という発想につながっているという可能性は否定できない。

5. ***Born* の統計公式 ＝ 確率解釈**：量子論的観測量 $A(=A^*)$ の理想的な誤差なし測定で得られる測定値 a は $Spec(A)$ に属するが，その中のどの値が実現されるかは（一般に）***random* にし**か決まらない。状態 ω において A の測定値 a が（可測）集合 $\Delta \subset Spec(A)$ に入る確率 $P(a \in \Delta|\omega)$ は，
$$P(a \in \Delta|\omega) = \omega(\widehat{A_\omega}(\Delta))$$
で与えられる，というのが，ミクロ量子世界とマクロ古典世界をつなぐ「確率解釈」である。

4　量子古典対応

前節では，ミクロ量子系の物理量の非可換構造が要求する《物理量"そのもの"／物理量の"表現"／物理量の値》の間の区別とその相互関係，物理系の状態の概念，物理量の「測定」と確率解釈を巡って必要最小限の理論的枠組を議論した。それを用いて解析すれば,《物理的自然 = 「外界」の在り方は「見る」か否かに関わらず「客観的」に定まっていて，物理系がどんな「状態」にあり，そこで物理量がどんな値をとるかは「測定」の如何に依らない》，という我々の素朴な「常識」が量子系では破れていることが分かる：例えば周知の「ダブル・スリット」を通過した電子がスクリーン上に残すスポットはどちらのスリットを通ったかを観測しない実験では両方を通った波による干渉縞を描き，どちらのスリットを通ったかを観測する実験では何れか一方，一方のみを粒子として通過する（例えば，朝永振一郎著「光子の裁判」や外村彰著『量子力学を見る』第５章参照 [7]）。

　ただしここで要注意なのは，こういう状況での議論がしばしば,「量子世界の在り方は我々の主観に依存して，いかようにでも変わり得る」という極端な誤解へと「発展」することである： 《「見る」か否かに関わらず「客観的」に定まって》いることの否定を「意識の関与」にまで直結させるのは間違った論理の飛躍で，問題の本質は，人間の意識の内と外との境目ではなく，どちらも「外界」に属する**ミクロ量子系とマクロ古典系との「境目」**にある。《「見る」か否か》という表現の正確な意味は,《そのままでは不可視なミクロ量子系の或る状態変化を，特定の物理量を測定するという一つのマクロ化過程を介して，可視的マクロの形に変換するか否か？》ということである。

　他方,《初めに Hilbert 空間ありき》の「標準的」立場で重要なのは,「純粋理論」としての量子論サイドから見た「ミクロ世界」で，水素原子のエネル

ギー準位・安定性とスペクトル線の説明，角運動量の群表現論的扱い等々に象徴される《Hilbert 空間とその上の作用素が形作る抽象的・整合的・美的な数学的世界》である。抽象的「状態ベクトル」 ψ のなす Hilbert 空間 $\mathfrak{H}$ こそはその舞台となる核心的抽象概念で，それを「不完全な近似レベルとしての古典的マクロ世界に結びつける「測定と確率解釈」ごときは，この美しい理論の「夾雑物」でしかない，という見方になる。

これに対して，前節で説明した**代数的定式化**では,「状態」概念をまず，ミクロ量子系の物理量の測定を通じて意味づけ可能な「期待値汎関数」 ω として捉えた。しかるのち GNS 構成法に基づいて ω から数学的に構成された表現 Hilbert 空間 $\mathfrak{H}_\omega$ の「状態ベクトル」と見る，というステップを踏むことによって，**ミクロとマクロの *interface* としての「状態」**の役割・性格が明らかになる。「期待値」だけでなく，更に踏み込んで「量子ゆらぎのパターン」＝確率分布を解析しようとすれば，前節 3. 及び 5. のように，物理量の「スペクトル」と「スペクトル分解」，確率解釈を通して，量子系と古典系との深いつながりが重要になる。これは決して偶然の事情ではなく，量子論の理論構成をよくよく検討すれば，実はきわめて深いレベルで，ミクロとマクロ，量子と古典の相互関係＝「量子古典対応」がその骨格を形作っていることが分かる。

