

全学共通科目 レポート 問題

エータ積のフーリエ係数の非負性について

齋藤恭司

講義内容に関連するどのようなレポート感想でも歓迎です。講義中に触れた幾つかの問題は かなり難しいので それに対する答は要求しません。しかし 是非一度自分で紙と鉛筆とパソコンを持って計算してみてください。なんらかの実験をして頂ければ 又その 実験結果についてレポートして頂ければ嬉しいです。

例 1。 オイラーの例以外でもエータ積 の フーリエ展開が二次式を巾指数に持つ展開ができる 例を幾つか掲げましたが、それらをオイラーのまねして直接フーリエ展開出来るのでしょうか。出来れば 面白いと思います。

例 2。 講義の最後に触れた次の予想は $p = 2, 3$ と 5 までは 講義で述べた ディリクレ級数を用いる方法で証明できます。その先は $p = 7, 11$ と 13 について最近、大阪大学の伊吹山氏により正しいことがアナウンスされており、 $p = 17, 19$ についても現在コンピュータを用いてチェック中であるとの事です。その証明方法は未確認ですが (注参照) おそらく束を用いるもので講義とはかなり異なったものと思われる。

予想: p を (有理) 素数とする。このとき、 次の二つの エータ積 の フーリエ展開の係数は非負である。

$$\frac{\eta(p\tau)^p}{\eta(\tau)}, \quad \frac{\eta(p\tau)}{\eta(\tau)^p}.$$

p が素数でない合成数の場合も含めた予想が講義のあとにお配りしたノート (RIMS ホームページのプレプリント: RIMS-1445 Non-negativity of Fourier coefficients of Eta-Products by Kyoji Saito よりダウンロード出来ます) の 5 ページ 下段 の 例 に書いてありますので興味ある人はそちらの方で実験して見てください (合成数 $4, 6, 8, 12$ に対しても予想は正しい)。これ等のエータ積にたいし、講義で行なったように ディリクレ級数を定義したらそれがどんな格好をしているのか、どのような素数について オイラー積の因子を分離できるのかも (一般的には) 知られていません。もしかしたら、実験のなかで新しい発展の手がかりがでてくるかも知れません。

いずれにせよ、レポートの締め切りまでの時間内で纏まった結果を得るのはまず無理と思います。私としては締め切りを過ぎてでも、考え続けて頂けるほうを歓迎しますが（オイラーが10年余り考え続けたように！）その場合でもひとまず三週間目にレポートを「もっとゆっくり考えたい」等と書いてご提出下さい。そのあとの進展について何か分かったら是非ご遠慮なく私の方に直接コンタクトをお願いします。

注) これ等の結果について伊吹山氏の講演が次の様にあります。

1. 講師： 伊吹山知義（大阪大学）
2. 題目： エータ積に対する K. Saito の予想について
3. 日時： 5月29日（土）午後1時30分～
4. 場所： 数理解析研究所 202号室

学部学生の方の来聴歓迎です。なお当日土曜日は建物が閉館のため、研究所北側の通用門側におまわり下さい。