

全学共通科目「現代の数学と数理解析」

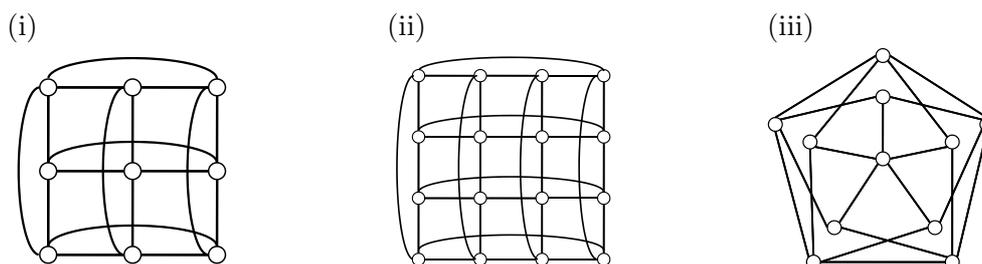
グラフ彩色とアルゴリズム

演習問題

来嶋 秀治

注意: 参照した文献等の情報を必ず記載すること.

演習 1 次のグラフをなるべく少ない色数で彩色し, 最小性の根拠を述べよ.



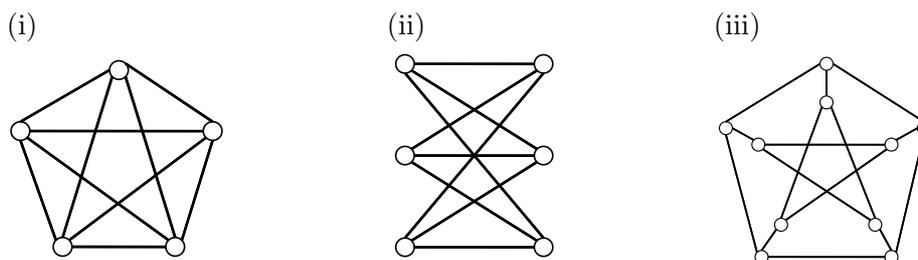
演習 2 (1) 次の命題を示せ.

命題: G は 連結 な平面グラフとし, n 個の頂点, m 本の枝, l 枚の面をもつとする. このとき

$$l - m + n = 2$$

が成り立つ.

(2) 次のグラフが平面的でないことを示せ.



演習 3 「与えられたグラフが平面的かどうかを判定し, 平面的であれば埋め込む方法」について述べよ.

演習 4 「グラフの 最大次数 が Δ ならば $(\Delta + 1)$ 彩色可能である」ことを示せ.

演習 5 「与えられたグラフが 2 彩色可能かどうかを判定する方法」について述べよ.

演習 6 次の命題の真偽について，理由とともに述べよ．

命題: グラフが 4 彩色可能ならば平面的．

演習 7 (染色多項式) グラフ G が与えられた時， $k \in \{1, 2, \dots\}$ 色で彩色する仕方の数を $P(G; k)$ であらわす．例えば， $G = K_3$ のとき $P(G; k) = k(k-1)(k-2)$ である．

(1) 任意のグラフ G とその枝 e に対して，次の式が成り立つことを示せ．

$$P(G; k) = P(G - e; k) - P(G/e; k).$$

ただし， $G - e$ は G から枝 e を 除去 して得られるグラフを表わし， G/e は G から枝 e を 縮約 して得られるグラフを表わす．

(2) 次の式が成り立つことを示せ．

$$P(G; k) = \sum_{T \subseteq E(G)} (-1)^{|T|} k^{c(T)}.$$

ただし， $c(T) = c(V(G), T)$ はグラフ $(V(G), T)$ の 連結成分数 を表わす．

参考文献

C. Thomassen, Every planar graph is 5-choosable, Journal of Combinatorial Theory Series B, **62** (1994), 180–181.

R. Diestel, Graph Theory, 3rd edition, Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, 2006.
邦訳: 根上生也, 太田克弘, グラフ理論, シュプリンガー・フェアラーク東京, 原書第 2 版, 2000.

M. Aigner and G.M. Ziegler, Proofs from THE BOOK, 3rd edition, Springer-Verlag, 2003.
邦訳: 蟹江 幸博, 天書の証明, シュプリンガー・フェアラーク東京, 2002.

R.J. Wilson, Four Colours Suffice: How the Map Problem Was Solved, Allen Lane, 2002.
邦訳: 茂木 健一郎, 四色問題, 新潮社, 2004.

Planarity.net, <http://www.planarity.net/>

アルゴリズム理論/計算量

浅野哲夫, アルゴリズムサイエンス: 入口からの超入門, 共立出版, 2006.

岩間一雄, アルゴリズムサイエンス: 出口からの超入門, 共立出版, 2006.

M.R. Garey and D. S. Johnson, Computers and Intractability: A Guide to The Theory of NP-Completeness, Freeman, 1979.

岩田茂樹, NP 完全問題入門, 共立出版, 1995.