解けない微分方程式をめぐって

竹井 義次

0 はじめに

Newton や Leibniz による微積分法の発見以来，微分方程式を解くこと，そしてそもそも微分方程式が解けるかどうかを論じることは，解析学の中心課題の一つでした．この講義では，主として未知関数が 1 個の次のような線形微分方程式

$$\sum_{\alpha_1+\cdots+\alpha_n\le m} a_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}(x)\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1}\cdots\left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n} u(x)=f(x) \tag{1}$$

が解けるかどうかという問題を考察します．進んだ関数解析の知識や代数的な準備が必要な代数解析の手法を用いることは避け，素朴な複素解析（複素関数論）や具体例に対する考察を武器として，主に複素領域における微分方程式の可解性について，実領域の結果と対比させながら概説することが目標です．

微分方程式の可解性に関する一般論の分野では，1957 年の Hans Lewy による解を持たない線形偏微分方程式の発見は衝撃的な事件でした．講義の前半で微分方程式が解けることを保証する解の存在定理の代表的なものを紹介した後，後半ではこの Lewy の方程式を少し詳しく議論します．Lewy の方程式と 1970 年前後に導入された超局所解析の考え方により，微分方程式の可解性に対する理解は非常に深まりました．可解性を論じる中で，この超局所解析の基本的な考え方（の一部）について，多少なりともお伝えできればと思います．

1 常微分方程式の可解性

1.1 複素領域の場合

解けない方程式を論じる前に，まずは解けること，つまり解の存在定理を考えましょう．偏微分方程式の場合は変数の数が多く表記が複雑になるので，最初は常微分方程式を扱います.「はじめに」でも述べたように，複素領域での可解性，すなわち正則関数解の存在を主として問題とします．考え方に慣れてもらうために，具体的な方程式から始めましょう．

Example 1.1. 次の初期値問題を考える．

$$\begin{aligned} &\frac{d^2u}{dx^2}-Q(x)u=f(x),\\ &u(0)=a,\quad \frac{du}{dx}(0)=b. \end{aligned} \tag{2}$$

但し $Q(x)$, $f(x)$ は $x=0$ で正則な関数とする．この方程式の正則な解を求めたい．

まず，$u(x)$ の代わりに $v(x)=u(x)-(a+bx)$ を考えることにより，$a=b=0$ としても良いことがわかる．正則な解を求めるために，$Q(x)=\sum q_n x^n$, $f(x)=\sum f_n x^n$, $u(x)=\sum u_n x^n$ とべき級数展開（Taylor 展開）してこれらを方程式に代入すると，

$$\sum_{n\geq 2} n(n-1)u_n x^{n-2} - \sum_{j\geq 0} q_j x^j \sum_{k\geq 0} u_k x^k = \sum_{n\geq 0} f_n x^n.$$

従って，

$$(n+2)(n+1)u_{n+2} = \sum_{j+k=n} q_j u_k + f_n \quad (n=0,1,2,\ldots). \tag{3}$$

$a=b=0$ より $u_0=u_1=0$ だから，(3) から以下順に u_2, u_3, ... が定まる．

同様な議論は，非線形項 u^2 が加わった

$$\begin{aligned} &\frac{d^2u}{dx^2} - Q(x)u = u(x)^2 + f(x), \\ &u(0)=a, \quad \frac{du}{dx}(0)=b. \end{aligned} \tag{4}$$

のような方程式に対しても有効である．実際，方程式 (4) の場合は，$\{u_n\}$ に対する漸化式として (3) の代わりに次が得られる．

$$(n+2)(n+1)u_{n+2} = \sum_{j+k=n} q_j u_k + \sum_{j+k=n} u_j u_k + f_n \quad (n=0,1,2,\ldots). \tag{5}$$

