

全学共通科目講義「現代の数学と数理解析」
第 14 回 「流れの安定性問題の数理」レポート問題

1. 次の微分方程式にしたがう点の運動の停留点とその安定性について述べよ.

$$\frac{dx}{dt} = -2x(x-1)(x-2), \quad \frac{dy}{dt} = -2y.$$

2. 積分定理に基づいて次の流れの安定性について述べよ.

(a) $U(y) = \cos y \quad (-\pi/2 \leq y \leq \pi/2).$

(b) $U(y) = \sin y \quad (-\pi/2 \leq y \leq \pi/2).$

(c) $U(y) = \sin^3 y \quad (-\pi/4 \leq y \leq \pi/4).$

3. 次の折れ線モデルの安定性を調べよ.

$$U(y) = \begin{cases} U_0 & (y \geq a) \\ U_0 y/a & (-a \leq y \leq a) \\ -U_0 & (y \leq -a) \end{cases}$$

「ヒント」

流れの擾乱 $\tilde{\psi}'$ の従う方程式は、各領域で $d^2U/dy^2 = 0$ であるから、レイリー方程式が $\left(\frac{d^2}{dy^2} - k^2\right)\tilde{\psi}' = 0$ と簡単になる。また、各領域の境界においては流線と圧力が連続であることから $\tilde{\psi}'$ と $-(U-c)\frac{d\tilde{\psi}'}{dy} + \frac{dU}{dy}\tilde{\psi}'$ が連続である。これらの条件から 4×4 の係数行列から成る固有値問題を構成することができる。