レポート問題

（2010/4/30，担当：竹井）

$\boxed{1}$　$z = x + iy$ を複素平面を動く変数，$z_0 = x_0 + iy_0$ を複素平面内の1点とする．z の関数 $u = u(z) = v(x,y) + iw(x,y)$ が $z = z_0$ において微分可能である，すなわち（z_0 への近づき方に依らない一定の）極限値

$$\lim_{z\to z_0} \frac{u(z) - u(z_0)}{z - z_0}$$

が存在すると仮定するとき，Cauchy-Riemann の関係式

$$\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial w}{\partial y}(x_0, y_0), \quad \frac{\partial w}{\partial x}(x_0, y_0) = -\frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0)$$

が成り立つことを示せ．

$\boxed{2}$

$$\begin{cases} \dfrac{d^2u}{dz^2} + u = 0 \\ u(0) = \alpha, \ \ \dfrac{du}{dz}(0) = \beta \end{cases}$$

（α, β は定数）の解を，巾級数展開 $u = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n$ を使って求めよ．

$\boxed{3}$

$$2z(1-z)\frac{d^2u}{dz^2} - (1+3z)\frac{du}{dz} + u = 0$$

の解を，巾級数展開 $u = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n$ （ただし $u_0 = 1$ とする）を使って求めよ．

$\boxed{4}$　超幾何微分方程式

$$z(1-z)\frac{d^2u}{dz^2} + (\gamma - (\alpha+\beta+1)z)\frac{du}{dz} - \alpha\beta u = 0 \tag{1}$$

の解を $z=0$ での巾級数展開 $u=\sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n$（ただし $u_0=1$ とする）を使って求めれば，超幾何関数

$$F(\alpha,\beta,\gamma;z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n-1)}{\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+n-1)\,n!}z^n$$

が得られることを示せ．

$\boxed{5}$　$\mathrm{Re}\,\gamma > \mathrm{Re}\,\alpha > 0$ のとき，

$$\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\gamma-\alpha-1}(1-tz)^{-\beta}dt$$

は超幾何微分方程式 (1) の解となることを証明せよ．（ヒント：

$$\left(z(1-z)\frac{\partial^2}{\partial z^2}+(\gamma-(\alpha+\beta+1)z)\frac{\partial}{\partial z}-\alpha\beta\right)\left[t^{\alpha-1}(1-t)^{\gamma-\alpha-1}(1-tz)^{-\beta}\right]$$
$$=-\beta\frac{\partial}{\partial t}\left[t^{\alpha}(1-t)^{\gamma-\alpha}(1-tz)^{-\beta-1}\right]$$

を示す．）

$\boxed{6}$　(i) $\alpha>0$ とするとき，$e^{-\alpha t}$ の Laplace 変換は $\dfrac{1}{x+\alpha}$ であることを示せ．
(ii) $f(t)$ を $\{t>0\}$ 上の関数，a, b を定数とするとき，$f''+af'+bf$ の Laplace 変換が $(x^2+ax+b)\mathcal{L}(f)-(x+a)f(0)-f'(0)$（ただし $\mathcal{L}(f)$ は f の Laplace 変換を表す）で与えられることを示せ．
(iii) 上記の (i), (ii) を組み合わせて，

$$\begin{cases}\dfrac{d^2f}{dt^2}+5\dfrac{df}{dt}+6f=0\\[2mm] f(0)=0,\quad \dfrac{df}{dt}(0)=1\end{cases}$$

の解を求めよ．

$\boxed{7}$　この講義やレポート問題に関する感想を記せ．

参考文献

複素領域の常微分方程式の全般的な参考書として，

[1] 高野恭一，常微分方程式，朝倉書店，1994.

[2] 福原満洲雄，常微分方程式（第2版），岩波全書，岩波書店，1980.

特に超幾何方程式については，

[3] 木村弘信，超幾何関数入門，SGCライブラリ（臨時別冊・数理科学）55，サイエンス社，2007.

[4] 原岡喜重，超幾何関数，すうがくの風景7，朝倉書店，2002.

また，複素領域の常微分方程式と群論との関係を論じた非常に興味深い本として，

[5] 久賀道郎，ガロアの夢，日本評論社，1968.