従ってこの場合も，(5) から $\{u_n\}$ が順に帰納的に定まる．

こうして求まる (2) や (4) のべき級数解 $u(x)=\sum u_n x^n$ が収束することは，いわゆる優級数の方法を用いて証明される． □

べき級数展開と優級数を用いたこの方法により，非常に一般な常微分方程式に対して正則関数解の存在が証明できます．ここでは，次のような１階の連立常微分方程式に対する解の存在定理という形で結果を述べることにしましょう.（未知関数１個の高階微分方程式も，１階の連立微分方程式の形に表現できることに注意して下さい.）

$$\frac{du^j}{dx} = f^j(x,u^1,u^2,\ldots,u^n) \qquad (j=1,\ldots,n), \tag{6}$$

あるいは $u={}^t(u^1,\ldots,u^n)$, $f={}^t(f^1,\ldots,f^n)$ によりベクトル表示した

$$\frac{du}{dx} = f(x,u) \tag{7}$$

を考えます．このとき，次が成立します．

Theorem 1.2. (Cauchy) $f(x,u)$ を $\mathbb{C}^{n+1}$ 内の領域 Ω で正則な関数とし，また $(x_0,a)\in\Omega$ とする．このとき，初期条件

$$u(x_0)=a\in\mathbb{C}^n \tag{8}$$

を満たす (7) の正則な解が x_0 の近傍でただ一つ存在する．

証明は，基本的に Example 1.1 と同じ議論でできます．このように複素領域の常微分方程式については，係数や右辺が正則である限り，正則な解（すなわち収束するべき級数解）が存在します．

1.2 実領域の場合

次に実領域の常微分方程式を考えましょう．

まず，係数や右辺が実解析関数，つまり各点の近傍でその Taylor 展開が収束するような C^∞ 関数（言い換えれば，正則関数を実領域に制限して得られる関数）の場合は，上記の Theorem 1.2 を用いて（局所的に）実解析関数解が存在することが直ちにわかります．ただ実領域で考える際には，実解析関数というのは関数に対する制限としてはやや強すぎます．実領域においては，無限回微分可能な C^∞ 関数や有限回微分可能な C^k 関数，あるいは連続関数（さらに一般には超関数）等，自然でより広い関数のクラス（関数空間）が考えられるからです．

しかし常微分方程式の場合は，やはりこうした広い関数のクラスにおいても解の存在定理が証明できます．ここでは，その中で代表的なものを２つほど紹介しておきましょう．

複素領域の場合と同様に，１階の連立常微分方程式に対する初期値問題

$$\frac{du}{dx}=f(x,u),\quad u(x_0)=a\in\mathbb{R}^n \tag{9}$$

を考えます．最も代表的な解の存在定理は次のものです．

Theorem 1.3. $f(x,u)$ は (x_0,a) を含むような $\mathbb{R}^{n+1}$ の領域 Ω において連続とする．さらに，$f(x,u)$ は u に関して Lipschitz 連続，すなわちある正の定数 L が存在して

$$\|f(x,u)-f(x,v)\|\le L\|u-v\| \qquad ((x,u),(x,v)\in\Omega) \tag{10}$$

が成り立つと仮定する．（ここで $\|\cdot\|$ は $\mathbb{R}^{n+1}$ の適当なノルムを表わす.）このとき，(9) を満たす C^1 級の解が x_0 の近傍でただ一つ存在する．

証明については，まず (9) が次の積分方程式

$$u(x)=a+\int_{x_0}^{x}f(t,u(t))dt \tag{11}$$

と同値であることを確かめた上で，Picard の逐次近似法

$$\begin{cases} u_0(x) \equiv a, \\ u_{n+1}(x) = a + \displaystyle\int_{x_0}^{x} f(t, u_n(t))dt \quad (n = 0, 1, \ldots) \end{cases} \tag{12}$$

を用いて解の存在（と一意性）を導きます.

この Theorem 1.3 では，$f(x, u)$ が Lipschitz 連続であることを仮定していました．実際には，単に $f(x, u)$ が連続であるという仮定だけで解の存在を示すことができます.

Theorem 1.4. $f(x, u)$ は (x_0, a) を含むような $\mathbb{R}^{n+1}$ の領域 Ω において連続とする．このとき，(9) を満たす C^1 級の解が x_0 の近傍で存在する.

