# 現代の数学と数理解析

## カード・シャッフルとマルコフ連鎖

熊谷　隆

(数理解析研究所)

http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kumagai/Lectures.html

2011年7月1日

講義に出席した人へのコメント：講義では「昇数字列（rising sequence)」という用語の使い方を間違っていました。

誤解を避けるために、このスライドでは「昇数字列」という用語を使わない形に修正しました。

## 1 Introduction

52枚のトランプのカードを切るとき、何回くらい切ればカードがよく混ざるか？

⇒ "In Shuffling Cards, 7 Is Winning Number." (New York Times 1990年1月9日)

P. Diaconis教授らの成果を報道

（注）ここでいうシャッフルは、リフル・シャッフルと呼ばれる切り方。

（論文） D. Bayer and P. Diaconis: Ann. Appl. Probab. **2** (1992), 294–313.

(Q) トランプのシャッフルを数学的にどのようにモデル化する？

(Q) 「よく混ざる」とはどういうこと？

## 2 シャッフリングの表現

$d$枚のカード を（一回）シャッフルする操作

カードを下から上に一列に並べ、下から順に$1, 2, \cdots, d$と番号付けする

$\Rightarrow$ カードをシャッフルすると（例えば）番号1のカードが下から$i_1$番目に移り、

2のカードが下から$i_2$番目に移り$\cdots$という風にカードの並び替えが行われる。

$\Rightarrow$ 数学的には、$\pi(1) = i_1, \pi(2) = i_2, \cdots, \pi(d) = i_d$なる全単射

$\pi : \{1, 2, \cdots, d\} \to \{1, 2, \cdots, d\}$（このような$\pi$を置換という）で表される。これを

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & d \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_d \end{pmatrix} \tag{1}$$

と書く。$\{1, 2, \cdots, d\}$上の置換全体を$d$次対称群と呼び、$\mathcal{S}_d$と書く。（$\sharp \mathcal{S}_d = d!$ ）

$\mathcal{S}_d$についてもう少し　$\mathcal{S}_d$は（合成を積とする）群をなす。例えば$d=3$として

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix},\ \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{ならば} \quad \tau\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

ここで、$\tau \circ \pi$（$\pi$を施した後$\tau$を施すという操作）を$\tau\pi$と書いた。

- 結合律：　$(\pi_1\pi_2)\pi_3 = \pi_1(\pi_2\pi_3)$を満たす。
- 単位元（単位置換)：　どの文字も動かさない置換$id$は、$(id)\pi = \pi(id) = \pi$.
- 逆元（逆置換)：　$\pi$が(1)で与えられるとき、その逆元は$\pi^{-1} = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_d \\ \\ 1 & 2 & \cdots & d \end{pmatrix}$

カード・シャッフルに話を戻す

カードをシャッフルする時には、上の置換をランダムに行う、つまり何らかの確率分布に従って$\mathcal{S}_d$の元を選ぶという操作をしている。

**例 2.1** ランダム・カット：下から上に並んだ$d$枚のカードをランダムに２つの山に分け、上の山をもう下の山の前に移動するという操作のこと。

（ランダム・カットの数学的表現）

1から$d$までの間の数字$k$を等確率で選び（つまり、すべての$1 \leq i \leq d$について$P(k=i)=1/d$、一様分布に従って選ぶという）、以下の置換を行うこと。

$$\pi_k := \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & k & k+1 & \cdots & d \\ d-k+1 & d-k+2 & \cdots & d & 1 & \cdots & d-k \end{pmatrix} \tag{2}$$

つまり、$1 \leq i \leq d$の各$k$について確率$1/d$で$\pi_k \in \mathcal{S}_d$という置換を選ぶ操作のこと。

（注） 数学的モデル化の際はある種の理想化をする。

– 今の場合、実際にトランプを切るとき常に同じ確率分布で切ることは人間業では不可能。分布が一様分布であることが妥当かどうかも、明らかではない。

**例 2.2** リフル・シャッフル：カードを二つの山に分け、パラパラ混ぜていく操作。

（リフル・シャッフルの数学的表現）順を追ってみて行く。

i) カードを二つの山に分ける：二項分布に従って分ける。つまり、$1 \leq k \leq d$ なる $k$ について、山の大きさが $k$ と $d-k$ になる確率が ${}_dC_k 2^{-d}$ であるとする。

ii)　次にパラパラパラと混ぜて行くステップ：

右手に $k$ 枚、左手に $d-k$ 枚持っているとして、

$$\text{最初にパラッと机に落ちるカードが} \begin{cases} \text{右手のカードである確率は}\, k/d \\ \text{左手のカードである確率は}\, (d-k)/d \end{cases}$$

