

全学共通科目講義（1回生～4回生対象）

現代の数学と数理解析

基礎概念とその諸科学への広がり

授業のテーマと目的：

数学が発展してきた過程では、自然科学、社会科学などの種々の学問分野で提起される問題を解決するために、既存の数学の枠組みにとらわれない、新しい数理科学的方法や理論が導入されてきた。また、逆に、そのような新しい流れが、数学の核心的な理論へと発展した例も数知れず存在する。このような数学と数理解析の展開の諸相について、第一線の研究者が、自身の研究を踏まえた入門的・解説的な講義を行う。

数学・数理解析の研究の面白さ・深さを、感性豊かな学生諸君に味わってもらうことを意図して講義し、原則として予備知識は仮定しない。

第3回

日時： 2005年5月6日（金）16：30 - 18：00

場所： 数理解析研究所 420号室

講師： 小嶋 泉 助教授

題目： 双対性 / 量子性 / ミクロとマクロ

要約： 1) 線型空間 V とその上の線型汎函数の空間 V^* との間には、 $(V^*)^* \cong V$: 同型という形で一方を決めると他方も自動的に決まる関係があり、「双対性」と呼ばれる。 V を無限次元の関数空間に広げ、「基底」としての「固有振動モード」に任意関数を分解・合成することを考えると、Fourier 分解・Fourier 変換の話になる。これは変換群の作用、群の表現、表現の分解・合成の問題で、そこで中心的役割を担うのは、群とその多様な現れとしての種々の表現、その表現の全体から元の群を再現するという「群双対性」であり、 G : 可換群ならその指標群を \hat{G} と書いて「Fourier・Pontryagin 双対性」: $\hat{\hat{G}} \cong G$ が成立つ。

2) こういう双対関係にある可換群 G とその双対 \hat{G} を組み合わせると、解析・幾何・表現論・作用素環から数論のテータ関数まで含めた多くの数学分野で活躍する「Heisenberg 群」ができる。量子力学における「正準交換関係」 $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar I$ は、座標 \hat{x} および運動量 \hat{p} の各々が生成する可換 Lie 群 G とその双対 \hat{G} から非可換な Heisenberg 群を作る時の基本関係式にほかならない。周知の不確定性関係 $\Delta x \cdot \Delta p \geq \hbar/2$ はこの交換関係から容易に導かれるが、その物理的解釈についてはごく最近、新しい進展がなされた [1]。

3) 有限個の変数の正準交換関係を扱う限りその既約表現のユニタリー同値類は、群双対性からただ一つに限られ、物理量の多様な表現の可能性を忘れて Dirac 変換理論の形で量子力学の簡潔な定式化が可能だが、量子場のように自由度無限大の系ではこの一意性が破れてしまう [3]。「数学的に厄介な病理現象」として否定的に扱われるこの非一意性に、実は見慣れたマクロ世界の出自をミクロ量子世界からの動的生成によって解くカギ = 「ミクロ・マクロ双対性」 [2, 3] が隠されている。これは（物理量の）代数とその表現・状態の双対的關係に基づいて種々のレベルの双対性を立体的に統合する高次の新しい「双対性」であり、多様な自然現象をミクロとマクロの深い結びつきに基づいて統一的に解明するための有力な手法に育つことが期待される。

講義は 1) から始め、2) の理解を通じて、3) の内容がイメージとしてつかめるよ

うにしたい。

References

- [1] 小澤正直, 不確定性原理・保存法則・量子計算, 日本物理学会誌 59, 157 (2004); エンタングルメントと不確定性原理, 『数理科学』 No.500 (2005.2).
- [2] I. Ojima, Micro-macro duality in quantum physics, Invited talk at Intern. Conf. “Classical and Quantum Stochastic Analysis” (2004)
(http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/home_page/preprint/PS/RIMS1488.ps.gz).
- [3] 小嶋 泉, だれが量子場を見たか, in 『だれが量子場をみたか』 (日本評論社, 2004); 場の量子論的思考法, 『数理科学』 No.454 (特集 場の量子論の新たな方向—その思想と展望をひらく—) (2001.4); 量子論の基本概念: その物理的解釈と超選択則, 『数理科学』 No.469 (2002.7); 場の理論と演算子: 量子場とは?, 『数理科学』 No.490 (2004.4).

”<http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/kenkyubu/zengaku/index.html>”