Theorem 1.4 では解の一意性は成り立たないことに注意して下さい．この定理の証明には，Cauchy の折れ線近似

$$u(x) = \begin{cases} a + f(x_0, a)(x - x_0), & x \in [x_0, x_1] \\ u(x_1) + f(x_1, u(x_1))(x - x_1), & x \in [x_1, x_2] \\ \qquad \cdots \\ u(x_{m-1}) + f(x_{m-1}, u(x_{m-1}))(x - x_{m-1}), & x \in [x_{m-1}, x_m] \end{cases} \tag{13}$$

が用いられます.（ここで $x_0 < x_1 < \cdots < x_m$ は，x_0 を左端とする区間 $[x_0, x_m]$ の十分に細かい分割です.）

こうして常微分方程式については，実領域においてもかなり一般的な状況の下で解が存在することが確かめられました.

2 偏微分方程式の可解性

2.1 複素領域の場合

いよいよ次に偏微分方程式を考えましょう．簡単のため，以下では未知関数が 1 個の m 階線形方程式

$$P\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) u(x) := \sum_{|\alpha| \le m} a_\alpha(x) \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha u(x) = f(x) \tag{14}$$

を扱うことにします.（表記法を簡単にするため，以下では

$$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n), \quad |\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n,$$
$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}, \quad \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n}$$

といった多重指数の記法を利用します.）まず複素領域から始めます．準備として，いくつか言葉を用意しておきましょう．

方程式 (14) の左辺に出てくる微分作用素 $P(x, \partial/\partial x)$ の最高階（今の場合，m 階）の部分を (14) の主要部（あるいは，主部），そして

$$p(x,\xi) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x)\xi^\alpha \tag{15}$$

を (14) の主シンボルと呼びます．以下で見るように，線形偏微分方程式を論じる際には，方程式の主要部や主シンボルが非常に重要な役割を果たします．ここでは，方程式が非常に退化している場合を除くために，今考えている点 x_0 において

$$p(x_0,\xi_0) \neq 0 \quad \text{を満たす } \xi_0 \text{ が存在する,} \tag{16}$$

が成立していると仮定します．適当に一次変換することにより，条件 (16) に現れる ξ_0 は $(1,0,\ldots,0)$ であると考えても構いません．つまり，

$$p(x_0,(1,0,\ldots,0)) \neq 0. \tag{16$'$}$$

このとき，方程式 (14) は（$x = x_0$ において）x_1 方向に関して非特性的であると言います．

さて,（これも表記法を簡単にするため）以下では x_0 は原点であるとしましょう．条件 (16)$'$ は $a_{(m,0,\ldots,0)}(0) \neq 0$ と同値ですから，方程式全体を $a_{(m,0,\ldots,0)}(x)$ で割ることにより,（少なくとも $x = 0$ の近傍においては）方程式 (14) を次の形に表すことができます．

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^m u(x) + \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{|\nu|\le m-j} a_{j,\nu}(x) \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^j \left(\frac{\partial}{\partial x'}\right)^\nu u(x) = f(x). \tag{17}$$

（ここで $x' = (x_2,\ldots,x_n)$，また $\nu = (\nu_2,\ldots,\nu_n)$ は $n-1$ 個の成分を持つ多重指数.）この形の偏微分方程式に対しては，Cauchy の定理（Theorem 1.2）の証明と同様の論法により，次のような解の存在定理を示すことができます．

Theorem 2.1. (Cauchy-Kowalevski) 方程式 (17) の係数 $a_{j,\nu}(x)$ や右辺 $f(x)$ は原点 $x = 0$ の近傍で正則とする．このとき，$x' = (x_2,\ldots,x_n) \in \mathbb{C}^{n-1}$ の原点の近傍における勝手な m 個の正則関数 $g_k(x')$ $(k = 0,\ldots,m-1)$ に対して，初期条件

$$\left(\frac{\partial^k u}{\partial x_1^k}\right)(0,x') = g_k(x') \quad (k = 0,\ldots,m-1) \tag{18}$$

を満たす (17) の正則な解が $x = 0$ の近傍でただ一つ存在する．

こうして複素領域においては，(16) という非常に緩い条件の下で，偏微分方程式に対しても正則な解の存在が確かめられた訳です．

2.2 実領域の場合

ここまでは議論は実に順調に進んできました．常微分方程式，複素領域の偏微分方程式ともに，初期値問題を解くことで自然に局所的な解の存在が得られた訳です．

ところが，実領域の偏微分方程式を考え出すと状況が違ってきます．例えば，次の３つの代表的な偏微分方程式（２変数）を考えてみましょう．

$$
\begin{aligned}
&(\text{楕円型}) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = 0, \\
&(\text{双曲型}) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = 0, \\
&(\text{放物型}) \qquad \frac{\partial u}{\partial x_1} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = 0.
\end{aligned}
$$