帰納的に考えて、右手に $a$ 枚、左手に $b$ 枚残っている段階では、

$$\text{次に落ちるカードが} \begin{cases} \text{右手のカードである確率は}\, a/(a+b) \\ \text{左手のカードである確率は}\, b/(a+b) \end{cases}$$

この操作を、両手のカードがすべて机に落ちるまで続けたとき、

- 起こりうる「二つの山の混ざり方」はすべて当確率で起こる。
- その確率は $k!(d-k)!/d! = 1/{}_dC_k$ となる。

$\because$「最初に右手から、次に左手から $\cdots$」といった具合に起こりうるそれぞれの混ざり方の確率を計算すると、常に分母は $d\cdot(d-1)\cdots 1 = d!$ となり、分子は（かけ算の順番を無視すると）$k\cdot(k-1)\cdots 1\cdot(d-k)\cdot(d-k-1)\cdots 1 = k!(d-k)!$ となる。

iii) 結局混ざったカードの並び方はどういう確率分布をもつ？

iii)-1) シャッフルの結果、結局カードの順番が全く変わらない（つまり単位置換が選ばれた）確率は、

$$\sum_{k=0}^{d} P\left(\text{一つ目の山 (つまり左手にもつカード) が } k \text{ 枚}\right) P\left(\text{順番変わらず} \,\middle|\, \text{一つ目の山が } k \text{ 枚}\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{d} \frac{{}_dC_k}{2^d}\cdot\frac{1}{{}_dC_k} = \frac{d+1}{2^d}. \tag{3}$$

iii)-2) 単位置換ではないとすると、混ざったカードの順番はどうなっているか？

二つの山に分けたとき、それぞれの番号は$1, 2, \cdots, k$と$k+1, \cdots, d$であり、これらが順に混じり合う（しかも単位置換にはならない）のだから、結局以下の$\mathcal{R}$の元に属する置換を選んだ事になる。

$$\begin{aligned}\mathcal{R} \ := \ \{\pi \in \mathcal{S}_d : 1 \leq l \leq d-1 \text{なる} l \text{があって、} &\pi(1) < \cdots < \pi(l) > \pi(l+1), \\ &\pi(l+1) < \cdots < \pi(d)\}\end{aligned}$$

では、$\pi_l \in \mathcal{R}$はどんな確率で選ばれるか？（ここで$\pi_l$の$l$は、$\mathcal{R}$の元の定義に出て来る$l$を表すものとする。）$\pi_l$が選ばれるには、はじめに二つの山に分けるときに一つ目の山が$l$枚でなくてはいけないので、求める確率は

$$P\Big(\text{一つ目の山 (つまり左手にもつカード) が} l \text{枚}\Big) P\Big(\pi_l \,\Big|\, \text{一つ目の山が} l \text{枚}\Big) = \frac{{}_dC_l}{2^d} \cdot \frac{1}{{}_dC_l} = \frac{1}{2^d}.$$

つまり$\mathcal{R}$の元はどれも等確率で選ばれた事になる！ $\square$

実際にはカード・シャッフルは何回も繰り返して行うものである。

何回も繰り返す操作は数学的にどのように記述すればよいか？

（答え）$Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$を、それぞれ$\mathcal{S}_d$に値を持つ独立な確率変数とする。各$Y_i$が、上の例で見た一回のカード・シャッフル（ある確率分布に従って$\mathcal{S}_d$の元を選ぶ操作）にあたる。このとき、

$$\boxed{X_n := Y_n \cdot Y_{n-1} \cdots Y_1} \tag{4}$$

とすると、$X_n$が$n$回のカード・シャッフルの結果に相当する。

これで、カード・シャッフルを繰り返すという操作の数学的記述、つまり$\{X_i\}_{i=0,1,2,\cdots}$という確率変数の族によるランダムな時間発展ができた。（$X_0$は単位置換とする。）このような確率変数の族（ランダムな時間発展）を確率過程と呼ぶ。

