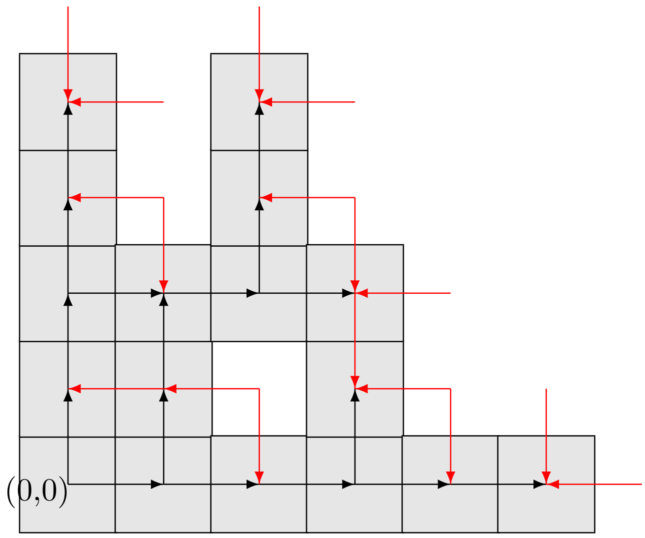
「現代の数学と数理解析」４月１０日のレポート問題

担当：福島竜輝

以下の４問から一つか二つを選んで，それに関するレポートを作成せよ．但し 3, 4 については勘違いが生じ易い問題と思うので，1, 2 の少なくとも一つは解答することを勧める．

1. 整数点の上を各ステップで右か左に一つ動く路のうちで，n ステップ後に $n-2k$ に到達するものの総数は ${}_n\mathrm{C}_k$ であることを示せ．
2. 好きな $n \in \{1, 2, \ldots, 30\}$ を一つ選んで，二次元正方格子の上で原点を出発して各ステップで隣接点に動く長さ n の路のうち，自分自身と交わらないものの総数 N_n^{SA} を求めよ．（ヒントではないが役に立つかもしれない注意：$\log_{10} 2.64 \approx 0.4216$.）
3. 二次元正方格子の縦の辺には $\uparrow$ または $\downarrow$ を，横の辺には $\rightarrow$ または $\leftarrow$ を置き，原点から $\uparrow$ と $\rightarrow$ だけに従って到達できる範囲を考える（下図の影をつけた部分）．到達できる範囲が有限であるとき，その外側境界（例えば下図では中に一つだけある正方形の部分は除く）をなす辺のうちに $\downarrow$ または $\leftarrow$ と交叉していなければならないものがちょうど半分あることを示せ．（残りの辺はどちらでもよい．）



4. 講義では上の $\uparrow$, $\downarrow$, $\rightarrow$, $\leftarrow$ をランダムに置くときに，$\uparrow$ と $\rightarrow$ が置かれる確率が十分高ければ無限に延びる路が存在する可能性があることを示し，さらにそのとき原点から $\uparrow$ と $\rightarrow$ だけに従って $x+y=n$ に到達する路の数が指数的に増大することを示すアイデアを説明したが，その議論は二次元の特殊性に強く依存していた．三次元の対応する問題に適用可能なアイデアを考えよ．