このうち双曲型方程式についてはやはり初期値問題を解くことで自然に解が得られますが，例えば楕円型方程式の場合は初期値問題はうまく解けません．楕円型方程式に関しては，考えている領域の境界上であらかじめ与えられた値（境界上の関数）を実現するような解を求める，いわゆる境界値問題の方が自然な問題設定になります．また放物型方程式についても，(x_1 方向に関する）初期値問題は $x_1 > 0$ という片側向きには解けるけれども $x_1 < 0$ の向きには解けないなど，実領域の偏微分方程式の場合はこうした方程式の「型」が問題の設定や解き方にも重大な影響を及ぼしてきます．

こうした状況を踏まえ，この後は方程式のタイプ別に自然な問題の設定や解の構造を研究するというのが伝統的な偏微分方程式論のスタイルでした．ただ，どの方程式の場合もうまく問題設定を行えば自然に解が得られたため，少なくとも局所的な解の存在を疑うような雰囲気はこの頃はまだ全くありませんでした．

20 世紀の中頃からは，こうした方程式の「型」にとらわれない，実領域における偏微分方程式の一般論も論じられるようになります．局所的な可解性（以下では，十分一般的な C^∞ 関数の右辺 $f(x)$ に対して，(14) を満たす（適当に滑らかな）関数あるいは超関数 $u(x)$ が考えている点 x_0 の近傍で存在するとき，(14) は x_0 で局所可解であると呼ぶことにします）に関しても，まず 1950 年代初めに Ehrenpreis と Malgrange が，定数係数（すなわち，$a_\alpha(x)$ が定数）の方程式はすべて局所可解であることを示しました．そしてその後，Hörmander が彼の学位論文（*Acta Math.*, **94**(1955), 161-248）において次の定理を証明しました．

Theorem 2.2. 微分方程式 (14) は $x = x_0$ において主要型，すなわち主シンボル $p(x,\xi)$ が次の条件を満たすとする．

$$
p(x_0,\xi) = 0,\ \xi \neq 0 \implies (\nabla_\xi p)(x_0,\xi) \neq 0 \tag{19}
$$

（但し $\nabla_\xi = (\partial/\partial\xi_1, \ldots, \partial/\partial\xi_n)$）．さらに，$p(x,\xi)$ は実数値関数と仮定する．このとき，方程式 (14) は x_0 において局所可解である．

すなわち，主シンボルが主要型でかつ実数値ならば，偏微分方程式 (14) は局所的に解ける訳です．

ここに出てきた二つの条件のうち,「主要型」の方は (16) と同様に方程式が退化している場合を除くための条件と考えられます.((16) よりは強い条件ですが.) 問題は「$p(x,\xi)$ が実数値」という条件です. Theorem 2.2 を証明したのと同じ論文の中で, Hörmander はまた, たとえ $p(x,\xi)$ が複素数値であっても,

$$\{\mathrm{Re}\,p, \mathrm{Im}\,p\}(x,\xi) = \frac{1}{2i}\{\overline{p}, p\}(x,\xi) = 0 \tag{20}$$

が成り立つならばやはり局所可解性が成立することを指摘しています. ここで $\mathrm{Re}\,p$, $\mathrm{Im}\,p$ はそれぞれ p の実部, 虚部, $\overline{p}$ は p の複素共役, $\{f,g\}$ は f と g のいわゆる Poisson 括弧式

$$\{f,g\}(x,\xi) = \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial \xi_j}\frac{\partial g}{\partial x_j} - \frac{\partial f}{\partial x_j}\frac{\partial g}{\partial \xi_j}\right) \tag{21}$$

を表します. この段階では, Hörmander 自身も条件 (20) はあくまでも技術的な条件であって, 将来的には取り除けるものと考えていたようです.

つまり, 当時はまだ, 線形の偏微分方程式 (14) は（非常に退化した場合を除いて）いつでも局所的には解けると誰もが信じていました. Hans Lewy が局所的にも解けない方程式の例を与えたのは, まさにこうした状況下においてでした.