特に、$X_n$が$X_{n-1}$の情報と、推移確率と呼ばれる確率分布のみから決まり、それ以前の過去の情報（$X_1, \cdots, X_{n-2}$の情報）に依らないとき、マルコフ連鎖と呼ぶ。

$S$を有限集合とし、その元の数を$d$とする。$S$上の確率測度全体を$\mathcal{P}(S)$と置く。

$d \times d$行列$P = (P(x,y))_{x,y \in S}$が以下を満たすとき、$P$を確率行列という。

$$P(x,y) \geq 0, \quad \sum_{y \in S} P(x,y) = 1, \qquad x, y \in S$$

**定理 3.1** $\mu \in \mathcal{P}(S)$と確率行列$P = (P(x,y))_{x,y \in S}$が与えられたとき、次の性質を持つ$S$に値を取る確率過程$\{X_i\}_{i=0,1,2,\cdots}$が存在する。

*1.* $X_0$の分布が$\mu$に従う。（つまり任意の$x \in S$について$\mathbb{P}(X_0 = x) = \mu(x)$。）

*2.* 任意の$n \geq 0$と$x, y, x_0, \cdots, x_{n-1} \in S$について、以下が成り立つ。

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_{n+1} = y | X_0 = x_0, X_1 = x_1, \cdots, X_{n-1} = x_{n-1}, X_n = x) &= \mathbb{P}(X_{n+1} = y | X_n = x) \\ &= P(x,y). \end{aligned}$$

このような確率過程を、$S$上の推移確率$P$、初期分布$\mu$のマルコフ連鎖と呼ぶ。

前節の例では、$S=\mathcal{S}_d$、初期分布は $\delta_{id}$、つまり確率 1 で単位置換となる分布。

$X_n$ は (4) で定まる。推移確率は

例 2.1 の場合、(2) で決まる $\pi_k$ について $\mathcal{U}_1 := \{\pi_k : 1 \le k \le d\}$ と置くと、

$$\sigma, \tau \in \mathcal{S}_d \text{ に対して、} \quad P(\sigma,\tau) = \begin{cases} 1/d & \text{if} \quad \tau\sigma^{-1} \in \mathcal{U}_1 \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

$$\text{例 2.2 の場合、} \sigma, \tau \in \mathcal{S}_d \text{ に対して } P(\sigma,\tau) = \begin{cases} (d+1)/2^d & \text{if} \quad \sigma = \tau \\ 1/2^d & \text{if} \quad \tau\sigma^{-1} \in \mathcal{R} \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

**定義 3.2** *i)* $\nu = (\nu(x))_{x\in S} \in \mathcal{P}(S)$ が以下を満たすとき、$\nu$ は定常分布であるという。

$$\sum_{y\in S} \nu(y)P(y,x) = \nu(x) \qquad \forall x \in S.$$

*ii)* $\nu = (\nu(x))_{x\in S} \in \mathcal{P}(S)$ が以下を満たすとき、$\nu$ は可逆分布であるという。

$$\nu(x)P(x,y) = \nu(y)P(y,x) \qquad \forall x, y \in S.$$

（問１）可逆分布ならば定常分布であることを示せ。（簡単！）

（問２）例 2.1,2.2 は、どちらも $\mathcal{S}_d$ 上の一様分布を定常分布として持つことを示せ。

さらに例 2.1 は、$\mathcal{S}_d$ 上の一様分布を可逆分布として持つことを示せ。（これも簡単）

以下、推移確率 $P$ に対してその $n$ 乗である $P^n$ の $(x,y)$ 成分を $P^n(x,y)$ と表す。

任意の $x, y \in S$ に対し、ある $n > 0$ が存在して $P^n(x,y) > 0$ となるとき、マルコフ連鎖は既約であるという。マルコフ連鎖が既約とは、どの点から出発してもいつかはすべての点を（正の確率で）通ることである。

