現代の数学と数理解析 データ構造の数理 レポート問題

2014 年 7 月 11 日

復習

- 集合 X、元 $l \in X$、関数 $n : X^2 \to X$ の組 (X, l, n) を**全二分木代数**と呼ぶ。
- $\mathcal{X} = (X, l_X, n_X)$ と $\mathcal{Y} = (Y, l_Y, n_Y)$ を全二分木代数とする。以下を満たす関数 $f : X \to Y$ を (全二分木代数) **準同型**と呼び、$f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ と書く。

$$f(l_X) = l_Y, \quad f(n_X(x, y)) = n_Y(f(x), f(y))$$

- 集合 A, B の直積と直和を以下で与える。

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}, \quad A + B = \{(0, a) \mid a \in A\} \cup \{(1, b) \mid b \in B\}$$

  また、元が一つのみからなる集合 $\mathbf{1}$ を固定し、$*$ をその元とする。

- 集合 X に対し、集合 $B(X)$ を $B(X) = \mathbf{1} + (X \times X)$ で定義する。また、$\overbrace{B(\cdots B}^{i}(\emptyset)\cdots)$ を $B^i(\emptyset)$ と書く (特に $B^0(\emptyset) = \emptyset$)。

問題 1. (易)

1. 任意の集合 X, Y に対し、$X \subseteq Y$ ならば $B(X) \subseteq B(Y)$ を示せ。
2. 任意の自然数 i に対し、$B^i(\emptyset) \subseteq B^{i+1}(\emptyset)$ を示せ。

次に集合 T、元 $L \in T$、関数 $N : T \times T \to T$ を以下で定義し、全二分木代数 (T, L, N) を $\mathcal{T}$ と書く。

$$T = \bigcup_{i \in \mathbf{N}} B^i(\emptyset), \quad L = (0, *), \quad N(t, u) = (1, (t, u))$$

問題 2. (やや難) 関数の属 $\{h_i : B^i(\emptyset) \to X\}_{i \in \mathbf{N}}$ が、任意の自然数 i と $x \in B^i(\emptyset)$ に対して $h_i(x) = h_{i+1}(x)$ を満たすとする。このとき関数 $h : T \to X$ で、任意の自然数 i と $x \in B^i(\emptyset)$ に対して $h(x) = h_i(x)$ を満たすものが唯一存在することを示せ[1]。(ヒント: 集合 $\{(x, h_i(x)) \mid i \in \mathbf{N}, x \in B^i(\emptyset)\}$ が T から X への関数を与える事を示す)

問題 3. (難) 任意の全二分木代数 $\mathcal{X}$ に対し、準同型 $h_{\mathcal{X}} : \mathcal{T} \to \mathcal{X}$ が唯一存在することを示せ。

準備　集合 X, Y に対し、X と Y の間に全単射が存在することを $X \sim Y$ と書こう。集合の直積と直和は以下を満たす。

$$\mathbf{1} \times X \sim X, \quad X \times Y \sim Y \times X, \quad X \times (Y \times Z) \sim (X \times Y) \times Z$$

$$\emptyset + X \sim X, \quad X + Y \sim Y + X, \quad X + (Y + Z) \sim (X + Y) + Z$$

$$X \times (Y + Z) \sim (X \times Y) + (X \times Z)$$

また、$X^0 = \mathbf{1}, X^1 = X, X^n = X^{n-1} \times X$ と定義する。

問題 4. (がんばればできる) 授業で紹介した $T \sim \mathbf{1} + T^2$ と上で挙げた全単射のみを用いて、$T^7 \sim T$ を示せ。(ヒント:

$$T^7 \sim T^8 + T^6 \sim T^8 + (T^7 + T^5) \sim \quad \cdots \quad \sim T^6 + T^2 \sim \quad \cdots \quad \sim T$$

を示す。)

[1] 一般に、ある性質 P を満たすものが唯一存在することを示すには、1. まず P を満たすもの (仮に c とおく) の存在を示し、2. 次に P を満たす任意のもの x が、c と等しくなる事を示せばよい。