レポート問題

（2014/4/11，担当：竹井）

$\boxed{1}$　常微分方程式に対する解の存在と一意性の定理（Cauchy の定理）を利用して，三角関数の加法定理

$$
\begin{aligned}
\sin(x+y) &= \sin x \cos y + \cos x \sin y \\
\cos(x+y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y
\end{aligned}
$$

を証明せよ.

$\boxed{2}$　超幾何微分方程式

$$z(1-z)\frac{d^2u}{dz^2} + (\gamma - (\alpha+\beta+1)z)\frac{du}{dz} - \alpha\beta u = 0$$

の解を $z=0$ での Taylor 展開 $u = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n$（ただし $u_0 = 1$ とする）を使って求めれば，超幾何関数

$$F(\alpha,\beta,\gamma;z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n-1)}{\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+n-1)\,n!} z^n$$

が得られることを示せ.

$\boxed{3}$　(i) $a>0$ とするとき，$e^{-a\zeta}$ の Laplace 変換は $\dfrac{1}{z+a}$ であることを示せ.
(ii) Laplace 変換を用いて，

$$
\begin{cases}
\dfrac{d^2f}{d\zeta^2} + 5\dfrac{df}{d\zeta} + 6f = 0 \\
f(0) = 0, \quad \dfrac{df}{d\zeta}(0) = 1
\end{cases}
$$

の解を求めよ.

$\boxed{4}$　Euler 変換

$$(I_0^{\alpha}[u])(x) = \frac{1}{c_\alpha}\int_0^{\alpha} (x-t)^{\alpha-1} u(t)\,dt$$

（ただし c_α は定数．特に自然数 $\alpha = 1,2,3,\cdots$ に対しては $c_\alpha = (\alpha-1)!$，また $\alpha = 1/2$ に対しては $c_{1/2} = \sqrt{\pi}$ と定義する）について次の問いに答えよ.

(i) $u(x)$ の n 回不定積分 $u^{[n]}(x)$ を

$$u^{[1]}(x) = \int_0^x u(t)dt, \quad u^{[n]}(x) = \int_0^x u^{[n-1]}(t)dt \quad (n \geq 2)$$

と定める．α が自然数のとき $(I_0^\alpha[u])(x) = u^{[\alpha]}(x)$ であることを示せ.
(ii) $\alpha = 1/2$ のときの Euler 変換に対して,

$$\left(I_0^{1/2}\left[I_0^{1/2}[u]\right]\right)(x) = (I_0^1[u])(x) = \int_0^x u(t)dt$$

が成立することを示せ.

$\boxed{5}$

$$z^3\frac{d^2u}{dz^2} + \left(\frac{z^2}{2} - z\right)\frac{du}{dz} + u = 0$$

の解を Taylor 展開 $u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n$ （ただし $u_0 = 0$，$u_1 = 1$ とする）を使って求めよ．その Borel 変換（形式的逆 Laplace 変換）はどうなるか？
（ヒント： $(1-X)^{-1/2}$ の $X = 0$ での Taylor 展開を考える.）

$\boxed{6}$　この講義やレポート問題に関する感想を記せ.

参考文献

複素領域の常微分方程式の全般的な参考書としては,

[1] 高野恭一，常微分方程式，朝倉書店，1994.

特に超幾何微分方程式について詳しく知りたい場合は,

[2] 原岡喜重，超幾何関数，すうがくの風景 7，朝倉書店，2002.

[3] 木村弘信，超幾何関数入門，SGC ライブラリ（臨時別冊・数理科学）55，サイエンス社，2007.

さらに発展的な内容を扱ったものとして,

[4] 久賀道郎，ガロアの夢，日本評論社，1968.

[5] 河合隆裕・竹井義次，特異摂動の代数解析学，岩波書店，2008.

[4] は複素領域の常微分方程式と群論との関係を（初学者向けにわかりやすく），又 [5] は Borel 総和法を用いた常微分方程式の発散級数解の扱いを，それぞれ論じている.