「**量子古典対応**」とは,《マクロの古典的対象を**無限個のミクロ量子の集積効果**と見る》ことによって，ミクロ量子世界とマクロ古典世界の相互関係の本質を捉えた「直観的理念」であり，量子論の確立過程では，既知の古典世界の構造から未知の量子世界を探り当てる上で非常に有効な指針として機能した。しかし，当時の理論段階でこの理念に正確な理論的定式化を与えることは不可能で,「発見法」として便利な「直観的アイディア」のレベルに留まった。そのため，量子力学の整合的な理論体系がひとたび確立されるや，その深い含意はいつしか忘れ去られ,「ミクロ・マクロの深いミゾ」が残された：このミゾを埋め，無限個のミクロ量子の集積効果としてのマクロ古典的対象という「量子古典対応」の理念に正確な内容を持たせるためには，実は**無限自由度**量子系の数学的定式化が必要になるのである [4]。

数学的詳細は省き大事なポイントだけを書こう：

1) 準同値性と「セクター」(or 「純粋相」) の概念： 物理量の代数 $\mathcal{M}$ の表現は，通常ユニタリー同値関係,

$$\pi_1 \cong \pi_2 \Longleftrightarrow \exists U : \text{unitary} \quad \text{s.t. } \pi_2(A) = U\pi_1(A)U^{-1} \ (\forall A \in \mathcal{M}),$$

によって分類されるが，この見方では $\pi_1 = \pi$ と $\pi_2 = \pi \oplus \pi$ は単に多重度が違うというだけの理由で「非同値」になる。より本質的な分類法は，**多重度の違いを無視**して表現の内容が同じかどうかを判別する見方で，表現の間のこの同値関係＝[多重度を無視したユニタリー同値性] を「**準同値性** ***quasi-equivalence***」という。即ち,

$$\begin{aligned}
&\pi_1 \approx \pi_2 \Longleftrightarrow \exists m, n : \text{cardinality s.t. } m\pi_1 \cong n\pi_2 \\
&\Longleftrightarrow \{Tr\rho\pi_1(\cdot)\,;\rho\text{: 密度作用素 }\} = \{Tr\rho\pi_2(\cdot)\,;\rho\text{: 密度作用素 }\} \\
&\Longleftrightarrow \pi_1(\mathcal{M})'' = \pi_2(\mathcal{M})'' \text{ (as von Neumann algebras)}
\end{aligned}$$

この分類で見た時の最小単位は，中心が自明な表現 π，$\mathfrak{Z}_\pi(\mathcal{M}) := \pi(\mathcal{M})'' \cap \pi(\mathcal{M})' = \mathbb{C}1$, で，数学的には factor 表現と呼ばれるが，物理的にはその準同値関係による同値類 $[\pi]$ を「**セクター**」または「**純粋相**」と呼ぶのが適切である [6] [ただし，$T \in \mathcal{M}' \Longleftrightarrow AT = TA$ for $\forall A \in \mathcal{M}$]。

2つのセクター $[\pi_1], [\pi_2]$ は一致する（i.e., 準同値 $\pi_1 \approx \pi_2$）か，全く異なるかのどちらかしかない。後者は「無縁」(disjoint) と呼ばれ，$T\pi_1(A) = \pi_2(A)T$ ($\forall A \in \mathcal{M}$) という関係で定義される intertwiner T は 0 のみ。

2) **混合相**＝**量子古典複合系**／**秩序変数**と**分類空間**： 表現 π が純粋相でなければ**混合相**として非自明な中心 $\mathfrak{Z}_\pi(\mathcal{M})$ を持つ。中心の元は全て互いに可換で「同時対角化」でき，そのスペクトル $Spec(\mathfrak{Z}_\pi(\mathcal{M}))$ は π に含まれた純粋相の一つ一つを区別するから，中心 $\mathfrak{Z}_\pi(\mathcal{M})$ の元は「**秩序変数**」として機能し，$Spec(\mathfrak{Z}_\pi(\mathcal{M}))$ は相の分類空間すなわち「相図 phase diagram」の役割をする [8, 9]。

