

## ルジャンドル双対性と擬球面幾何学

### Legendrian dualities and pseudo-spherical geometry

泉屋 周一 (北海道大学大学院理学研究科)

平面曲線の微分幾何学においていわゆる『4頂点定理』は大域的微分幾何学の萌芽として重要な意味をもつ。一方、頂点は曲率の微分が零となる点であるがそれは曲線の曲率中心の軌跡として定まる『縮閉線』の特異点に対応する。さらに縮閉線は元々の曲線の『平行曲線』の族の特異点の軌跡とも一致する。実際、楕円に対して、平行曲線と縮閉線の図を描くと図1のようになり、縮閉線に現れる4つのカスポが楕円の頂点に対応する特異点である。

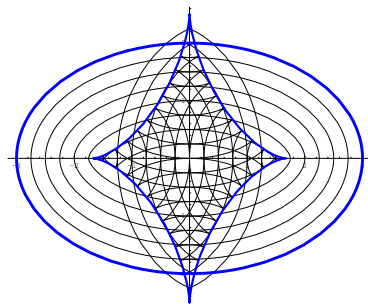


図1：楕円の平行曲線と縮閉線

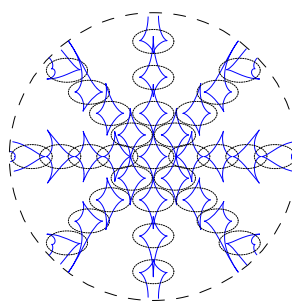


図2：ポアンカレ円板内の縮閉線

一方、双曲平面上では、ユークリッド平面としての楕円とその縮閉線を描き、楕円の位置を色々と変えたと図2がえられる。頂点は共形不変な概念なので、この『楕円』上にも4つの頂点が存在するが、楕円の位置が境界に近づくと縮閉線のカスポは無遠く飛び去り、もはや双曲平面上には存在しないことが解る。この特異点はどこへ消えてしまったのであろうか？ 双曲平面だけの世界で考えている限り、無限遠は外の世界であり認識できないので『エンド』として理解するしかないと思われる。講演者は、双曲平面のモデルとして3次元ミンコフスキー空間内の双曲面を採用すると曲線の縮閉線は双曲面の外側にある2次元ド・シッター空間にまで延長されることを発見した。この事実は曲線の微分幾何学的性質を取り扱うためには**双曲平面内に閉じこもっている本質が見えてこないことを示唆している**と言えよう。

本講演では双曲空間の外側も含めた幾何学を展開するために $n$ 次元ミンコフスキー空間内の擬球面幾何学上の部分多様体論について、最近までに得られた結果を報告する。ミンコフスキー空間内では擬球面はド・シッター空間(正半径)、双曲空間(負半径)、光錐(零半径)の三種類が存在する。ここで、双曲空間は負定曲率を持つリーマン空間としてガウス・ボヤイ・ロバチェフスキーの非ユークリッド空間のモデルとなり現在でもその部分多様体論は活発に研究されている。また、ド・シッター空間は定曲率のローレンツ空間であり宇宙論においても重要な意味を持つ。いずれにせよこの2つの擬球面では準・リーマン幾何学が成り立ちある程度の一般的なテンソル解析の議論が成立する。しかし、光錐上では、ミンコフスキー内積が退化してしまい、前記の2つの擬球面とは状況がまったく異なる。しかも、『3次元以上の単連結リーマン多様体に対して、等角的に平坦であるための必要十分条件はその多様体がミンコフスキー空間内の光錐の中に空間的超曲面として等長的に埋め込まれることである』という Asperti-Dajczer の定理から、光錐内の空間的超曲面の微分幾何学の研究は重要である。しかし、光錐内の超曲面に対しては光錐の接空間上における法線と言う概念が存在しないので、それ以外の場合のようなガウス写像とその微分(ワインガルテン写像)等の構成が不可能のように思われる。ここでは、『**擬球面間のルジャンドル双対性**』を示す事により、それぞれの擬球面内(特に、光錐内)の空間的超曲面にたいしてある種の『法線』を定める事が出来、その結果ガウス写像などが定まり幾何学的不変量(ガウス曲率、平均曲率の類似物)が得られることを紹介する。特に**光錐内の空間的超曲面の曲率は従来の曲率と大変違った性質をもつ**こともわかる。その一例として、3次元光錐の中で考えると光錐的ガウス曲率は「法線」に依存した外在的量であるが、光錐的平均曲率は第一基本量(リーマン計量)から得られる断面曲率(内在的量)に一致する事がわかる。ガウスは曲面論においてそのガウス曲率が断面曲率に一致(ガウスの驚異の定理)して驚いたのであるが、この結果はまさに(私にとっての)『**ビックリ定理**』である。さらに、(時間が許せば)この『**ルジャンドル双対定理**』を適用すると、最初に述べた平行曲線や縮閉線概念がこの3種類の擬球面に対して統一的に記述できることも説明したい。