定義 **3.3** $\mu, \nu \in \mathcal{P}(S)$ に対して、これらの全変動距離を以下で定める。

$$\|\mu - \nu\|_{TV} = \max_{A\subset S} |\mu(A) - \nu(A)|.$$

このとき次の等式が成り立つ。

**命題 3.4** $\|\mu-\nu\|_{TV}=\frac{1}{2}\sum_{x\in S}|\mu(x)-\nu(x)|$.

既約かつ非周期的なマルコフ連鎖について、次の収束定理が知られている。

**定理 3.5** 推移確率 $P$ を持つマルコフ連鎖が既約かつ非周期的[1]とし、$\nu$ を $P$ の定常分布とする。このとき $\theta\in(0,1)$ と $C>0$ が存在して、以下が成り立つ。

$$\max_{x\in S}\|P^n(x,\cdot)-\nu\|_{TV}\le C\theta^n,\qquad n\ge 1.$$

**系 3.6** 既約なマルコフ連鎖は定常分布を唯一つ持つ。

このように、既約かつ非周期的なマルコフ連鎖は唯一つの定常分布 $\nu$ を持ち、

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}P^n(x,y)=\nu(y),\qquad x,y\in S}$$

を満たす。混合時間は、この定常分布に“ほぼ収束”するのにかかる時間である。

[1] $x\in S$ に対し、$\{n\ge 1:P^n(x,x)>0\}$ の最大公約数を、マルコフ連鎖の $x$ における周期という。任意の $x\in S$ の周期が 1 であるとき、マルコフ連鎖は非周期的であるという。なお、既約なマルコフ連鎖の周期は $x\in S$ の取り方によらず定まることが知られている。

**定義 3.7** $d(n) = \max_{x \in S} \|P^n(x, \cdot) - \nu\|_{TV}$ とおく。このとき、$\varepsilon \in (0, 1]$ に対して

$$t_{mix}(\varepsilon) = \inf\{n \geq 0 : d(n) \leq \varepsilon\}, \quad t_{mix} = t_{mix}(1/4)$$

と定め、$t_{mix}$ をこのマルコフ連鎖の混合時間という。

（注）$t_{mix}$ の定義に出て来る $1/4$ には特段の意味はない。($t_{mix}(\varepsilon)$ を用いても、$\varepsilon$ に応じた定数倍の違いであることが知られている。)

いよいよ、リフル・シャッフルの混合時間を計算することにより、「7回すればよく混ざる」の真相に迫る。「よく混ざった状態」とは、数学的には定常状態を指すので、今の場合一様分布（つまり$\mathcal{S}_d$の各々の元が等確率で現れる分布、以下$U$と書く）を指す。混ざり具合の尺度は、全変動距離を用い、初期分布は、確率1で単位置換を与える分布（以下$\delta_{id}$と書く）とする。

すると、$n$回のシャッフルにおける「混ざり具合」は以下の量で表せる。

$$\|P^n(\delta_{id},\cdot) - U\|_{TV} = \frac{1}{2}\sum_{\pi\in\mathcal{S}_d}\left|P^n(\delta_{id},\pi) - \frac{1}{d!}\right|. \tag{5}$$

ここで、等号は命題3.4による。

$P^n(\delta_{id},\pi)$をどう計算するか？

そのため、多少天下り的だが$a\in\mathbb{N}$に対して$a$-シャッフルという「切り方」を定義する（リフル・シャッフルは、2-シャッフルに当たる）。

$a$-シャッフル

i) まず、カードを大きさがそれぞれ$k_1, k_2, \cdots, k_a$枚の$a$個の山に分ける（ただし$k_1 + \cdots + k_a = d$)。ここで$k_1, k_2, \cdots, k_a$は以下のような多項分布に従うとする：

$$P\Big(\text{山の大きさがそれぞれ } k_1, k_2, \cdots, k_a\Big) = \frac{d!}{k_1!k_2!\cdots k_a!}a^{-d}.$$

ii) 次に、これら$a$個の山のカードをパラパラと混ぜて行く（カードをきる人が$a$本の手を持っていて、器用にカードをパラパラ混ぜる様子を思い描いてみよう）。$a = 2$の場合と同様、「$a$個の山の混ざり方」がすべて等確率で起こるように混ぜる。