3) セクター＝**量子古典の境界**： 上記 1) と 2) を合わせると,「セクター」はちょうど**量子／古典の境目**の役割をし，セクターの内側はミクロ量子系，セクター相互の関係はマクロ古典系に対応することが分かる。

4) 有限自由度量子系は単一セクターのみ： 「量子力学」で扱うミクロ量子系は有限自由度量子系と呼ばれ，その振舞の記述に必要な物理量の代数は有限次元で，通常，不確定性関係の元になる「正準交換関係」 $[x_i, p_j] = i\hbar\delta_{ij}$ を満たすものが使われる。（標準的状況では）この代数の任意の（既約）表現は全て互いにユニタリー同値 (Stone-von Neumann の定理) で自明な中心を持つため,《無限個のミクロ量子が凝縮してマクロ古典的対象を産み出す》という「量子古典対応」の理念に相応しい状況は，有限自由度系の量子力学では実現不可能。この事情が量子論の枠内で量子・古典，ミクロ・マクロの相互関係を論ずる可能性を阻み,「ミクロ・マクロの深いミゾ」が残された原因に違いない。

5) 無限自由度量子系は必ず複数セクターを持つ： 場の量子論のような自由度無限大の系では，常に上のようなユニタリー同値性を満たさない表現が連続無限個出現することが知られており，複数のセクターが存在して,「量子古典対応」を満たすような量子古典複合系を実現する。

このような状況で対象を記述・分類し，適切な解釈を与えようとすれば,「基準参照系」として機能する（広義の）マクロレベルの設定と共に，扱うべき側面の記述に必要十分な精度で未知の対象系（＝広義のミクロ対象）を捉えるには，どんな状態の族をどれだけ取り込めばよいか，という問題，つまり,《解くべき「方程式」としての selection criterion》設定が重要な問題になる。その目的にヒントを与えるのが《ミクロ-マクロの統一的枠組》という考え方 [8, 9] である。これは,

$$
\begin{array}{ccc}
(\text{ミクロ}) & & (\text{マクロ}) \\[6pt]
\text{i)} \left[q: \begin{array}{c}\text{対象系の}\\ \text{一般的状態}\end{array}\right] & \underset{\uparrow}{\Longrightarrow} & \text{ii)} \left[c: \begin{array}{c}\text{基準参照系とその}\\ \text{セクターの分類空間}\end{array}\right] \\
 & \text{iii)：i) と ii) との比較} & \\
\Uparrow & & \Downarrow \\
\text{iv)} \left[\begin{array}{c}\textbf{selection criterion}: \\ c\text{-}q\ \textit{channel}\ \text{ii)} \Longrightarrow \text{i)}\end{array}\right] & \underset{adjunction}{\overset{\text{matching}}{\rightleftarrows}} & \left[\begin{array}{c}\text{ii) に基づく i) の記述・分類・解釈:} \\ q\text{-}c\ \textit{channel}\ \text{i)} \Longrightarrow \text{ii)}\end{array}\right]
\end{array}
$$

という形で，ミクロとマクロの関係を統一的に扱うための一般的枠組 [10, 8] を与え，多様体の定式化の自然な一般化になっている：

Example 1 局所地図 $\{(U_\lambda, \varphi_\lambda : U_\lambda \to \mathbb{R}^n)\}$ で記述される多様体 M*:*
i) = 局所近傍系 U_λ*, ii)=* ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$*,*
iii)= 局所地図 $\varphi_\lambda : U_\lambda \to \mathbb{R}^n$*,*
iv)= ホモロジー，コホモロジー*,* ホモトピー*,* K-群*,* 特性類等の幾何学的不変量に基づく M の幾何学的構造の分類と解釈