3 局所的にも解けない方程式

3.1 Hans Lewy の方程式

Hans Lewy は, 1957 年の論文（*Ann. of Math.*, **66**(1957), 155-158）において, 次のような簡単な 1 階の偏微分方程式が原点の近傍で局所的にも解けないことを示しました.

$$-\frac{\partial u}{\partial x_1} - i\frac{\partial u}{\partial x_2} + 2i(x_1 + ix_2)\frac{\partial u}{\partial x_3} = \phi'(x_3). \tag{22}$$

彼が証明したのは, 正確には次の定理です.

Theorem 3.1. (Lewy) 微分方程式 (22) において, $\phi(x_3)$ は実数値の C^∞ 関数とする. もし (22) が原点の近傍で C^1 級の解を持つならば, $\phi(x_3)$ は $x_3 = 0$ の近傍で実解析関数でなければならない.

この Theorem 3.1 により, (22) の右辺の ϕ として実数値かつ C^∞ 級だけれども原点で実解析的ではないようなものを持ってくれば, 方程式 (22) は原点の近傍で C^1 級の解を持たないことになります.

Theorem 3.1 は, 方程式 (22) の形をうまく使って複素解析的な議論を適用することにより証明されます.

Remark 3.2. 方程式 (22) は決して特殊な方程式ではなく, $\mathbb{C}^2$ における Cauchy-Riemann の方程式をある適当な領域の境界に制限することにより自然に得られる. 実際, Lewy はこうした考察を通じて (22) を発見した.

Lewy が発見した方程式 (22) の場合，その主シンボルは $p(x.\xi) = -\xi_1 - i\xi_2 + 2i(x_1 + ix_2)\xi_3$ となるので，$\{\mathrm{Re}\,p, \mathrm{Im}\,p\} = -4\xi_3 \neq 0$ が成り立ちます．つまり，前節の最後に述べた Hörmander の結果と矛盾はしない訳です．この Lewy の結果により，偏微分方程式が局所可解であるためには（当然 Hörmander の条件 (20) と密接に関係する）何らかの条件が必要であるということになります．

3.2 Nirenberg-Treves の条件

Lewy の結果に触発されて，その後いくつもの重要な結果が発見されました．例えば Hörmander は，微分方程式が局所可解であれば，その主シンボルが

$$p(x,\xi) = 0 \implies \{\mathrm{Re}\,p, \mathrm{Im}\,p\}(x,\xi) \leq 0 \tag{23}$$

という条件を満たすことを示しました．また，Mizohata が提出した次の方程式

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} + ix_1^j \frac{\partial u}{\partial x_2} = f(x) \tag{24}$$

については，j が 0 以上の偶数ならば原点で局所可解だけれども j が正の奇数ならば局所可解でないという，実に興味深い事実が見出されました．

こうした進展の後，1970 年になって Nirenberg と Treves が，局所可解性の研究において決定的に重要な次の条件を導入しました（*Comm. Pure Appl. Math.*, **23**(1970), 1-38, 459-509）．

Definition 3.3. 偏微分方程式 (14) の主シンボルを $p(x,\xi)$ とする．考えている点 $x = x_0$ の近傍において，$\mathrm{Re}(ap)$ の陪特性帯に沿って $\mathrm{Im}(ap)$ がその符号を $-$ から $+$ に変えないとき，$p(x,\xi)$ は x_0 において条件 (Ψ) を満足するという．また，$\mathrm{Im}(ap)$ が全く符号を変えないときは，条件 (P) を満足するという.（但し，a は決して 0 にならない勝手な複素数値関数．実際には $a = 1$ 及び $a = i$ の時のみ考えれば十分.）

ここで $\mathrm{Re}\,p$ の陪特性帯とは，$\mathrm{Re}\,p$ の Hamilton ベクトル場

$$\frac{dx_j}{dt} = \frac{\partial(\mathrm{Re}\,p)}{\partial \xi_j}, \qquad \frac{d\xi_j}{dt} = -\frac{\partial(\mathrm{Re}\,p)}{\partial x_j} \tag{25}$$