「$a$個の山の混ざり方」の場合の数は、$d$個の箱に$a$種類の（各々の個数が$k_1, \cdots, k_a$個の）ボールを入れる入れ方の総数に等しいので$d!/(k_1!k_2!\cdots k_a!)$となる。従って、各々の混ざり方が実現する確率は

$$\frac{k_1!k_2!\cdots k_a!}{d!}$$

である。以上が$a$-シャッフルである。（注）$a > d$でもこのシャッフルは意味を持つ。

iii) 結局混ざったカードの並び方はどういう確率分布をもつ？

今、$\pi(i) > \pi(i+1)$ となる $i$ が丁度 $s$ 個あるような置換の全体を

$$\mathcal{R}_s := \{\pi \in \mathcal{S} : 1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_s \leq d-1 \text{ があって、} \pi(1) < \cdots < \pi(j_1) > \pi(j_1+1),$$
$$\pi(j_1+1) < \cdots < \pi(j_2) > \pi(j_2+1), \cdots, \pi(j_s+1) < \cdots < \pi(d)\}$$

と置き、$r = s+1,\ \pi \in \mathcal{R}_s$ とする。（例2.2の $\mathcal{R}$ はここでの $\mathcal{R}_1$ に当たる。）

すると、$a$-シャッフルの結果は $\pi \in \mathcal{R}_s$ で $a \geq r$ なる置換となる。

iii)-1) $a = r$ の場合 ：シャッフルの結果が $\pi$ であるには、初めの $a$ 個の山の大きさがそれぞれ $j_1, (j_2 - j_1), \cdots, (j_s - j_{s-1}), d - j_s$ でなくてはいけないので、求める確率は

$$\begin{aligned} & P\Big(\text{山の大きさが } j_1, j_2 - j_1, \cdots, j_s - j_{s-1}, d - j_s\Big) P\Big(\pi \,\Big|\, \text{山の大きさが } j_1, j_2 - j_1, \cdots, j_s - j_{s-1}, d - j_s\Big) \\ = & \frac{d! a^{-d}}{j_1!(j_2 - j_1)! \cdots (j_s - j_{s-1})!(d - j_s)!} \cdot \frac{j_1!(j_2 - j_1)! \cdots (j_s - j_{s-1})!(d - j_s)!}{d!} = \frac{1}{a^d}. \end{aligned} \tag{6}$$

iii)-2) $a > r$ の場合 ： シャッフルの結果が $\mathcal{R}_{r-1}$ の元になるには、まず $a$ 個の山に分け、そのうち $(a-r)$ 個の山についてはシャッフルの際にその部分はカードの相対的順序が変わらないようにシャッフルされなければならない。そこでその $(a-r)$ 個の山については最初から “山をくっつける” こととすると、シャッフルの結果が $\pi$ になるにはくっつけた結果山の大きさがそれぞれ $j_1, (j_2 - j_1), \cdots, (j_s - j_{s-1}), d - j_s$ でないといけない。

くっつけた結果がこのようになる $a$ 個の山の分け方は、（$d$ 個のボールの間に $(a-r)$ 個の敷居を入れる入れ方の数に等しいから） ${}_{d+(a-r)}C_d$ 通りある。一旦 $j_1, (j_2 - j_1), \cdots, (j_s - j_{s-1}), d - j_s$ 個の山が出来たら、その山をシャッフルした結果 $\pi$ になる確率は (6) に等しいから、結局シャッフルの結果が $\pi$ である確率は

$$
{}_{d+(a-r)}C_d a^{-d}. \tag{7}
$$

（注） (3) は、$a = 2, r = 1$ の場合 に当たる。また、 $a = r$ とすると (6) と一致 する。

以上で、$a$-シャッフルとその確率分布が分かった。

鍵となる命題（証明は行わない）。

**命題 4.1** $a, b$を自然数とする。このとき、$a$-シャッフルの後$b$-シャッフルを行うと、全体として$ab$-シャッフルを行ったと同じことになる（同じ確率分布を与える）。

証明に興味がある人は、以下を参照して下さい。

B. Mann, *How many times should you shuffle a deck of cards?*, in Snell (1995), 261–289. `http://www.dartmouth.edu/~chance/teaching_aids/Mann.pdf` で入手可能。