このような視点からミクロとマクロの相互関係の統一的記述の試みとして，以下の例がある：

Example 2 *A)* 相対論的量子場の非平衡局所状態の新しい一般的定式化 *[11, 10]*

B) 破れない内部対称性に関する *DHR* セクター理論 *[12]* とその**再定式化** *[8]*

C) **自発的に破れた**対称性 *(SSB)* へのセクター理論の拡張 *[8]*

D) ミクロ・マクロの統一的枠組 *[10, 8]*

E) **明示的に破れた**対称性と秩序変数としての温度概念 *[13]*

F) 測定過程の一般的記述とミクロ系再構成の可能性 *[15]*

$$
\begin{array}{ccccccc}
\left[\begin{array}{c}\text{A) 非平衡}\\ \text{局所状態:}\\ \text{連続セクター}\end{array}\right] & & \left[\begin{array}{c}\text{D) ミクロ-マクロ}\\ \text{の統一的枠組:}\\ \text{セクター間}\end{array}\right] & \to & \left[\begin{array}{c}\text{F) 測定過程}\\ \text{と双対性:}\\ \text{セクター内}\end{array}\right] & \to \cdots \\
\downarrow & \searrow & \uparrow & & & \\
\left[\begin{array}{c}\text{B) セクター理論}\\ \text{の再定式化:}\\ \text{離散セクター}\end{array}\right] & \to & \left[\begin{array}{c}\text{C) 自発的破れの}\\ \text{セクター構造:}\\ \text{離散 \& 連続}\end{array}\right] & \to & \left[\begin{array}{c}\text{E) 対称性の}\\ \text{明示的破れ}\end{array}\right] & \to \cdots
\end{array}
$$

5 ミクロ・マクロ双対性

「量子古典対応」という視点は，ミクロ量子系とマクロ古典系との相互関係の考察の重要性と共に，その有効な働きを示唆する。この節では，群と表現の間の Fourier-Pontryagin 双対性等，よく知られた双対性の例を参照しつつ，量子的ミクロと古典的マクロの間に存在する双対的・双方向的なつながりを,「ミクロ・マクロ双対性」 [15] という形にまで掘り下げ，具体化し，拡張できるということを示したい。

そのために有効なヒントを与えるのは，第 2 節 3. や前節 2) 項で見た「対角化」＝スペクトル分解と可換性とのつながり，という問題で，それは次のような形に拡張して理解することができる：

1. **同時対角化**可能性 $\Longleftrightarrow$ 可換性：
「**同時対角化**」＝「**非対角要素の消去**」ということがエッセンスで，裏返せば,
同時対角化不能 $\Longleftrightarrow$ 非可換性 $\Longleftrightarrow$ [**非対角要素の消去不能**] $\Longleftrightarrow$ [**状態遷移**= 量子ゆらぎ $\neq 0$],
ということになる。
有限次元の場合，行列 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ が適当な基底について対角化されていれば，それらが相互に可換となることは容易に確かめられる：
$$A_k = \begin{pmatrix} a_1^{(k)} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2^{(k)} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & a_d^{(k)} \end{pmatrix} \Longrightarrow A_iA_j = A_jA_i \quad (i, j, k = 1, 2, \cdots, n).$$
非自明な点は Sec.2 の 3. で既に触れた Gel'fand の定理によって,（有限個の有限次元行列に限らず）可換性（＋適当な位相的条件）さえあれば,「同時対角化可能」という結果が成り立つことである：
Gel'fand の定理 [5] ： 単位元を持つ可換 C*-環 $\mathcal{A}$ に対して，$M := Spec(\mathcal{A}) := \{\chi; \chi : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$: 代数的指標 $\}$ は compact Hausdorff 空間で，$\mathcal{A}$ は M 上の連続関数環と同型，$\mathcal{A} \simeq C(M)$ ゆえ，$\mathcal{A}$ の全ての元は掛算作用素として一斉に対角化されたことになる。
つまり，ミクロ系の全ての側面が完全に非可換なのではなく，或る特定の「方向」にはミクロとマクロの間に強いつながりが維持され得る，ということである。量子論の中でこれに対応するのは，**同時対角化**$\Longleftrightarrow$ **物理量の「固有状態」**と測定過程におけるその「**反復再現可能性**の仮説 (: repeatablity hypothesis)」という問題である。
通常この状況は ***Born* 解釈の特殊ケースとして**論じられるが，実は repeatablity なしに，Born 解釈を確認するための状態準備は不可能。更にそのようにして準備された初期状態について Born 解釈を検証するには，**測定を物理的過程として実現**する必要があり，それには《ミクロとマクロの coupling》の物理的実現ということが本質的になる。

