

全学共通科目講義（1回生～4回生対象）

# 現代の数学と数理解析

## 基礎概念とその諸科学への広がり

授業のテーマと目的：

数学が発展してきた過程では、自然科学、社会科学などの種々の学問分野で提起される問題を解決するために、既存の数学の枠組みにとらわれない、新しい数理科学的な方法や理論が導入されてきた。また、逆に、そのような新しい流れが、数学の核心的な理論へと発展した例も数知れず存在する。このような数学と数理解析の展開の諸相について、第一線の研究者が、自身の研究を踏まえた入門的・解説的な講義を行う。

数学・数理解析の研究の面白さ・深さを、感性豊かな学生諸君に味わってもらうことを意図して講義し、原則として予備知識は仮定しない。

### 第2回

日時： 2005年4月22日（金）16：30 - 18：00

場所： 数理解析研究所 420号室

講師： 斎藤 恭司 教授

題目： 積分の周期

### 要約：

円周率  $\pi = 3.14159265358979323846\dots$  は古来多くの数学者の関心を惹付けてきた。その関心の在り方は多様である。主なものでは  $\pi$  の種々の有理級数表示や その延長上にある  $\pi$  の超越性及び関連する諸性質、又は  $\Gamma$ -関数や  $\zeta$ -関数などの色々な特殊関数と  $\pi$  との関わり合い等であろうか。

しかしもっと素朴に、それらの諸事の“第一要因” と言うべき 1)  $2\pi$  は半径1の円周の長さである、従って、2)  $2\pi$  は指数関数  $\exp$  の基本周期である、の二点について考えてみたい。

まず第一の点 1) について考える。微積分学により  $\pi$  は次の積分表示

$$\pi = 2 \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \quad (1)$$

を持つ。これは円周  $x^2 + y^2 = 1$  の点  $(x, y)$  と起点  $(0, 1)$  とを結ぶ円弧の長さを  $s(x, y)$  とするとその微分  $ds$  を与える微分形式は  $x$  座標で  $\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$  と書け、円周の四半分は座標  $x$  の区間  $[0, 1]$  によりパラメータ表示出来ることによる。即ち (1) は次の a) と b) に分解出来る。a)  $s(x, y) = \text{Arcsin}(x/y)$  は  $(x, y)$  の”超越関数”（ここでは素朴に多項式、有理式又は代数関数等で表示できないという程度の意味として信じる）であるのに関わらず、そ

の微分  $ds$  は座標  $(x, y)$  により代数的な表示を得ている、b)  $\pi$  は a) で与えられた微分形式を円周  $S^1$  (の四半分  $[0, 1]$ ) という大域的なサイクルで積分するというカップリング操作により得られた。この事は一寸驚くことに見える。何故なら方程式  $x^2 + y^2 = 1$  に対し定まる a) 微分形式 と b) サイクル とは、それ自体は何の変哲もない物であるにも関わらず それらのカップリングにより  $\pi$  という超越的なものが出てきたからである。

次に第二点 2) について考える。積分 (1) を多少修正した複素不定積分

$$z := \int_1^x \frac{dx}{x} \quad (2)$$

を考える (この置き換えは多少説明と正当化が必要だ。というのは、周期 (1) の満たす微分方程式系  $\widetilde{M}_{A_1, s}$  と周期写像 (2) の満たす微分方程式系  $M_{A_1, s}$  との間には微妙な違いがあるが、ここでは立ち入らない。詳しくは [S8, 4.4 Ex.] 参照)。 (2) の積分値  $z(x)$  は変数  $x$  の  $x \neq 0$  なる範囲で定義される多価関数となり、a)  $x$  が複素平面の原点の周りを反時計方向に一周する積分値 (基本周期) が  $2\pi\sqrt{-1}$  となりかつ、b) 逆関数  $x(z)$  が一価正則関数  $\exp(z)$  で周期性  $\exp(z + 2\pi\sqrt{-1}) = \exp(z)$  を持つものとして定まると言うことが 2) の意味であると言って良い。

以上の  $\pi$  の出る仕組みの素朴な一般化とは次の 0), 1), 2) であろう。

0) 円の方程式  $x^2 + y^2 = 1$  を別の”意味ある”方程式 (系) に置き換える。

1) 上の 0) で定まった多様体上の a) ”意味ある”微分形式 (系) 及び

b) 積分する “サイクル” (系) をとり、そのカップリングを考える。

2) 積分 (2) で定まる周期写像に対して a) モノドロミーを決定し、

b) 周期写像の像領域上のモノドロミー不変式 (保型形式) をつくる。

これ等 0), 1)a)b), 2)a)b) 等をどう適切に選択できれば新しい理論が生まれるのであろうか。例えば、0) に於て円周を高次元の球面に置き換えると (Schläfli, 青本) 球面の体積は  $\pi$  の巾の有理数倍となるが、ここではその例に立ち入らない。他方、円の方程式を種々の曲線の方程式  $F(x, y) = 0$  に置き換えることも Newton 以来 色々試みられているが、その本格的な研究は曲線を複素数体で考える事により得られるアーベル積分の理論 (Abel, Jacobi, Riemann) であろう。それは 19c の数学の華とよばれる美しい理論である ([Si] 参照)。更にも、曲線を一般の高次元多様体にする事により、(mixed) Hodge 理論が構築されている ([D],[S] 参照)。

この様に既に多くの重要な一般化があるにも関わらず この講義では更に別の一般化である原始形式について述べてみたい。何処にその違があるかと言うとあとに述べる原始性と同次元性が問題となる。まず、その二つの性質を満たしている典型的例 (楕円積分) について述べよう。

講義では時間の許す範囲で関連する話題についても討論してみたい。予備知識としては微積分程度 (複素関数の初歩を知っていればもっと良い)。

## 1 楕円積分

## 2 超幾何積分

## 3 原始積分