この命題から、独立なリフル・シャッフルを$n$回行うことは、$2^n$-シャッフルを行うことと同じ事になる（同じ確率分布を与える）。また、$\pi \in \mathcal{R}_{r-1}$のとき、(7) より

$$P^n(\delta_{id}, \pi) = {}_{d+2^n-r}C_d \cdot 2^{-nd}.$$

従って (5) より、

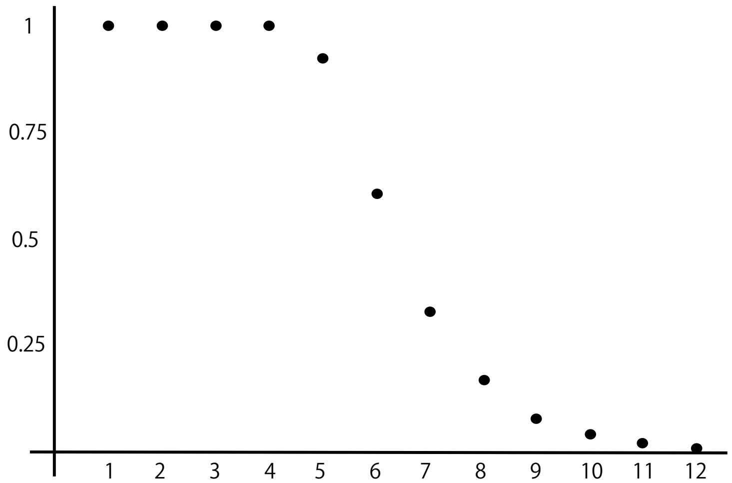
$$\|P^n(\delta_{id},\cdot)-U\|_{TV}=\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{d}A_{d,r}\left|{}_{d+2^n-r}C_d\cdot 2^{-nd}-\frac{1}{d!}\right|. \tag{8}$$

ただし $\mathcal{R}_{r-1}$ の元の数を $A_{d,r}$ と書いた。これは組合せ論で Eulerian number と呼ばれる数で、例えば次のような帰納的な関係式を満たす。

$$\boxed{A_{d,1}=1,\quad A_{d,r}=r^d-\sum_{j=1}^{r-1}{}_{d+r-j}C_d\cdot A_{d,j}.}$$

ここまで来ると、コンピュータを使って計算ができる。$d=52$ のトランプの場合に (8) の左辺を計算すると以下のようになる。この図表を見ると、7 回前後で急に「よく混ざった」状態になると分かってもらえるだろう。

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9237 | 0.6135 | 0.3341 | 0.1672 | 0.0854 | 0.0429 | 0.0215 | 0.0108 |