2. 極大可換部分環の選択
   このような《ミクロとマクロの coupling》の物理的由来は何か？それがすなわち「量子古典対応」であり，マクロ古典系とは，ミクロ量子系と無縁な別個の物理系ではなく，それ自身が,「特殊な」状態＝「凝縮状態」に置かれた巨大な数のミクロ量子系に他ならない，ということである。このつながりに基づいて，ミクロ系からのマクロ系の「創発」的形成が実現し，逆にそうして形成されたマクロ系からミクロ系を制御することも可能になる。

   とすれば，次に考えるべきは，このマクロ・ミクロのつながりを，どのようにして数学的に正確な形で記述できるのか？という問題である。前節 2) 項では「セクター」を決めるため中心に属する秩序変数が役立つことを見たが，ここではミクロ側に一歩踏み込んで,「セクター」内部のミクロ量子系の非可換構造を問題にする。そのために重要な役割を演ずるのは,

   極大可換部分環 ＝同時測定可能な物理量の「最大」集合で，その測定によって「セクター」内部の「量子状態」が決定される。
   そうすると，測定過程の一般的定式化は，物理量の代数 $\mathcal{M}$ の中で同時対角化可能な物理量の極大集合である極大可換部分環 $\mathcal{A}=\mathcal{M}\cap\mathcal{A}'$ を測定する物理的仕組みを与える問題に帰着する。

3. Fourier-Pontryagin 双対性:
   可換環 $\mathcal{A}$ はその部分集合である（適当な局所コンパクト）可換ユニタリー群$\mathcal{U}$ から生成される： $\mathcal{U}\subset\mathcal{A}=\mathcal{U}''$。
   群 $\mathcal{U}$ の既約表現は $\mathcal{U}$ 上の指標 $\gamma:\mathcal{U}\to\mathbb{C}$, $\gamma(u_1u_2)=\gamma(u_1)\gamma(u_2)$ $(u_1,u_2\in\mathcal{U})$, $\gamma(e)=1$ で尽くされ，その全体$\widehat{\mathcal{U}}$ もまた局所コンパクト可換群になる。$\widehat{\mathcal{U}}$ を$\mathcal{U}$ の指標群または双対群という。

   したがって，$\widehat{\mathcal{U}}$ の双対群 $\hat{\hat{\mathcal{U}}}$ を考えることができるが，それは Fourier-Pontryagin 双対定理により元の$\mathcal{U}$ と同型であり，$\mathcal{U}$ および $\widehat{\mathcal{U}}$ 上の関数空間は Fourier 変換によって次の関係で結ばれている：

$$\hat{\hat{\mathcal{U}}}\simeq\mathcal{U};$$
$$\mathcal{F}L^p(\mathcal{U},du)=L^q(\widehat{\mathcal{U}},d\gamma),$$

   ただし，$du, d\gamma$ はそれぞれ$\mathcal{U}$ および$\widehat{\mathcal{U}}$ の Haar 測度，p,q は$1/p+1/q=1$ を満たす正数，Fourier および逆 Fourier 変換は

$$(\mathcal{F}f)(\gamma):=\int_{\mathcal{U}}\overline{\gamma(u)}f(u)du;$$
$$(\mathcal{F}^{-1}\varphi)(u):=\int_{\widehat{\mathcal{U}}}\gamma(u)\varphi(\gamma)d\gamma$$

   で与えられる。

   このとき，Gel'fand の定理に出てきた**代数的意味での指標**$Spec(\mathcal{A})=\{\chi;\chi:\mathcal{A}\to\mathbb{C}$: 代数的指標 $\}$ との関係は，$\mathcal{U}\subset\mathcal{A}=\mathcal{U}''$ を考慮すると，$\chi\in Spec(\mathcal{A})$ ならば $\chi\restriction_{\mathcal{U}}\in\widehat{\mathcal{U}}$ となるから，$Spec(\mathcal{A})\hookrightarrow\widehat{\mathcal{U}}$ とい

う埋め込み写像が定義される。こうして，極大可換部分環 $\mathcal{A}$ の測定値 $\in Spec(\mathcal{A})$ は群指標 $\in \widehat{\mathcal{U}}$ の一部として得られることになった。

