

全学共通科目「現代の数学と数理解析」

安定結婚問題とアルゴリズム

演習問題

来嶋 秀治

演習 1 男性 5 人 $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ と女性 5 人 $\{a, b, c, d, e\}$ の希望順リストは以下の通りとする .

1	a	c	d	b	e	a	5	3	2	1	4
2	a	c	b	d	e	b	1	2	4	3	5
3	a	e	d	c	b	c	3	4	2	5	1
4	a	b	c	e	d	d	2	4	5	1	3
5	c	b	a	e	d	e	5	4	3	2	1

G-S アルゴリズムを用いて, 安定マッチングを 2 つ見つけよ .

[上記の希望順リストの代わりに] 男女各 5 人以上の適当な希望順リストを作成して, G-S アルゴリズムを用いて安定マッチングを求めてもよい . ただし作成する希望順リストは, 複数の安定マッチングをもつこと .

演習 2 男性プロポーズの G-S アルゴリズムにおいて, 独身男性がプロポーズする順番によらず, 常に同じ安定マッチングが得られることを示せ .

演習 3 講義で扱った希望順リスト

1	a	c	b	d	a	2	4	1	3
2	b	d	c	a	b	3	1	2	4
3	c	a	d	b	c	4	2	3	1
4	d	b	a	c	d	1	3	4	2

の全てのマッチング ($4! = 24$ 通り) を書き出し, b-interchange での推移を記述 (表, もしくは図示) せよ .

ヒント: 安定でないマッチングの blocking pair は 1 組とは限らないことに注意 .

演習 4 ある希望順リストに対する安定マッチング全体の集合を \mathcal{M} とする . 2 つの安定マッチング $M \in \mathcal{M}$ と $M' \in \mathcal{M}$ に対して, 全ての男性にとって M の相手は M' の相手と同じか, より好ましい場合に $M \preceq M'$ と定義する . 演習 1 の希望順リストに対する安定マッチング半順序集合 (\mathcal{M}, \preceq) の Hasse 図を書け .

追記: 男性プロポーズの G-S アルゴリズムの出力が 最小元 に, 女性プロポーズの G-S アルゴリズムの出力が 最大元 になることを確認せよ .

追記 2: 女性にとっても, 2 つの安定マッチング M と M' に対して, 同様に $M \preceq^* M'$ を定義することができる . 女性にとっての順序が男性にとっての順序の逆順になっている (すなわち, $M \preceq M' \Rightarrow M' \preceq^* M$) ことを確認せよ .

演習5 男女各 n 人のある希望順リストに対する安定マッチング全体の集合を \mathcal{M} とする. 2つの安定マッチング $M \in \mathcal{M}$ と $M' \in \mathcal{M}$ に対して, $M \wedge M'$ および $M \vee M'$ を

$$M \wedge M' \stackrel{\text{def.}}{=} \left(1-\min_1\{s_1, s'_1\}, 2-\min_2\{s_2, s'_2\}, \dots, n-\min_n\{s_n, s'_n\} \right),$$

$$M \vee M' \stackrel{\text{def.}}{=} \left(1-\max_1\{s_1, s'_1\}, 2-\max_2\{s_2, s'_2\}, \dots, n-\max_n\{s_n, s'_n\} \right)$$

と定義する. ただし, $\min_r\{s_r, s'_r\}$ ($\max_r\{s_r, s'_r\}$) は, 男性 $r \in \{1, \dots, n\}$ にとって, M での相手 s_r と M' での相手 s'_r のうちの好ましい (\max は好ましくない) 方, を表す. このとき, $M \wedge M'$ および $M \vee M'$ は安定マッチングとなることを示せ.

ヒント: 示すべきことは,

1. $M \wedge M'$ ($M \vee M'$) がマッチングであること,
2. $M \wedge M'$ ($M \vee M'$) が blocking pair を持たないこと,

である.

追記: このことから, $(\mathcal{M}, \wedge, \vee)$ は 分配束 をなすことがわかる.

演習6 安定結婚問題に関して, 何か調べて記述せよ.

参考文献

D. Gale and L. S. Shapley, College admissions and the stability of marriage, American Mathematical Monthly, **69** (1962), 9–14.

A. Tamura, Transformation from arbitrary matchings to stable matchings, Journal of Combinatorial Theory Series A, **62** (1993), 310–323.

安定結婚問題

D. Knuth, Stable Marriage and Its Relation to Other Combinatorial Problems, American Mathematical Society, 1991.

D. Gusfield and R.W. Irving, The Stable Marriage Problem, Structure and Algorithms, The MIT Press, 1989.

A.E. Roth and M.A.O. Sotomayor, A. Two-Sided Matchings: A Study In Game-Theoretic Modeling And Analysis, Cambridge University Press, 1990.

根本俊男, 安定結婚問題, 応用数理計画ハンドブック 第14章 第2節 (2002), 779–830.

松井泰子, 根本俊男, 宇野毅明, 入門オペレーションズリサーチ, 東海大学出版会, 2008.

アルゴリズム理論/計算量

浅野哲夫, アルゴリズムサイエンス: 入口からの超入門, 共立出版, 2006.

岩間一雄, アルゴリズムサイエンス: 出口からの超入門, 共立出版, 2006.

M.R. Garey and D. S. Johnson, Computers and Intractability: A Guide to The Theory of NP-Completeness, Freeman, 1979.

岩田茂樹, NP 完全問題入門, 共立出版, 1995.

順序集合, Hasse 図, 分配束

伊理正夫, 藤重悟, 応用代数, コロナ社, 1988.