現代の数学と数理解析　６月２日講義（有木担当分）課題

$P=\mathbb{Z}^n$ とし，$\alpha_i \in P$ と $h_i \in P$ をともに i 番めの成分が 1 で $i+1$ 番めの成分が -1, 残りの成分が 0 の整数ベクトルとする．また，P に内積 (u,v) を普通のユークリッド内積で定める．

λ をヤング図形とし，ヤング図形の各箱に，各行は左から右へ読むと単調非減少，各列は上から下に読むと真に単調増加するように $1,\dots,n$ を重複を許して書き込む.（ヤング図形の箱の個数は n とは限らない.）これを形が λ の半標準盤という．形が λ の半標準盤のなす集合を $B(\lambda)$ とする．

$b\in B(\lambda)$ に対し，b に書き込まれた i の個数を $wt_i(b)$, $wt: B(\lambda)\to P$ を $wt(b)=(wt_1(b),\dots,wt_n(b))$ と定める．

また $1\le i<n$ に対し，$\tilde{e}_i b$ と $\tilde{f}_i b$ を授業の例１で説明したルールで定める．すなわち，b から word を作り，$i, i+1$ 以外の数字は無視し，隣り合う $i+1, i$ はひたすらキャンセルし続ける．すると最後には $i,\dots,i,i+1,\dots i+1$ という数列が得られるが，このとき，一番左の $i+1$ を i に変えて半標準盤に復元したのが $\tilde{e}_i b$,（$i+1$ がひとつもないときは $\tilde{e}_i b=0$ とする），一番右の i を $i+1$ に変えて半標準盤に復元したのが $\tilde{f}_i b$,（i がひとつもないときは $\tilde{f}_i b=0$ とする）である．

$$\epsilon_i(b)=\max\{k\ge 0 | \tilde{e}_i^k b\ne 0\},\ \ \varphi_i(b)=\max\{k\ge 0 | \tilde{f}_i^k b\ne 0\}$$

とおく．このとき，$B(\lambda)$ はこれらのデータにより柏原クリスタルになることを示せ．ただし柏原クリスタルの公理は以下のとおりである．(授業のとき一部を飛ばしましたので，下記の公理に従ってください．また，(0) は定義ですし，今の場合は公理 (4) の状況は起こらないので確かめるべきなのは残りの公理 (1)〜(3) です.）

(0) $\tilde{e}_i 0 = 0, \tilde{f}_i 0 = 0.$

(1) $\varphi_i(b)=\epsilon_i(b)+(h_i, wt(b)).$

(2) $\tilde{e}_i b\ne 0$ のとき，

$$wt(\tilde{e}_i b)=wt(b)+\alpha_i,\ \ \epsilon_i(\tilde{e}_i b)=\epsilon_i(b)-1,\ \ \varphi_i(\tilde{e}_i b)=\varphi_i(b)+1.$$

(2)’ $\tilde{f}_i b\ne 0$ のとき，

$$wt(\tilde{f}_i b)=wt(b)-\alpha_i,\ \ \epsilon_i(\tilde{f}_i b)=\epsilon_i(b)+1,\ \ \varphi_i(\tilde{f}_i b)=\varphi_i(b)-1.$$

(3) $b\ne 0, b'\ne 0$ のとき，$\tilde{f}_i b = b' \Leftrightarrow \tilde{e}_i b' = b.$

(4) $\varphi_i(b)=-\infty$ なら，$\tilde{e}_i b=0$ かつ $\tilde{f}_i b=0.$