4. **測定 *coupling* = *Kac*-竹崎 *operator* → *instrument*** → 事後状態と ***repeatability*** hypothesis
対象系 $\mathcal{M}$ の部分系 $\mathcal{A}$ とその測定値を記述する測定系とは同一視可能。対象系と測定系の間の相互作用が，対象系 $\mathcal{M}$ に対する群 $\mathcal{U}$ の力学的作用 $\alpha_u(A) = U(u)AU(u)^{-1}$ で与えられるとする（一番単純な作用 α は，adjoint action $Ad(u)A := uAu^{-1}$ で，これは対象系が「静止」していて，測定系からの作用だけで合成系の dynamics が決まることに対応する。）
　対象系と測定系の合成系を決める測定 coupling は，Kac-竹崎 (K-T) 作用素 [14] と呼ばれる unitary operator

$$\widetilde{U}(V) = \int_{\chi \in Spec(\mathcal{A})} dE(\chi) \otimes \lambda_\chi .$$

によって与えられる [15]。ただし，$dE(\chi)$ は U のスペクトル分解

$$U(u) = \int_{\chi \in Spec(\mathcal{A})} \overline{\chi(u)} dE(\chi)$$

を与えるスペクトル測度で，λ_χ は群 $\widehat{\mathcal{U}}$ の左正則表現：$(\lambda_\chi \xi)(\gamma) := \xi(\chi^{-1}\gamma)$ for $\xi \in L^2(\widehat{\mathcal{U}}, d\gamma), \gamma \in \widehat{\mathcal{U}}$
　この測定 coupling $\widetilde{U}(V)$ によって，対象系が観測量 $\mathcal{A}$ の固有状態 ξ_χ にある時，中立位置 ι にあった測定系は $|\iota\rangle \to |\chi\rangle$ という状態変化をする：

$$\widetilde{U}(V)(\xi_\chi \otimes |\iota\rangle) = \xi_\chi \otimes |\chi\rangle$$

したがって，対象系が一般的状態 $\xi = \sum_{\chi \in Spec(\mathcal{A})} c_\chi \xi_\chi$ にあれば，測定 coupling $\widetilde{U}(V)$ を通じて，対象系＋測定系は無相関の状態 $\xi \otimes |\iota\rangle$ から

$$\widetilde{U}(V)(\xi \otimes |\iota\rangle) = \sum_{\chi \in Spec(\mathcal{A})} c_\chi \xi_\chi \otimes |\chi\rangle,$$

という「完全相関」[16] の状態に移る。つまり，測定系で目盛り $\chi \in Spec(\mathcal{A}) \subset \widehat{\mathcal{U}}$ を示せば，対象系はそれに対応した固有状態 ξ_χ にあることが分かるので，これはいわゆる「波束の収縮」と呼ばれる状況にピッタリ対応する。
　以上のような特徴を持つ測定過程の定量的な記述は，次のように定義された "instrument" によって統一的になされる：

$$\begin{aligned}\mathcal{I}(\Delta|\omega_\xi)(B) &:= (\omega_\xi \otimes m_{\mathcal{U}})(\widetilde{U}(V)^*(B \otimes \chi_\Delta)\widetilde{U}(V)) \\ &= (\langle\xi| \otimes \langle\iota|)\widetilde{U}(V)^*(B \otimes \chi_\Delta)\widetilde{U}(V)(|\xi\rangle \otimes |\iota\rangle) \\ &= \int_\Delta \sqrt{\frac{dE(\gamma)}{d\mu(\gamma)}} B \sqrt{\frac{dE(\gamma)}{d\mu(\gamma)}} d\mu(\gamma) =: \int_\Delta \sqrt{dE(\gamma)} B \sqrt{dE(\gamma)}\end{aligned}$$

ただし，$\omega_\xi : \mathcal{M} \ni B \longmapsto \omega_\xi(B) = \langle \xi | B\xi \rangle$ は $\mathcal{M}$ の初期状態，$m_{\mathcal{U}}(f) = \langle \iota | f | \iota \rangle$ は測定器の中立位置の状態であり，$\mathcal{A}$ の**測定値**$\gamma \in Spec(\mathcal{A})$ が Borel 集合 Δ に入る確率は $p(\Delta|\omega_\xi) = \mathcal{I}(\Delta|\omega_\xi)(\mathbf{1})$，それに伴って実現される $\mathcal{M}$ の**事後状態**は $\mathcal{I}(\Delta|\omega_\xi)/p(\Delta|\omega_\xi)$ で与えられる [17]。