の解曲線であって $(\mathrm{Re}\,p)(x(t),\xi(t)) = 0$ を満たすものをいいます．例えば Mizohata 方程式 (24) の場合，$a = 1$ とすると $\mathrm{Re}\,p$ の陪特性帯は $(x_1(t), x_2(t); \xi_1(t), \xi_2(t)) = (t + x_1^0, x_2^0; 0, \xi_2^0)$（$x_1^0$, x_2^0, ξ_2^0 は初期条件から定まる定数）で与えられます．従って $\mathrm{Re}\,p$ の陪特性帯に沿う $\mathrm{Im}\,p$ の挙動は（t の関数として）$\mathrm{Im}\,p = \xi_2^0(t + x_1^0)^j$ で表されることになり，j が偶数ならば符号の変化が起こらないのに対し j が奇数ならば実際に符号の変化が起こることがわかります．また，Poisson 括弧式 $\{\mathrm{Re}\,p, \mathrm{Im}\,p\}$ がちょうど $\mathrm{Re}\,p$ の Hamilton ベクトル場に沿う $\mathrm{Im}\,p$ の方向微分を表していることに注意すれば，Hörmander の条件 (23) は，$\mathrm{Re}\,p$ の 陪特性帯に沿う $\mathrm{Im}\,p$ の（方向）微分係数が $\mathrm{Im}\,p$ の零点で負であることを主張していることがわかります．

このように，Nirenberg と Treves の与えた条件 (Ψ) と (P) は，それまでの結果

をうまく統一的に説明する条件となっていた訳です．実際 Nirenberg-Treves は，係数関数が実解析関数であるという仮定の下で，条件 (P) が局所可解性を保証する必要十分条件であることを証明しました．更に彼らは，一般の（係数が実解析関数とは限らない）微分方程式に対しても条件 (P) が，また 1960 年代中頃に微分作用素を拡張するものとして導入された擬微分作用素を含む方程式（擬微分方程式）に対しては条件 (Ψ) が，それぞれ局所可解であるための必要十分条件であると予想しました.（微分方程式の場合には，$p(x,-\xi)=(-1)^m p(x,\xi)$ という式が成立するので，条件 (P) と条件 (Ψ) は同値な条件となります.）

Nirenberg-Treves 予想に関するその後の展開について，簡単にまとめておきましょう．まず 1973 年に Beals-Fefferman が,「係数関数が実解析関数である」という仮定を取り除き，一般の偏微分方程式に対して条件 (P) が局所可解であるための十分条件であることを示しました．その後，擬微分方程式に対して条件 (Ψ) が局所可解であるための必要条件であることを，1978 年に Moyer が 2 次元の場合に，1981 年に Hörmander が一般次元の場合にそれぞれ証明しました．さらに，擬微分方程式の場合の条件 (Ψ) の十分性に関しては，1988 年に Lerner が 2 次元の場合に，そして一般次元における条件 (Ψ) の十分性は最近になってようやく Dencker が証明に成功しました.（論文が出版されたのは 2006 年．この Nirenberg-Treves 予想の解決で，Dencker は 2005 年度 Clay 数学賞 (cf. http://www.claymath.org/research_award/Dencker/) を受賞しています.）

Nirenberg-Treves の条件においては，陪特性帯というものが重要な役割を演じています．では，なぜ陪特性帯が偏微分方程式の可解性と関係してきたのでしょうか？そもそも偏微分方程式の研究において，陪特性帯はどのような意味を持っているのでしょうか？次節では，大域的な可解性という多少違った問題を論じる中で，この問に対する答を探ってみたいと思います.

4　大域的な可解性と陪特性曲線

4.1　一つの具体的な問題

前節までは微分方程式が局所的に解けるかどうかを論じてきました．本節では，微分方程式が大域的に解けるかどうかを問題にします．つまり，$\mathbb{R}^n$ または $\mathbb{C}^n$ 内の領域 Ω を一つ固定した上で，Ω 上の C^∞ 関数（あるいは実解析関数，正則関数）$f(x)$ が与えられたとき，線形微分方程式

$$\sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha(x)\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha u(x)=f(x) \tag{26}$$

の C^∞ 関数（あるいは実解析関数，正則関数）の解 $u(x)$ が Ω 全体で存在するかどうかを考察します.

こうした大域的な問題を論じる際にはどのようなことが大切なのかを理解してもらうために，まず次の具体的な問題を考えましょう.