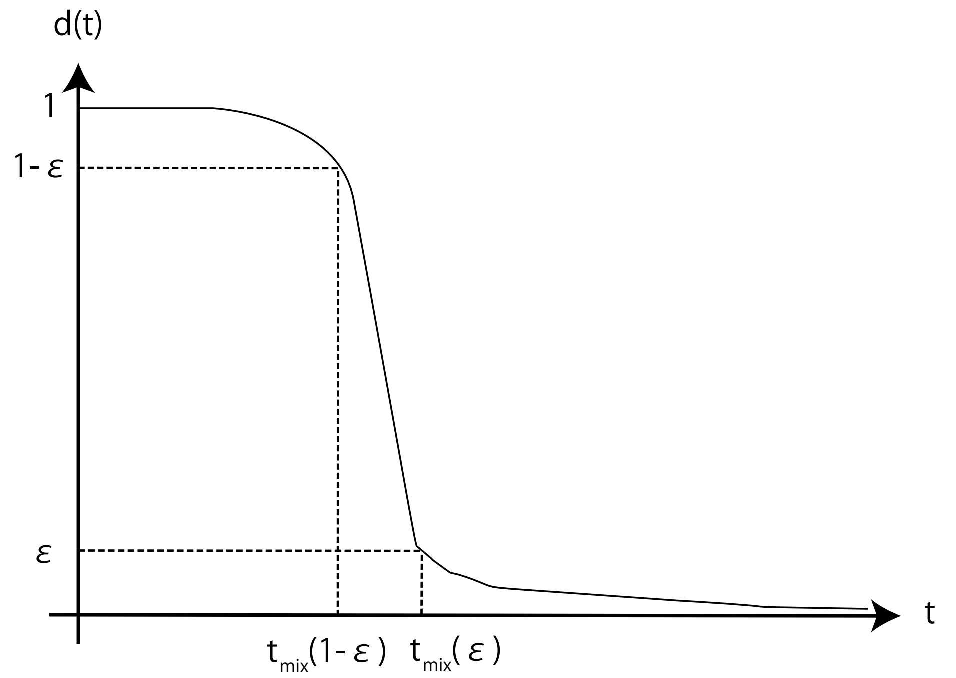

カット・オフ現象　上の図のように、急激に混ざり合う現象をカット・オフ現象と呼ぶ。数学的な定式化のためには、一つの固定した$d$を見るのでは不十分である。

**定義 4.2** $n$個の元からなる有限集合$S(n)$上に、それぞれマルコフ連鎖が与えられているとし、その混合時間を$t_{mix}^{(n)}(\varepsilon)$と書くことにする。このとき、このマルコフ連鎖の列がカット・オフを持つとは、任意の$\varepsilon > 0$に対して以下が成り立つことである。

$$\lim_{n\to\infty} \frac{t_{mix}^{(n)}(\varepsilon)}{t_{mix}^{(n)}(1-\varepsilon)} = 1. \tag{9}$$

(9) のような現象をカット・オフ現象という。このように、数学的には、カット・オフ現象とは無限個のマルコフ連鎖の列に関する性質なのである。

以下の図で分かるように、カット・オフ現象は（$n$が大きいとき）混合時間の周辺で、急激に$d(t)$が小さくなる（つまり「良く混ざる」）現象のことなのである。$n$が十分大きいという点に注意して欲しい。



最後にDiaconis達の定理を紹介する。

**定理 4.3** (D. Bayer and P. Diaconis (1992)) $\mathcal{S}_n$上の独立なリフル・シャッフルを $m = \frac{3}{2}\log_2 n + \theta$ 回繰り返すと、$n$が大きいとき以下が成り立つ。

$$\left\| P^m(\sigma,\cdot) - U \right\|_{TV} = 1 - 2\Phi\left(\frac{-1}{4\sqrt{3}\cdot 2^{\theta}}\right) + O\left(n^{-1/4}\right), \qquad \sigma \in \mathcal{S}_n. \tag{10}$$

ここで$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{z} \exp(-t^2/2)dt$で、$U$は$\mathcal{S}_n$上の一様分布とする。

(10)は$\theta \to -\infty$のとき1で$\theta \to \infty$のとき0になることから任意の$\varepsilon > 0$について(9)が成り立つことがわかり、リフル・シャッフルについてカット・オフ現象が証明されたとこになる。$n$が十分大きいとき、混合時間は$\frac{3}{2}\log_2 n$である。($n = 52$の場合、$\frac{3}{2}\log_2(52) = 8.55\cdots$なので先程の7回とは少しずれるが、これは52という数がまだ“十分大きくない”ために生じるずれである。)

（問３）（ランダム to トップ） カードの山の中からランダムにカードを取って、一番下に入れる操作を繰り返し行う操作を考えよう。(Amazon のランキングのようなものを想像して欲しい。)「ランダムにカードを取る」を一様分布に従ってカードを取るものと解釈して、このモデルに対応するマルコフ連鎖の推移確率と定常分布を求めよ。

（問４）講義の内容に関する感想や、講義に関連したテーマについて各自で勉強した 内容を記せ。(レポート用紙に１枚以上書くこと。)

マルコフ連鎖の混合時間やカット・オフ現象について（文献も含めて）もっと詳しく知りたい人は以下の PDF file をご覧下さい（リンクは張っていません。)

http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kumagai/Kuma-KoukaiLect.pdf