5. マクロデータからのミクロ量子系の再構成：Fourier 変換の拡張概念としての「**接合積**」とその ***duality***
   前節末尾の例にあった量子場のセクター理論 [12] では，変換群 G の下で不変な量子場の観測量 $\mathcal{A} = \mathcal{F}^G$ と $\mathcal{A}$ のセクター構造の情報だけから，群 $G = Gal(\mathcal{F}/\mathcal{A})$ と共に理論の内部対称性の構造 $\mathcal{F} \curvearrowleft G$ が「接合積」概念に基づく Galois 理論の拡張によって決定される:
   $$\widehat{G} \curvearrowright [\mathcal{A} = \mathcal{F}^G] \Longrightarrow [\mathcal{F} = \mathcal{A} \rtimes \widehat{G}] \curvearrowleft G = Gal(\mathcal{F}/\mathcal{A}).$$
   これはコンパクト群 G とその表現圏 $RepG$ の間の双対性 [14] の一般化に基づくが，ルート系の構造から半単純 Lie 環を再構成するのも類似の方法論による。そのような方法論を用いると，測定データのマクロ構造からそれをもたらした元のミクロ量子系を再構成する，ということも可能になる [15]：$\mathcal{U} \underset{\alpha}{\curvearrowright} \mathcal{M}(\simeq \mathcal{M}^{\alpha(\mathcal{U})} \rtimes_{\hat{\alpha}} \widehat{\mathcal{U}}) \rightleftarrows (\mathcal{M} \rtimes_\alpha \mathcal{U}) \underset{\hat{\alpha}}{\curvearrowleft} \widehat{\mathcal{U}}$。

マクロ古典系からミクロ量子系の理論的再構成を実現するこのような数学的方法論＝「ミクロ・マクロ双対性」は，現象から理論・法則を帰納する帰納論理の数学的基礎を与えると同時に，マクロレベルからミクロ量子系を制御する可能性と根拠とを与えるものである。こういう方向に沿って，ミクロ・マクロを切り離して考える従来の自然観・科学観とその狭い枠を乗り越え，ミクロとマクロの間の活き活きしたつながりをコアに据えた新しい自然観の確立が望まれる。

References

[1] 小嶋　泉，自然 vs. 科学 I, 数学セミナー 1993 年 2 月号, 58-68 (オリジナルは Ojima, I., Nature vs. science. I, Acta Inst. Phil. et Aesth. **10**, 55-66 (1992)); 小嶋　泉，量子古典対応とミクロ・マクロ双対性, 第三回九州大学産業技術数理研究センターワークショップ「自然現象における階層構造と数理的アプローチ」での招待講演 (http://liberty.cc.kyushu-u.ac.jp/CoupledAnalysis/mrit/slides/L4.pdf).

[2] 今井 功,『電磁気学を考える』（サイエンス社, 1990).

[3] Haag, R., *Local Quantum Physics –Fields, Particles, Algebras–* (2nd ed.) (Springer-Verlag, 1996); 荒木不二洋，岩波講座現代の物理学 21『量子場の数理』(岩波書店，1992).

[4] 小嶋　泉，量子論の基本概念：その物理的解釈と超選択則,『数理科学』2002 年 7 月号;『別冊数理科学』2006 年 4 月号，特集「量子の新世紀」ー

量子論のパラダイムとミステリーの交錯ー に再録; 小嶋　泉，量子場の観測過程, 『数理科学』 2005 年 10 月号, pp.18-25.

[5] 例えば，梅垣壽春，大矢雅則，日合文雄,『作用素代数入門』 (共立出版社, 1985) を参照.

[6] 小嶋　泉，場の量子論における秩序変数と large deviation，数理解析研究所講究録 **1066** (1998), 121–132.