Example 4.1.　図 1 に示したような $\mathbb{R}^2$ 内の領域 Ω において，次の微分方程式を

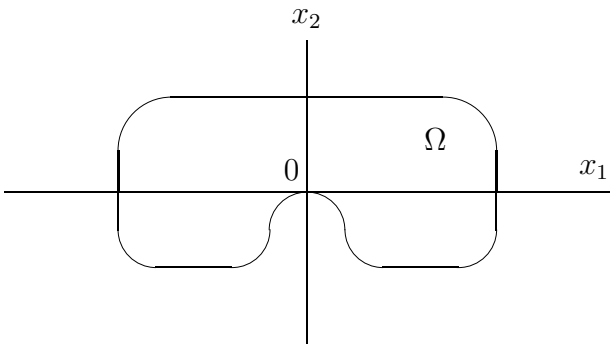

図 1

考える．

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = \frac{1}{x_1^2 + x_2^2}. \tag{27}$$

右辺の関数 $1/(x_1^2+x_2^2)$ は原点を除いて（従って Ω 全体で）C^∞ 級である．では，Ω 全体で C^∞ 級の (27) の解は存在するだろうか？

方程式 (27) の一般解は

$$u(x_1, x_2) = \frac{1}{x_2}\,\mathrm{Tan}^{-1}\left(\frac{x_1}{x_2}\right) + v(x_2) \quad \text{（但し } v(x_2) \text{ は } x_2 \text{ の勝手な関数）} \tag{28}$$

で与えられる．今，Ω 全体で C^∞ 級の解 $u(x_1, x_2)$ があったと仮定すると，十分小さな正の数 ε に対して

$$u(\varepsilon, x_2) - u(-\varepsilon, x_2) \tag{29}$$

は（x_2 の関数として）$x_2 = 0$ で C^∞ 級のはずである．ところが，(28) で $v(x_2)$ をどのように選んでも (29) は $x_2 = 0$ で C^∞ 級にはならない．従って，(27) は Ω 全体で C^∞ 級の解を持たない． □

方程式 (27) はどうして Ω 全体では解けないのでしょうか？もちろん，(27) は x_1 方向に沿って積分することによって解けます．しかし，そうすると特に x_1 軸に沿って積分する際に，どうしても右辺が原点に持っている特異性を解が拾ってしまう訳です．これが (27) が Ω 全体では解けない理由です．

このように方程式 (27) の場合，大域的な可解性が成立するためには，x_1 軸に平行な直線と領域 Ω との位置関係（より正確には，x_1 軸に平行な直線に関する Ω の凸性）が問題となります．

4.2 特性曲線と陪特性曲線

では，一般の偏微分方程式の場合に，(27) に対して “x_1 軸に平行な直線” が果たした役割を果たすものは，一体何でしょうか？

まず，次のような 1 階の偏微分方程式

$$a_1(x)\frac{\partial u}{\partial x_1} + \cdots + a_n(x)\frac{\partial u}{\partial x_n} = f(x) \quad \text{（但し } a_j(x) \text{ は実数値関数）} \tag{30}$$

を考えましょう．この場合には，常微分方程式

$$\frac{dx_1}{dt} = a_1(x), \ldots, \frac{dx_n}{dt} = a_n(x) \tag{31}$$

の解曲線を $(x_1(t), \ldots, x_n(t))$ とすると，(30) は曲線 $(x_1(t), \ldots, x_n(t))$ に沿う単純な常微分方程式

$$\frac{d}{dt}\left[u(x_1(t), \ldots, x_n(t))\right] = f(x_1(t), \ldots, x_n(t)) \tag{32}$$

と同値であることがわかります．つまり，方程式 (30) に対しては，(31) の解曲線が “(27) に対する x_1 軸に平行な直線” の役割を果たす訳です．(31) の解曲線を (30) に対する特性曲線と呼びます．

残念ながら，一般の高階の偏微分方程式 (26) の場合には，状況はこれほど簡単ではありません．高階の偏微分方程式をこうした単純な方法で常微分方程式に帰着させて解くということは，そもそも期待できないのです．しかし，1970 年前後に発展した超局所解析学は，一般の偏微分方程式 (26) の場合に特性曲線にあたるものが何であるかを明らかにしました．それが前節に登場した陪特性帯なのです．陪特性帯がどのような役割を果しているかは次のように述べられます．

Fact 4.2. 偏微分方程式 (26) の解 $u(x)$ の超局所的な意味での特異性は，主シンボルの Hamilton ベクトル場の解曲線である陪特性帯に沿って伝播する．

この Fact 4.2 の意味を正確に説明するには「超局所的な意味での特異性」をまず定義する必要があり，ここではあきらめざるを得ませんが，単に解 $u(x)$ の特異性を問題にするならば，陪特性帯 $(x(t), \xi(t))$ （これは (x, ξ) 空間の曲線であることに注意して下さい）のうちの $x(t)$ 成分，つまり陪特性帯の x 空間への射影，を考えれば良いことになります．すなわち，(26) の解 $u(x)$ の特異性は陪特性帯の x 空間への射影に沿って伝播することがわかります．陪特性帯の x 空間への射影は陪特性曲線と呼ばれます．

4.3 大域的な可解性

4.1 節で見たように，Example 4.1 の大域的な可解性を論じる際に重要だったのは，右辺の特異性が x_1 軸に沿って伝わるという性質でした．一般の方程式 (26) の場合に解の特異性が陪特性曲線に沿って伝播するとなると，4.1 節の議論から容易に想像されるように，(26) の大域的な可解性を論じる際には，考えている領域 Ω の

陪特性曲線に関する凸性が鍵を握るはずです．実際，実領域および複素領域のいずれにおいても，大域的可解性に関する結果は領域の陪特性曲線に関する凸性との関連で論じられます．大域的可解性に関して知られている結果をここで簡単にまとめておきましょう．

1. （実領域；C^∞ 関数の枠組における大域的可解性）
係数 $a_\alpha(x)$ は実数値と仮定する．このとき，領域 Ω が p の陪特性曲線に関して凸であるならば，方程式 (26) は Ω において大域的に可解である（Duistermaat-Hörmander; *Acta Math.*, **128**(1972), 183-269）．

2. （実領域；実解析関数の枠組における大域的可解性）
定数係数の場合を別にすれば，この枠組ではまだ決定的な結果は得られていないと思われる．領域 Ω の p の陪特性曲線に関する凸性よりも多少強い十分条件は知られている．

3. （複素領域；正則関数の枠組における大域的可解性）
領域 Ω の p の陪特性曲線に関する凸性に加えて，さらに横断的な方向に関する Ω の「擬凸性」を仮定すれば，方程式 (26) は Ω において大域的に可解である（1 階の方程式の場合は Suzuki; *Sci. Rep. Tokyo Kyoiku Daigaku, Sect. A*, **11**(1972), 253-258，高階方程式の場合は Kawai-Takei; *Adv. in Math.*, **80**(1990), 110-133）．

最後に，こうした微分方程式の可解性の研究においては，超局所解析の手法が必要不可欠であることを強調しておきたいと思います．本稿の 3.2 節以降で述べた諸々の結果は，すべて超局所解析の導入なしには得られなかったと言っても決して過言ではありません．超局所解析がどのようなものであるかについては，代数解析的手法による解析関数の枠組での超局所解析については [5], [6] を，Fourier 解析と関数解析的手法による C^∞ 関数の枠組での超局所解析については [4] を，それぞれ参照して頂ければと思います．

References

[1] 高野恭一： 常微分方程式，新数学講座 6，朝倉書店，1994.

[2] 大島利雄，小松彦三郎： 1 階偏微分方程式，岩波講座基礎数学，岩波書店，1977.

[3] 溝畑茂： 偏微分方程式論，岩波書店，1965.

[4] L. Hörmander: *The Analysis of Linear Partial Differential Operators*, Volume I-IV, Springer-Verlag, 1983-1985 （特に Volume IV, Section 26）.

[5] M. Sato, T. Kawai and M. Kashiwara: Microfunctions and pseudo-differential equations, *Lecture Notes in Mathematics*, No. 287, Springer, 1973, pp. 265-529.

[6] 柏原正樹，河合隆裕，木村達雄： 代数解析学の基礎，紀伊國屋数学叢書 18，紀伊國屋書店，1980.