[7] 朝永振一郎, 「光子の裁判」(朝永振一郎著作集８ 『量子力学的世界像』, みすず書房, 1982); 外村 彰, 『量子力学を見る』 第５章 「電子の裁判」(岩波科学ライブラリー 28, 1995).

[8] Ojima, I., A unified scheme for generalized sectors based on selection criteria –Order parameters of symmetries and of thermality and physical meanings of adjunctions–, Open Systems and Information Dynamics, **10** (2003), 235-279 (math-ph/0303009).

[9] 小嶋　泉，だれが量子場を見たか，江澤 洋先生退官記念数理物理シンポジウム（2003 年 3 月 25 日於学習院大学）の講演集『だれが量子場をみたか』 (日本評論社，2004)，pp.65-107; 小嶋　泉,『数理科学』特集「場の量子論の新たな方向– その思想と展望をひらく–」，2001 年 4 月号; 『別冊数理科学』2006 年 10 月号，特集「場の量子論の拡がり」ー 現代からみた種々相 ーに再録; 小嶋　泉，場の理論と演算子：量子場とは？,『数理科学』2004 年 4 月号; 『別冊数理科学』 2006 年 10 月号，特集「場の量子論の拡がり」ー 現代からみた種々相 ーに再録。

[10] Ojima, I., How to formulate non-equilibrium local states in QFT?–General characterization and extension to curved spacetime–, pp.365-384 in “*A Garden of Quanta*”, World Scientific (2003) (cond-mat/0302283).

[11] Buchholz, D., Ojima, I. and Roos, H., Thermodynamic properties of non-equilibrium states in quantum field theory, Ann. Phys. (N.Y.) **297** (2002), 219 - 242.

[12] Doplicher, S., Haag, R. and Roberts, J.E., Fields, observables and gauge transformations I & II, Comm. Math. Phys. **13** (1969), 1-23; **15** (1969), 173-200; Local observables and particle statistics I & II, **23** (1971), 199-230; **35** (1974), 49-85; Doplicher, S. and Roberts, J.E., Why there is a field algebra with a compact gauge group describing the superselection structure in particle physics, Comm. Math. Phys. **131** (1990), 51-107; Endomorphism of C*-algebras, cross products and duality for compact groups, Ann. Math. **130** (1989), 75-119; A new duality theory for compact groups, Inventiones Math. **98** (1989), 157-218.

[13] Ojima, I., Temperature as order parameter of broken scale invariance, Publ. RIMS **40**, 731-756 (2004) (math-ph0311025).

[14] Takesaki, M., A characterization of group algebras as a converse of Tannaka-Stinespring-Tatsuuma duality theorem, Amer. J. Math. **91** (1969), 529-564; Enock, M. and Schwartz, J.-M., *Kac Algebras and Duality of Locally Compact Groups*, Springer, 1992; 辰馬伸彦,『位相群の双対定理』（紀伊國屋書店, 1994）.

[15] Ojima, I., Micro-macro duality in quantum physics, pp.143-161 in “Stochastic Analysis: Classical and Quantum –Perspectives of White Noise Theory” ed. by T. Hida, World Scientific (2005) (math-ph/0502038); Ojima, I. and Takeori, M, How to observe quantum fields and recover them from observational data? – Takesaki duality as a Micro-Macro duality –, Open Sys. & Inf. Dyn. **14**, 307 – 318 (2007) (math-ph/0604054 (2006)); 小嶋 泉・谷村省吾, 双対性をめぐる物理学対話 – 量子と古典，ミクロとマクロ,『別冊数理科学』2007 年 4 月号，特集「双対性とは何か—諸分野に広がるデュアリティ・パラダイム」，pp.34-44; 小嶋　泉，代数的量子論とミクロ・マクロ双対性,『数理科学』2007 年 7 月号 (No.457), pp.18-23.

[16] Ozawa, M., Perfect correlations between noncommuting observables, Phys. Lett. A, **335**, 11-19 (2005).

[17] Ozawa, M., Quantum measuring processes of continuous observables. J. Math. Phys. **25**, 79-87 (1984); Publ. RIMS, Kyoto Univ. **21**, 279-295 (1985); Ann. Phys. (N.Y.) **259**, 121-137 (1997).